UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
2021

Polinômios homogêneos não analíticos e uma aplicação às séries de Dirichlet

MIKAELA AIRES DE OLIVEIRA

MIKAELA AIRES DE OLIVEIRA

Polinômios homogêneos não analíticos e uma aplicação às séries de Dirichlet

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves.

Manaus - AM
2021

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

O48p

Oliveira, Mikaela Aires de

Polinômios homogêneos não analíticos e uma aplicação às séries de Dirichlet / Mikaela Aires de Oliveira . 2021

102 f.: 31 cm.

Orientador: Thiago Rodrigo Alves

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Polinômios homogêneos. 2. Polinômios homogêneos não analíticos. 3. Lineabilidade e espaçabilidade. 4. Funções holomorfas. 5. Séries de Dirichlet. I. Alves, Thiago Rodrigo. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. General Rodrigo Octavio Jordão Ramos
Coroado I, Manaus - AM, CEP 69067-005

ALUNA: Mikaela Aires de Oliveira.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 2190472.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Polinômios homogêneos não analíticos e uma aplicação às séries de Dirichlet.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada através de videoconferência, em 02 de agosto de 2021, às 8h30 min, pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves (orientador) Thiago Rodrigo Alves
UFAM - Universidade Federal do Amazonas

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro VVFávaro
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Moacir Aloísio Nascimento dos Santos Moacir Aloísio Nascimento dos Santos
UFAM - Universidade Federal do Amazonas

Manaus-AM, 02 de Agosto de 2021.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço Deus por sua infinita bondade e misericórdia que me permitiram chegar até aqui.

À minha mãe e meus irmãos que sempre estiveram ao meu lado dando todo apoio e suporte necessário.

Ao meu orientador, Professor Thiago Rodrigo, pela paciência e excelente orientação apesar de todas as dificuldades que surgiram com a pandemia, pelos conselhos e apoio durante o mestrado e por sempre me encorajar a dar novos passos.

Aos membros da banca examinadora, professores Vinícius Vieira Fávaro e Moacir Aloísio Nascimento dos Santos, pelas correções e sugestões.

Aos professores Roberto Cristóvão e Roberto Prata por todas as palavras de incentivos e apoio durante toda a graduação até o mestrado.

Aos secretários do PPGM Arístocles e Euclimar e aos amigos de mestrado e doutorado Felipe André, Daniel Reis, Hamilton Nascimento, Roseane Souza, Leonardo Brito e Matheus Hudson que apesar da distância física sempre se fizeram presentes durante essa caminhada.

À CNPq pelo apoio financeiro.

A todos vocês os meus sinceros agradecimentos.

OLIVEIRA, M. A. *Polinômios homogêneos não analíticos e uma aplicação às séries de Dirichlet.* 2021. 102 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Amazonas, Manaus-AM.

Resumo

Neste trabalho estuda-se polinômios homogêneos contínuos que não são analíticos. Os principais resultados referem-se à existência de estruturas lineares constituídas por polinômios não analíticos e, também, uma aplicação desses polinômios às séries de Dirichlet. Com esse fim, começamos com o estudo dos polinômios homogêneos entre espaços de Banach e suas principais propriedades. Em seguida, são exibidas as construções do polinômio 2-homogêneo dada por Toeplitz e do polinômio m-homogêneo, $m \geq 2$, devida à Bohnenblust e Hille. Com o auxílio desses polinômios é gerado um subespaço vetorial isomorfo ao espaço ℓ_1, gozando da propriedade de que os seus elementos (não nulos) são polinômios homogêneos que não são analíticos num determinado vetor. Em particular, o conjunto dos polinômios homogêneos não analíticos em c_0 é espaçável. Por fim, como uma aplicação exibimos a solução do Problema de Convergência Absoluta de Bohr, que consiste na determinação da distância máxima entre as abscissas de convergência absoluta e uniforme de uma série de Dirichlet, tendo como ferramenta útil em sua solução o polinômio de Bohnenblust e Hille.

Palavras-chave: Polinômios homogêneos; Polinômios homogêneos não analíticos; Lineabilidade e espaçabilidade; Funções holomorfas; Séries de Dirichlet .

OLIVEIRA, M. A. *Homogeneous non-analytic polynomials and an application to Dirichlet series.* 2021. 102 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Amazoans, Manaus-AM.

Abstract

We study continuous homogeneous polynomials that are not analytic. The main results in this work refer to the existence of linear structures formed by non-analytical polynomials, as well as an application in which these polynomials are used in order to solve Bohr's Absolute Abscissa Problem. To do this we begin with the study of homogeneous polynomials between Banach spaces and their main properties. Then we see in detail the construction of the 2-homogeneous polynomial constructed by Toeplitz and the m-homogeneous polynomial of Bohnenblust and Hille. With the help of these polynomials we will construct a linear subspace isomorphic to the Banach space ℓ_1 , formed by homogeneous polynomials that are not analytic on a given vector, in particular we will have that the set of homogeneous non-analytic polynomials in c_0 is spaceable. As an application we will see the Bohr Absolute Convergence Problem, which consists in determining the maximum distance between the abscissa of absolute and uniform convergence of a Dirichlet series, having as a useful tool for solution the Bohnenblust and Hille polynomial.

keywords: homogeneous polynomials; homogeneous non-analytic polynomials; lineability and spacability; Dirichlet series .

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N}_0^N$	$\underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{N\ vezes}$
$\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$	conjunto das sequências de números inteiros não negativos com suporte finito
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\vert \cdot \vert$	módulo
$\Vert \cdot \Vert$	norma
E e F	espaços vetoriais normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$
B_E	bola unitária aberta do espaço normado E centrada na origem
E^m	$\underbrace{E \times \cdots \times E}_{m\ vezes}$
E^*	dual topológico do espaço vetorial normado E
$\partial^\alpha f(a)$	$\dfrac{\partial^{\vert\alpha\vert} f(a)}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_N^{\alpha_N}}$
$\mathcal{L}_a(^mE; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares de E^m em F
$\mathcal{L}(^mE; F)$	subespaço vetorial de $\mathcal{L}_a(^mE; F)$ das aplicações multilineares contínuas
$\mathcal{L}_a^s(^mE; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares simétricas de E^m em F
$\mathcal{L}^s(^mE; F)$	subespaço vetorial de $\mathcal{L}_a(^mE; F)$ das aplicações multilineares simétricas contínuas

$\mathcal{P}_a(^mE;F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m-homogêneos de E em F
$\mathcal{P}(^mE;F)$	subespaço vetorial de $P_a(^mE;F)$ dos polinômios m-homogêneos contínuos
$\mathcal{P}(^mc_0)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m-homogêneos de c_0 em $\mathbb{C}$
$\\|P\\|$	$\sup\limits_{x\in B_E}\\|P(x)\\|$
$(P(^mE;F),\\|\cdot\\|)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m-homogêneos contínuos de E em F com a norma do $\sup$
S_m	grupo das permutações de m elementos
$\mathscr{H}(U)$	espaço vetorial das aplicações holomorfas de U em $\mathbb{C}$
$\mathscr{H}_G(U)$	espaço vetorial das aplicações G-holomorfas de U em $\mathbb{C}$
$\mathscr{N}_m$	conjunto dos polinômios m-homogêneos contínuos não analíticos em c_0
$\mathbb{D}^N(a,r)$	polidisco aberto de centro a e poliraio r
$\overline{\mathbb{D}^N(a,r)}$	polidisco fechado de centro a e poliraio r
$r_bf(a)$	raio de limitação uniforme de uma função holomorfa f no ponto a
$r_cf(a)$	raio de convergência (uniforme) da série de Taylor de f em a
$\sigma_c(D)$	abscissa de convergência da série de Dirichlet D
$\sigma_u(D)$	abscissa de convergência uniforme da série de Dirichlet D
$\sigma_a(D)$	abscissa de convergência absoluta da série de Dirichlet D
$\mathfrak{D}$	álgebra de todas as séries de Dirichlet
$\mathfrak{D}_m$	espaço vetorial das séries de Dirichlet m-homogêneas
$\mathfrak{P}$	álgebra de todas as séries de Potências
$\mathscr{H}_\infty$	álgebra de Banach das séries de Dirichlet limitadas e que convergem em [Re > 0]
$\mathscr{H}_\infty^m$	subespaço de $\mathscr{H}_\infty$ das séries de Dirchlet m-homogêneas

$H_\infty(\mathbb{D})$	espaço vetorial das funções holomorfas limitadas em $\mathbb{D}$
$H_\infty(\mathbb{D}^N)$	espaço vetorial das funções holomorfas limitadas em $\mathbb{D}^N$
$H_\infty([\text{Re} > 0])$	espaço vetorial das funções holomorfas limitadas no semiplano $[\text{Re} > 0]$

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Para funções de uma variável complexa definida em abertos sabe-se que diferenciabilidade e analiticidade são equivalentes, isto é, uma função é diferenciável se, e somente se puder ser representada por meio de séries infinitas de potências de monômios. Por muito tempo se acreditou que para funções em infinitas variáveis isso também valeria. Von Koch com base na abordagem de Weierstrass para dimensão finita definiu funções holomorfas em infinitas variáveis como sendo funções que podem ser representadas por séries de monômios. Em 1915 Fréchet seguindo a ideia de Cauchy deu sua definição de função diferenciável. Neste contexto, tem-se que uma função limitada é holomorfa (segundo Fréchet) se, e somente se for contínua e G-holomorfa. Logo se percebeu que essas duas abordagens não eram equivalentes. Em 1913 Toeplitz em [21] exibiu um exemplo de uma função holomorfa em que sua representação por séries de monômios não convergia em todos os pontos do domínio. Mais precisamente, Toeplitz construiu um polinômio 2-homogêneo em c_0 que não era analítico em todo ponto. Anos mais tarde, em 1931 Bohnenblust e Hille em [4] com objetivo de resolverem o famoso *Problema de convergência absoluta de Bohr*, sobre as séries de Dirichlet, modificaram essa construção e mostraram que para cada $m \geq 2$ existe um polinômio m-homogêneo que não é analítico. Os trabalhos de Toeplitz, Bohnenblust e Hille tem grandes implicações no estudo da analiticidade de polinômios m-homogêneos contínuos, mas por muito tempo foram esquecidos.

Um dos trabalhos nessa linha de pesquisa, foi publicado em 2016 por J. Aberto Conejero, Juan B. Seoane-Sepúlveda e Pablo Sevilla Peris que com base nos polinômios de Bohnenblust e Hille mostraram em [7] que o conjunto dos polinômios m-homogêneos contínuos e não analíticos em c_0 é lineável. Além disso, nesse artigo ainda é mostrado que este espaço vetorial é isomorfo ao espaço ℓ_1, o que implica na espaçabilidade do conjunto. De forma precisa, a definição de lineabilidade e espaçabilidade é a seguinte:

Sejam E um espaço vetorial normado, $A \subset E$ e μ um número cardinal. Dizemos que o conjunto A é:

(i) *μ-lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão μ.

(ii) *μ-espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial fechado de dimensão μ.

Se $A \cup \{0\}$ contiver um espaço vetorial (fechado) de dimensão infinita, diremos apenas que A é *lineável* (*espaçável*).

O problema de convergência absoluta de Bohr que mencionamos acima consiste na determinação da largura máxima da faixa em que uma série de Dirichlet converge uniformemente mas não absolutamente. Este problema foi considerado por Harold Bohr em 1913 enquanto investigava a distância máxima entre as abscissas de convergência de uma série de Dirichlet. Primeiro ele se concentrou na distância entre as abscissas de convergência condicional e absoluta e mostrou que a largura da faixa que uma série de Dirichlet converge condicionalmente mas não absolutamente é igual a 1. Em seguida, tentou determinar a distância máxima entre as abscissas de convergência absoluta e uniforme para uma determinada série de Dirichlet. Ele considerou

$$S = \sup\{\sigma_a(D) - \sigma_u(D) : D \text{ é uma série de Dirichlet}\}$$

onde $\sigma_a(D)$ e $\sigma_u(D)$ denotam as abscissas de convergência absoluta e uniforme de uma série de Dirichlet D, respectivamente. Bohr mostrou que $S \leq \dfrac{1}{2}$, entretanto ele não conseguiu nenhum exemplo de modo que

$$\sigma_a(D) - \sigma_u(D) = \frac{1}{2}.$$

O exemplo de Toeplitz que mencionamos anteriormente, implicava que $S \geq \frac{1}{4}$. Então, o que se tinha até aquele momento era que $\frac{1}{4} \leq S \leq \frac{1}{2}$. Demorou um pouco, mais de 15 anos, até esse problema ser resolvido e o valor de S ser determinado de forma precisa. Foi apenas em 1931 que Bohnenblust e Hille solucionaram esse problema . Eles generalizaram a desigualdade $4/3$ de Littlewood e construiram um polinômio m-homogêneo não analítico que fornecia a série de Dirichlet com as propriedades desejadas e que implicava que $S = \frac{1}{2}$.

O objetivo central dessa dissertação é estudar os polinômios homogêneos não analíticos e os resultados que mencionamos presentes em [7]. Além disso, como aplicação estudaremos o Problema de convergência absoluta de Bohr e apresentaremos de forma detalhada os resultados mais importantes que levam a sua solução. Os principais resultados desse trabalho giram em torno do polinômio m-homogêneo contínuo e não analítico de Bohnenblust e Hille, por isso dedicamos um capítulo somente para abordagem desse polinômio e a sua construção. A fim de alcançarmos esses objetivos, como pré-requisito faremos um estudo acerca dos principais resultados referentes aos polinômios homogêneos e às funções holomorfas.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira:

No Capítulo 1 veremos algumas noções preliminares que serão importantes no decorrer dessa dissertação. Neste capítulo serão abordados os principais resultados sobre aplicações multilineares e polinômios m-homogêneos entre espaços de Banach. Veremos também alguns resultados sobre séries de potências em termos de polinômios homogêneos. As principais referências usadas na elaboração desse capítulo foram [14, 17].

No Capítulo 2 nos dedicamos ao estudo de holomorfia entre espaços normados. Na primeira seção estudaremos o caso particular em $\mathbb{C}^N$ e apresentamos os principais resultados sobre funções holomorfas nesse espaço, veremos que neste caso diferenciabilidade e analiticidade são equivalentes. Na seção seguinte, abordamos o caso mais geral de funções holomorfas, em que o domínio agora é um espaço normado arbitrário. Para este capítulo consultamos [8, 10, 14, 15, 16, 19].

No Capítulo 3 começamos introduzindo alguns conjuntos de indexação que facilitarão a manipulação dos polinômios homogêneos. Nas seções seguintes vemos em detalhes a construção do polinômio 2-homogêneo construído por Toeplitz e a extensão feita por Bohnenblust e Hille para polinômios m-homogêneos ($m \geq 2$), sendo esse o principal resultado do capítulo. Este capítulo é baseado em [4, 8, 9, 21].

No Capítulo 4 se encontram alguns dos principais resultados desse trabalho. Nele trataremos sobre a lineabilidade do conjunto dos polinômios homogêneos não analíticos, que denotaremos aqui por $\mathscr{N}_m$. Na primeira seção começamos verificando que este conjunto é 2-lineável, e então com algumas modificações na prova, mostraremos que na verdade $\mathscr{N}_m$ é lineável. Finalizaremos verificando ainda que este conjunto contém uma cópia isomorfa de ℓ_1, o que implicará na espaçabilidade de $\mathscr{N}_m$. Para o desenvolvimento deste capítulo, usamos as referências [2, 7, 8, 9].

Por fim, no Capítulo 5 veremos uma aplicação nas séries de Dirichlet. Começaremos com uma breve introdução sobre os principais resultados referentes a essas séries e sua relação com as funções holomorfas. Nos concentraremos na questão considerada por Bohr em suas pesquisas relacionadas com as abscissas de convergência absoluta e uniforme de uma série de Dirichlet, e denominada como *Problema de Convergência Absoluta de Bohr*. Apresentamos as principais ferramentas utilizadas para a solução desse problema sendo uma delas o polinômio homogêneo de Bohnenblust e Hille visto no Capítulo 3. Para construção deste capítulo consultamos [4, 8, 9, 13].

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos alguns resultados que serão necessários no decorrer deste trabalho. Apresentamos na primeira seção, sem as demonstrações, os principais resultados sobre as aplicações multilineares entre espaços de Banach, com enfoque especial nas aplicações multilineares simétricas. Na segunda seção definimos polinômios m-homogêneos e, com as devidas demonstrações, exibimos os principais resultados. E por fim, na última seção veremos alguns resultados sobre séries de potências em termos de polinômios homogêneos.

1.1 Aplicações multilineares

As aplicações multilineares terão um papel importante no desenvolver da teoria dos polinômios homogêneos. Nesta seção apresentamos os resultados básicos referentes a essas aplicações e veremos quais as condições necessárias e suficientes para que uma aplicação multilinear seja contínua.

Definição 1.1. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_m, F$ espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma aplicação $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é dita *multilinear* (ou m-*linear*) se é linear em cada uma de suas variáveis, isto é,

$$A(x_1, \ldots, \lambda x_i + x_i', \ldots, x_m) = \lambda A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m) + A(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_m),$$

para todos $i = 1, \ldots, m$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x_i, x_i' \in E_i$.

Consideraremos nesta seção o caso particular das aplicações multilineares com

$$E_1 = \cdots = E_m = E.$$

Além disso, E e F representarão espaços de Banach. Admitiremos também que o espaço vetorial E^m sempre estará munido com a norma $\|(x_1 \ldots, x_m)\| := \sup\limits_{1 \leq j \leq m} \|x_j\|$.

Dados $a = (a_1, \ldots, a_m) \in E^m$ e $r = (r_1, \ldots, r_m)$ com $r_j > 0$, denotaremos por

$$B_{E^m}[a, r] := \{(x_1, \ldots, x_m) \in E^m : \|x_j - a_j\| \leq r_j, j = 1, \ldots, m\}$$

a bola fechada de E^m centrada em a e com raio r. Quando $a = (0, \ldots, 0)$ e $r = (1, \ldots, 1)$ escreveremos simplesmente $\overline{B}_{E^m} := B_{E^m}[a, r]$. Ressaltamos que é de fácil verificação que E^m é um espaço de Banach sempre que E for um espaço de Banach.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{L}_a(^mE; F)$ e $\mathcal{L}(^mE; F)$ os espaços vetoriais das aplicações multilineares e das aplicações multilineares contínuas $A : E^m \longrightarrow F$, respectivamente. Com o intuito de simplificar a notação, denotaremos

$$\mathcal{L}_a(^1E; F) = \mathcal{L}_a(E; F),\ \mathcal{L}(^1E; F) = \mathcal{L}(E; F),$$
$$\mathcal{L}_a(^mE; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_a(^mE),\ \mathcal{L}(^mE; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(^mE) \text{ e } \mathcal{L}(^1E) = E^*.$$

Para cada aplicação $A \in \mathcal{L}_a(^mE; F)$ definimos

$$\|A\| := \sup_{x \in B_{E^m}} \|A(x)\|.$$

Veremos adiante que essa expressão define uma norma em $\mathcal{L}(^mE; F)$.

O seguinte resultado apresenta uma caracterização das aplicações multilineares contínuas.

Proposição 1.2. *Para cada $A \in \mathcal{L}_a(^mE; F)$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *A é contínua;*

(ii) *A é contínua na origem;*

(iii) *Existe uma constante $M \geq 0$ tal que $\|A(x_1, \ldots, x_m)\| \leq M\|x_1\| \cdots \|x_m\|$ sempre que $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, m$;*

(iv) $\sup_{x \in B_{E^m}} \|A(x)\| < \infty$.

Demonstração. Veja [18, Proposição 2.7].

No que se refere à última proposição, lembre que no resultado análogo para operadores lineares tem-se que todo operador linear contínuo é uniformemente contínuo. No caso das aplicações multilineares ($m \geq 2$) este resultado não é válido, exceto para a aplicação nula. Com efeito, seja $A \in \mathcal{L}(^mE; F)$ não-nula, com $m \geq 2$. Então, existem $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ e $r > 0$ tais que $\|A(x_1, \ldots, x_m)\| > r > 0$. Em particular, x_i é não-nulo para cada i. Tomando $\varepsilon = r$, temos que para todo $\delta > 0$ podemos escolher $\lambda \in \mathbb{K}$ de modo que $0 < |\lambda| < \dfrac{\delta}{\|x_1\|}$. Donde,

$$\left\| \left(x_1 + \lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, \ldots, x_m \right) - \left(x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, \ldots, x_m \right) \right\| = \|\lambda x_1\| < \delta,$$

mas

$$\left\|A\left(x_1+\lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, \ldots, x_m\right) - A\left(x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, \ldots, x_m\right)\right\| = \left\|A\left(\lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, \ldots, x_m\right)\right\|$$
$$= \|A(x_1, \ldots, x_m)\| > r = \varepsilon.$$

Portanto, A não é uniformemente contínua.

Proposição 1.3. *A aplicação* $\|\cdot\| : \mathcal{L}(^mE; F) \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por*

$$\|A\| := \sup_{x \in B_{E^m}} \|A(x)\|,$$

é uma norma em $\mathcal{L}(^mE; F)$*. Além disso,* $(\mathcal{L}(^mE; F), \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [18, Proposição 2.11].

Teorema 1.4. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$*. A aplicação*

$$\Psi : \mathcal{L}_a(^{m+n}E; F) \longrightarrow \mathcal{L}_a(^mE; \mathcal{L}_a(^nE; F)),$$

dada por

$$\Psi(A)(x_1, \ldots, x_m)(y_1, \ldots, y_n) = A(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Além disso, esta aplicação induz um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(^{m+n}E; F)$ *e* $\mathcal{L}(^mE; \mathcal{L}(^nE; F))$*.*

Demonstração. Veja [18, Proposição 2.12]. ■

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por S_m o grupo de todas as permutações de m elementos. Isto é,

$$S_m = \{\sigma : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, m\} \mid \sigma \text{ é bijetora}\}.$$

Definição 1.5. Uma aplicação multilinear $A : E^m \longrightarrow F$ é dita ser *simétrica* se

$$A(x_1, \ldots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$$

para cada $\sigma \in S_m$ e cada $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, m$.

Denotaremos por $\mathcal{L}_a^s(^mE; F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{L}_a(^mE; F)$ formado por todas as aplicações multilineares simétricas. Analogamente, denotaremos por $\mathcal{L}^s(^mE; F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{L}(^mE; F)$ formado por todas as aplicações multilineares simétricas contínuas.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{L}_a(^mE; F)$. Para cada $x_j \in E$ com $j = 1, \ldots, n$ e cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| := |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| = m$, denotamos

$$Ax_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} = A(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1 vezes}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n vezes})$$

para todo $m \geq 1$.

Proposição 1.6. *Seja $A \in \mathcal{L}_a(^mE;F)$, considere $A^s \in \mathcal{L}_a^s(^mE;F)$ definida por*

$$A^s(x_1,\ldots,x_m) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)})$$

para cada $x_j \in E$ com $j = 1,\ldots,m$. A aplicação

$$\phi : \mathcal{L}_a(^mE;F) \longrightarrow \mathcal{L}_a^s(^mE;F) \ \ \textit{dada por} \ \ \phi(A) = A^s$$

é uma projeção. Além disso, esta projeção induz uma projeção contínua entre $\mathcal{L}(^mE;F)$ e $\mathcal{L}^s(^mE;F)$ de modo que $\|A^s\| \leq \|A\|$.

Demonstração. Veja [17, Proposição 3.2.2].

Teorema 1.7 (Fórmula de Leibniz)**.** *Seja $A \in \mathcal{L}_a^s(^mE;F)$. Para cada $x_j \in E$, com $j = 1,\ldots,m$, vale:*

$$A(x_1+\cdots+x_n)^m = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|=m}} \frac{m!}{\alpha!}Ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Demonstração. Veja [17, Teorema 3.2.5].

Corolário 1.8 (Fórmula Binomial)**.** *Seja $A \in \mathcal{L}_a^s(^mE,F)$. Então, para todos $x,y \in E$, temos*

$$A(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}Ax^{m-k}y^k.$$

Uma consequência da Fórmula de Leibniz é a Fórmula de Polarização apresentada no teorema a seguir. Através dela temos que uma aplicação multilinear simétrica é unicamente determinada por seus valores na diagonal. Este resultado tem grande importância no estudo dos polinômios homogêneos.

Teorema 1.9 (Fórmula de Polarização)**.** *Seja $A \in \mathcal{L}_a^s(^mE;F)$. Então,*

$$A(x_1,\ldots,x_m) = \frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m A(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m,$$

para quaisquer $x_0,\ldots,x_m \in E$.

Demonstração. Veja [17, Teorema 3.2.7].

1.2 Polinômios entre espaços normados

Nesta seção definimos os polinômios m-homogêneos a partir das aplicações multilineares e mostraremos como os espaços das aplicações multilineares simétricas e dos polinômios homogêneos estão relacionados.

Definição 1.10. Seja $m \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma aplicação $P : E \longrightarrow F$ é um *polinômio m-homogêneo* ou *polinômio homogêneo de grau m*, se existir uma aplicação $A \in \mathcal{L}_a(^mE; F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para cada $x \in E$.

Denotaremos por $\mathcal{P}_a(^mE; F)$ o conjunto formado por todos os polinômios m-homogêneos $P : E \longrightarrow F$. Note que $\mathcal{P}_a(^mE; F)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de aplicações. Por $\mathcal{P}(^mE; F)$ denotaremos o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_a(^mE; F)$ formado por todos os polinômios m-homogêneos contínuos. Quando $F = \mathbb{K}$, escreveremos

$$\mathcal{P}_a(^mE; F) = \mathcal{P}_a(^mE) \text{ e } \mathcal{P}(^mE; F) = \mathcal{P}(^mE).$$

Ademais, para cada $P \in \mathcal{P}_a(^mE; F)$ associamos o valor $\|P\| := \sup_{x \in B_E} \|P(x)\| \in [0, \infty]$. Veremos mais adiante que $P \in \mathcal{P}_a(^mE; F)$ é contínuo se e somente se $\|P\| < \infty$.

Teorema 1.11. *Para cada $A \in \mathcal{L}_a(^mE; F)$ considere a aplicação dada por*

$$\widehat{A} : E \longrightarrow F, \ \ \widehat{A}(x) := Ax^m.$$

Então a correspondência $A \longmapsto \widehat{A}$ induz um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\mathcal{L}_a^s(^mE; F)$ e $\mathcal{P}_a(^mE; F)$.

Demonstração. Claramente a aplicação $A \in \mathcal{L}_a^s(^mE; F) \mapsto \widehat{A} \in \mathcal{P}_a(^mE; F)$ está bem definida. Agora, vejamos que a aplicação é linear. Dados $A, B \in \mathcal{L}_a^s(^mE; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$(\widehat{A + \lambda B})(x) = (A + \lambda B)x^m = Ax^m + \lambda Bx^m = \widehat{A}(x) + \lambda\widehat{B}(x) = (\widehat{A} + \lambda\widehat{B})(x)$$

para todo $x \in E$. A aplicação $A \in \mathcal{L}_a^s(^mE; F) \mapsto \widehat{A} \in \mathcal{P}_a(^mE; F)$ é bijetora. Com efeito, provemos primeiro a sobrejetividade: Dado $P \in \mathcal{P}_a(^mE; F)$, considere a aplicação A^s como na Proposição 1.6 . Então, para cada $x \in E$,

$$\widehat{A^s}(x) = A^s x^m = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} Ax^m = Ax^m = P(x),$$

o que prova que a aplicação é sobrejetora. Para mostrar a injetividade considere $A \in \mathcal{L}_a^s(^mE; F)$ tal que $\widehat{A} = 0$. Ou seja, $Ax^m = 0$ para todo $x \in E$. Assim, pela Fórmula de Polarização,

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m = 0$$

para quaisquer $x_0, \ldots, x_m \in E$. Daí segue que $A = 0$ e portanto a aplicação é injetora.

■

O seguinte resultado é uma caracterização dos polinômios m-homogêneos contínuos.

Teorema 1.12. *Sejam $P \in \mathcal{P}_a(^mE;F)$ e $A \in \mathcal{L}_a^s(^mE;F)$ tais que $P = \widehat{A}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $A \in \mathcal{L}(^mE;F)$.

(ii) $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$.

(iii) *P é contínuo na origem.*

(iv) $\|P\| < \infty$.

(v) *Existe $k \geq 0$, tal que $\|P(x)\| \leq k\|x\|^m$ para todo $x \in E$.*

(vi) *P é limitado em toda bola $B_E[a,r] \subseteq E$.*

(vii) *P é limitado em alguma bola $B_E[a,r] \subseteq E$.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ são imediatas.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Se P é contínuo na origem, então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in B_E[0,\delta]$ implica $\|P(x)\| \leq \varepsilon$. Considere $\varepsilon = 1$ e $x \in E$ tal que $x \neq 0$. Se $\|x\| \leq 1$, então

$$\left\|\frac{\delta}{2}x\right\| < \delta \Longrightarrow \frac{\delta^m}{2^m}\|P(x)\| = \left\|P\left(\frac{\delta}{2}x\right)\right\| \leq 1.$$

Assim,

$$\sup_{x\in B_E} \|P(x)\| \leq \frac{2^m}{\delta^m} < \infty.$$

$(iv) \Rightarrow (v)$ A desigualdade é trivialmente satisfeita se $x = 0$. Por outro lado, para $x \in E\backslash\{0\}$, temos

$$\frac{1}{\|x\|^m}\|P(x)\| = \left\|P\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|P\| < \infty.$$

Daí, tomando $k = \|P\|$, obtemos $\|P(x)\| \leq k\|x\|^m$.
$(v) \Rightarrow (vi)$ Para todo $x \in B_E[a,r]$, temos $\|x\| \leq \|a\| + r$. Logo, por (iv) segue que

$$\|P(x)\| \leq k\|x\|^m \leq k(\|a\| + r)^m.$$

$(vi) \Rightarrow (vii)$ Imediato.
$(vii) \Rightarrow (i)$ Seja $B_E[a,r] \subset E$ tal que $\|P(x)\| \leq k$ para todo $x \in B_E[a,r]$. Pela Fórmula de Polarização, com $x_0 = a$ e $x_1,\ldots,x_m \in B_E\left[0,\frac{r}{m}\right]$, temos

$$\begin{aligned}
\|A(x_1,\ldots,x_m)\| &\leq \frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1} |\varepsilon_1|\cdots|\varepsilon_m|\|A(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m\| \\
&= \frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1} \|P(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)\| \\
&\leq \frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1} k = \frac{k}{m!}.
\end{aligned}$$

Logo, dados $x_1, \ldots, x_m \in E$ não nulos, obtemos

$$\left\| A\left(\frac{x_1 r}{\|x_1\| m}, \ldots, \frac{x_m r}{\|x_m\| m} \right) \right\| \leq \frac{k}{m!},$$

pois $\left\| \dfrac{x_i r}{\|x_i\| m} \right\| = \dfrac{r}{m}$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Daí, concluímos que

$$\|A(x_1, \ldots, x_m)\| \leq \frac{k m^m}{r^m m!} \|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

para todos $x_1, \ldots, x_m \in E$. Portanto, A é contínua.

$\blacksquare$

Teorema 1.13. *A aplicação*

$$\Phi : \mathcal{L}^s({}^m E; F) \longrightarrow \mathcal{P}({}^m E; F),$$

definida por $\Phi(A) = \widehat{A}$, *é um isomorfismo topológico. Além disso,*

$$\|\widehat{A}\| \leq \|A\| \leq \frac{m^m}{m!} \|\widehat{A}\|. \tag{1.1}$$

Demonstração. Note que Φ está bem definida. Com efeito, segue das Desigualdades (1.1) e da Proposição 1.2(iv) que $\|\widehat{A}\| \leq \|A\| < \infty$ sempre que $A \in \mathcal{L}^s({}^m E; F)$. Então, pela Proposição 1.12(iv), segue que $\widehat{A} \in \mathcal{P}({}^m E; F)$.

Pelo isomorfismo de espaços vetoriais do Teorema 1.11, resulta que a aplicação Φ é linear e injetora. Temos ainda que dado $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ existe $B \in \mathcal{L}_a^s({}^m E; F)$ tal que $\widehat{B} = P$. Como P é contínuo, segue que $\|P\| < \infty$. Desse modo, obtém-se do Teorema 1.11 que

$$\|B\| \leq \frac{m^m}{m!} \|\widehat{B}\| < \infty \Rightarrow \|B\| < \infty.$$

Ou seja, B é contínua e portanto Φ é sobrejetiva. Novamente, segue das Desigualdades (1.1) que Φ e Φ^{-1} são contínuas. Portanto a aplicação Φ é um isomorfismo topológico.

Por fim, provemos as desigualdades (1.1). Para cada $x \in E$, temos

$$\|\widehat{A}\| = \sup_{x \in B_E} \|\widehat{A}(x)\| = \sup_{x \in B_E} \|A x^m\| \leq \sup_{x_j \in B_E} \|A(x_1, \ldots, x_m)\| = \|A\|.$$

Logo, $\|\widehat{A}\| \leq \|A\|$. Falta verificar a veracidade da segunda desigualdade. Para isso, sejam $A \in \mathcal{L}_a^s({}^m E; F)$ e $x_1, \ldots, x_m \in B_E$. Então,

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \ldots, x_m)\| &\leq \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} |\varepsilon_1| \cdots |\varepsilon_m| \|A(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m\| \\ &= \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\widehat{A}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)\| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \|\widehat{A}\| \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m\|^m$$
$$\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \|\widehat{A}\| (\|x_1\| + \cdots + \|x_m\|)^m$$
$$\leq \frac{m^m}{m!} \|\widehat{A}\|,$$

onde a primeira desigualdade é devida à Fórmula de Polarização.

■

Exemplo 1.14. Considere E e F espaços normados, $\varphi \in E^*$, $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e $m \in \mathbb{N}$. Defina a aplicação

$$P : E \longrightarrow F \ \text{ por } \ P(x) = (\varphi(x))^{m-1} u(x).$$

Claramente P está bem definida. Agora, considere $A : E^m \longrightarrow F$ dada por

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \varphi(x_1)\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_{m-1}) u(x_m).$$

Como $\varphi \in E^*$ e $u \in \mathcal{L}(E; F)$, segue imediatamente que A é m-linear. Mas como

$$Ax^m = (\varphi(x))^{m-1} u(x) = P(x) \ \text{ para todo } \ x \in E,$$

concluímos pela definição de polinômios homogêneos que $P \in \mathcal{P}_a({}^m E; F)$. Verifiquemos que P é contínuo. Com efeito, temos

$$\begin{aligned}
\|P\| &= \sup_{x \in B_E} \|P(x)\| \\
&= \sup_{x \in B_E} \|(\varphi(x))^{m-1} u(x)\| \\
&= \sup_{x \in B_E} |\varphi(x)|^{m-1} \|u(x)\| \\
&\leq \sup_{x \in B_E} |\varphi(x)|^{m-1} \sup_{x \in B_E} \|u(x)\| \\
&= \|\varphi\|^{m-1} \|u\| < \infty,
\end{aligned}$$

e portanto segue do Teorema 1.12(iv) que $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$.

Proposição 1.15. *O par* $(\mathcal{P}({}^m E; F), \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que $(\mathcal{P}({}^m E; F), \|\cdot\|)$ é um espaço normado. Segue da Proposição 1.12(iv) que $\|P\| < \infty$ se e somente se $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$; logo, a função $\|\cdot\| : \mathcal{P}({}^m E; F) \to \mathbb{R}$ está bem definida. Supondo $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ e $\|P\| = 0$, obtemos

$$0 \leq \|P(x)\| \leq \|P\| \|x\|^m = 0 \ \text{ para todo } \ x \in E.$$

Isto implica que $\|P(x)\| = 0$ para todo $x \in E$ e portanto $P = 0$. Por outro lado, dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$, temos

$$\|\lambda P\| = \sup_{x \in B_E} \|\lambda P(x)\| = |\lambda| \sup_{x \in B_E} \|P(x)\| = |\lambda| \|P\|.$$

Se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(^mE; F)$, então

$$\begin{aligned} \|P_1 + P_2\| &= \sup_{x \in B_E} \|(P_1 + P_2)(x)\| \\ &= \sup_{x \in B_E} \|P_1(x) + P_2(x)\| \\ &\leq \sup_{x \in B_E} \|P_1(x)\| + \sup_{x \in B_E} \|P_2(x)\| \\ &= \|P_1\| + \|P_2\|. \end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{P}(^mE; F), \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

Resta mostrar que $(\mathcal{P}(^mE; F), \|\cdot\|)$ é completo. Pelo Teorema 1.13, $\mathcal{L}^s(^mE; F)$ é isomorfo topologicamente a $\mathcal{P}(^mE; F)$; desse modo, é suficiente provar que $(\mathcal{L}^s(^mE; F), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach. Para isso, veremos que $(\mathcal{L}^s(^mE; F), \|\cdot\|)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(^mE; F)$, o qual já sabemos ser um espaço de Banach devido à Proposição 1.3. Seja $A \in \overline{\mathcal{L}^s(^mE; F)}^{\|\cdot\|}$. Então, existe uma sequência $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}^s(^mE; F)$ tal que $\lim_{n \to \infty} \|A_n - A\| = 0$. Além disso, para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$, tem-se

$$\begin{aligned} \|A_n(x_1, \ldots, x_m) - A(x_1, \ldots, x_m)\| &= \|(A_n - A)(x_1, \ldots, x_m)\| \\ &\leq \|A_n - A\| \|x_1\| \ldots \|x_m\|. \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n \to \infty} A_n(x_1, \ldots, x_m) = A(x_1, \ldots, x_m)$$

para todo $x_j \in E, j = 1, \ldots, m$. Como $A_n \in \mathcal{L}^s(^mE; F)$, segue que

$$\begin{aligned} A(x_1, \ldots, x_m) &= \lim_{n \to \infty} A_n(x_1, \ldots, x_m) \\ &= \lim_{n \to \infty} A_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) \\ &= A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) \end{aligned}$$

sempre que $\sigma \in S_m$ e $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$. Isto mostra que $A \in \mathcal{L}^s(^mE; F)$ e portanto $\mathcal{L}^s(^mE; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(^mE; F)$, com queríamos.

■

1.3 Séries de potências

Nesta seção apresentamos brevemente alguns resultados sobre séries de potências em termos de polinômios homogêneos, que serão necessários no decorrer dessa dissertação.

Definição 1.16. Uma *série de potências* de E em F em torno de $a \in E$ é uma série de aplicações da forma $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$, onde para cada $m \in \mathbb{N}_0$, $P_m \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Definimos o *raio de convergência uniforme* de uma série de potências por

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a) \text{ converge uniformemente em } B[a;r] \right\}.$$

Note que na última definição podemos escrever

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x-a)^m,$$

onde A_m é a única aplicação multilinear simétrica em $\mathcal{L}_a^s(^mE;F)$ que satisfaz $\widehat{A}_m = P_m$.

O próximo resultado estabelece uma forma para se calcular o raio de convergência uniforme de uma série de potências em espaços normados.

Teorema 1.17 (Cauchy-Hadamard)**.** *Seja R o raio de convergência da série de potências $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$. Então:*

(i) $\frac{1}{R} = \limsup_{m\to\infty} \|P_m\|^{\frac{1}{m}}$.

(ii) *A série converge absolutamente e uniformemente em $B[a,r]$ sempre que $0 \leq r < R$.*

Demonstração. Veja [14, Theorem 4.3].

O próximo lema nos auxiliará na verificação de que se duas séries de potências coincidem num aberto, elas são iguais. Mais especificamente, os polinômios homogêneos que determinam as séries (veja Definição 1.16) serão os mesmos.

Lema 1.18. *Seja $(c_m)_{m=0}^{\infty}$ uma sequência em F. Se existe $r > 0$ tal que $\sum_{m=0}^{\infty} c_m\lambda^m = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq r$, então $c_m = 0$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre m. Primeiro, note que ao tomarmos $\lambda = 0$, obtemos imediatamente $c_0 = 0$. Suponha agora que $c_0 = \cdots = c_m = 0$. Para completar a prova por indução, devemos mostrar que $c_{m+1} = 0$. Ora, como a série $\sum_{m=0}^{\infty} c_m r^m$ é convergente, existe $C > 0$ tal que $\|c_m\|r^m \leq C$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por outro lado, segue de $c_0 = \cdots = c_m = 0$ que

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\lambda^j = \sum_{j=m+1}^{\infty} c_j\lambda^j = c_{m+1}\lambda^{m+1} + \sum_{j=m+2}^{\infty} c_j\lambda^j$$

para $0 < |\lambda| \leq r$. Donde,

$$c_{m+1} = -\frac{1}{\lambda^{m+1}} \sum_{j=m+2}^{\infty} c_j \lambda^j = -\sum_{j=m+2}^{\infty} c_j \lambda^{j-m-1}.$$

Assim, para $0 < |\lambda| \leq \frac{r}{2}$, temos

$$\begin{aligned}
\|c_{m+1}\| &\leq \sum_{j=m+2}^{\infty} \|c_j \lambda^{j-m-1}\| \\
&= \sum_{j=m+2}^{\infty} \|c_j\| \, |\lambda| \, |\lambda|^{j-m-2} \\
&\leq |\lambda| \sum_{j=m+2}^{\infty} \frac{C}{r^j} \left(\frac{r}{2}\right)^{j-m-2} \\
&= |\lambda| \, C \, r^{-m-2} \sum_{j=m+2}^{\infty} \frac{1}{2^{j-m-2}} \\
&= 2 \, |\lambda| \, C \, r^{-m-2}.
\end{aligned}$$

Fazendo $|\lambda| \to 0$, obtemos $\|c_{m+1}\| = 0$ e isso encerra a prova.

■

Teorema 1.19. *Seja* $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$ *uma série de potências de* E *em* F*. Se existe* $r > 0$ *tal que* $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a) = 0$ *para todo* $x \in B(a,r)$*, então* $P_m = 0$ *para todo* $m \in \mathbb{N}_0$*.*

Demonstração. Se $x \in B(a,r)$, podemos escrever $x = a + \lambda y$, onde $y \in B(0,1)$ e $|\lambda| < r$. Desse modo, para cada $y \in B(0,1)$ e cada $|\lambda| < r$, tem-se

$$0 = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\lambda y) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m P_m(y).$$

Segue do Lema 1.18 que $P_m(y) = 0$ para quaisquer $m \in \mathbb{N}_0$ e $y \in B(0,1)$. Como P_m é um polinômio homogêneo que se anula em $B(0,1)$, segue que $P_m = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

■

CAPÍTULO 2

FUNÇÕES HOLOMORFAS

Neste capítulo estamos interessados no estudo das funções holomorfas definidas em espaços normados E e que assumem valores em $\mathbb{C}$. Em um primeiro momento nos concentraremos no caso particular em que $E = \mathbb{C}^N$. Veremos que a Fórmula integral de Cauchy se generaliza neste caso e, como consequência, teremos que toda função holomorfa definida no polidisco é analítica em 0. Em seguida trataremos o caso mais geral em que E é um espaço normado de dimensão finita ou infinita. Neste contexto, estudamos a relação entre os conceitos de funções holomorfas (i.e., funções Fréchet diferenciáveis), funções representadas por séries de Taylor e funções G-holomorfas. Também, veremos que toda função holomorfa na bola unitária aberta de c_0 pode ser representada por uma série de monômios em todo ponto $z \in B_{c_{00}}$.

2.1 Funções holomorfas em $\mathbb{C}^N$

É sabido dos cursos introdutórios de análise complexa que uma função de uma variável complexa é holomorfa (veja Definição 2.1) se e somente se é analítica, i.e., pode ser representada localmente como uma série infinita de monômios de uma variável. Nesta seção, objetiva-se mostrar que este resultado é válido para funções de finitas variáveis complexas. Mais especificamente, para evitar tecnicalidades excessivas, analisaremos apenas a holomorfia e a analiticidade de funções cujos domínios são polidiscos.

Iniciamos a seção com o conceito de holomorfia para funções de finitas variáveis complexas.

Definição 2.1. Seja $U \subset \mathbb{C}^N$ um conjunto aberto. Dizemos que uma aplicação $f : U \to \mathbb{C}$ é *holomorfa (ou Fréchet diferenciável)* se, para cada $a \in U$, existir um vetor $\nabla f(a) \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \langle \nabla f(a), h \rangle}{\|h\|} = 0, \tag{2.1}$$

onde $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{N} x_j \, y_j$ para $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ e $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{C}^N$.

Estabeleceremos nos próximos resultados algumas propriedades referentes à uma família somável em $\mathbb{C}$. Mais especificamente, veremos que se tivermos uma família somável, podemos trabalhar com séries múltiplas sem grandes transtornos. Além disso, o conceito de família somável trará sentido para a definição de somatórios indexados em uma família enumerável de índices. Primeiro, vejamos a definição de família somável.

Definição 2.2. Seja $(z_i)_{i\in I}$ uma família de números complexos, onde I é um conjunto de índices enumerável. Dizemos que $(z_i)_{i\in I}$ é *somável*, e possui soma $z \in \mathbb{C}$, se para cada $\varepsilon > 0$ existir um conjunto finito $F_\varepsilon \subset I$ tal que para todo subconjunto finito $F \subset I$ com $F \supset F_\varepsilon$, tem-se

$$\left|\sum_{i\in F} z_i - z\right| < \varepsilon.$$

Neste caso, denotamos $\displaystyle\sum_{i\in I} z_i := z$.

Teorema 2.3. *Seja $(z_i)_{i\in I}$ uma família de números complexos, onde I é enumerável e infinito. Então a família é somável se, e somente se, o conjunto*

$$A := \left\{\sum_{j\in J} |z_j| : \ J \text{ é um subconjunto finito de } I\right\} \subset [0,\infty) \tag{2.2}$$

é limitado. Além disso, temos

$$\sum_{i\in I} |z_i| = \sup A.$$

Demonstração. Veja [15, Teorema 1.6]. ■

Corolário 2.4. *Seja $(z_i)_{i\in I}$ uma família de números complexos. Se $(z_i)_{i\in I}$ é somável e $J \subset I$, então a família $(z_j)_{j\in J}$ é somável.*

Demonstração. Visto que a família $(z_i)_{i\in I}$ é somável, ela deve satisfazer a propriedade (2.2). Daí e de $J \subset I$, concluímos que $(z_j)_{j\in J}$ também goza da propriedade (2.2) e portanto é somável. ■

Teorema 2.5. *Se $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ é somável, então*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} a_\alpha = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_N=0}^{\infty} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N},$$

onde $\alpha := (\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ e $a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N} := a_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)}$.

Demonstração. Suponha A um conjunto como em (2.2), com $I := \mathbb{N}_0^N$ e $z_i := a_\alpha$. Seja $\varepsilon > 0$ escolhido arbitrariamente. Visto que a família $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ é somável, segue do Teorema 2.3 que existe um conjunto finito $M \subset \mathbb{N}_0^N$ tal que

$$\sup A - \varepsilon < \sum_{\alpha\in M} |a_\alpha| \le \sup A < \infty,$$

onde $\sup A = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |a_\alpha|$. Donde,

$$\sum_{\alpha \notin M} |a_\alpha| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |a_\alpha| - \sum_{\alpha \in M} |a_\alpha| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Note que as desigualdades em (2.3) continuam válidas para qualquer subconjunto finito L de $\mathbb{N}_0^N$ tal que $L \supset M$. Considere o conjunto M representado da seguinte forma:

$$M = \{(\ell_{11}, \ell_{12}, \ldots, \ell_{1N}), (\ell_{21}, \ell_{22}, \ldots, \ell_{2N}), \ldots, (\ell_{m1}, \ell_{m2}, \ldots, \ell_{mN})\}.$$

Note que se $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{N}$ são tais que

$$v_1 \geq u_1 := \max\{\ell_{11}, \ldots, \ell_{m1}\}, \ldots, v_N \geq u_N := \max\{\ell_{1N}, \ldots, \ell_{mN}\},$$

então

$$J = I_{v_1} \times \cdots \times I_{v_N} \supset M, \tag{2.4}$$

onde $I_j = \{0, 1, \ldots, j\}$, com $j \geq 0$. Como $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ é somável, para cada bijeção $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0^N$, tem-se

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_\alpha = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)}.$$

Portanto, fixada uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0^N$, segue de (2.3) e (2.4) que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_\alpha - \sum_{\alpha_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{\alpha_N=0}^{k_N} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N} \right| &= \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{\alpha_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{\alpha_N=0}^{k_N} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N} \right| \\ &\leq \sum_{\alpha \notin J} |a_\alpha| < \varepsilon \end{aligned} \tag{2.5}$$

para quaisquer números naturais $k_1 \geq u_1, \ldots, k_N \geq u_N$. Pelo Corolário 2.4, podemos facilmente concluir que a família $(a_{\alpha_1, \ldots, \gamma, \ldots, \alpha_N})_{\gamma \in \mathbb{N}_0}$ é somável sempre que $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ com $j \neq i$. Ou seja, a série $\sum_{\gamma=0}^{\infty} a_{\alpha_1, \ldots, \gamma, \ldots, \alpha_N}$ converge sempre que $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ com $j \neq i$. Daí e de (2.5), podemos fazer $k_N \to \infty$ e chegamos na desigualdade

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_\alpha - \sum_{\alpha_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{\alpha_{N-1}=0}^{k_{N-1}} \sum_{\alpha_N=0}^{\infty} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N} \right| \leq \varepsilon.$$

Por igual razão, podemos agora fazer $k_{N-1} \to \infty$, obtendo

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_\alpha - \sum_{\alpha_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{\alpha_{N-2}=0}^{k_{N-2}} \sum_{\alpha_{N-1}=0}^{\infty} \sum_{\alpha_N=0}^{\infty} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N} \right| \leq \varepsilon.$$

Continuando com este processo, concluímos que

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_\alpha - \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_N=0}^{\infty} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N} \right| \leq \varepsilon.$$

Isto mostra que

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_\alpha = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_N=0}^{\infty} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N},$$

como queríamos. ■

Fixaremos agora algumas notações que serão úteis no decorrer da dissertação. Dados $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ e $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N)$ com $r_j > 0$ para cada j, denotamos por

$$\mathbb{D}^N(a, \mathbf{r}) = \{z = (z_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N : |z_j - a_j| < r_j, \;\; j = 1, \ldots, N\} \text{ e}$$
$$\overline{\mathbb{D}^N(a, \mathbf{r})} = \{z = (z_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N : |z_j - a_j| \leq r_j, j = 1, \ldots, N\}$$

os polidiscos aberto e fechado de centro a e poliraio $\mathbf{r}$, respectivamente. Por simplicidade de notação, quando $a = (0, \ldots, 0)$ e $\mathbf{r} = (1, \ldots, 1)$, escrevemos

$$\mathbb{D}^N := \mathbb{D}^N(a, \mathbf{r}) \text{ e } \overline{\mathbb{D}^N} := \overline{\mathbb{D}^N(a, \mathbf{r})}.$$

Além disso, quando $a = (0, \ldots, 0)$ e $\mathbf{r}$ qualquer, denotamos

$$\mathbf{r}\mathbb{D}^N := \mathbb{D}^N(a, \mathbf{r}) \text{ e } \mathbf{r}\overline{\mathbb{D}^N} := \overline{\mathbb{D}^N(a, \mathbf{r})}$$

e, por fim, se $a = (0, \ldots, 0)$ e $r = r_1 = \cdots = r_N$, escreveremos

$$r\mathbb{D}^N := \mathbb{D}^N(a, r) \text{ e } r\overline{\mathbb{D}^N} := \overline{\mathbb{D}^N(a, r)}.$$

Da teoria de funções analíticas de uma variável complexa, tem-se a Fórmula Integral de Cauchy para derivadas:

Proposição 2.6 (Fórmula Integral de Cauchy para derivadas)**.** *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto. Considere $a \in U$ e $r > 0$ tais que $\overline{\mathbb{D}(a, r)} \subset U$. Então para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e cada $z \in \mathbb{D}(a, r)$, temos*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

onde $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Em particular, consideramos $f^{(0)} = f$.

Demonstração. Veja [19, Corolário 2.7]. ■

O próximo resultado mostra que a Fórmula Integral de Cauchy de uma variável complexa generaliza-se (via um processo indutivo) no contexto de funções holomorfas de finitas variáveis.

Teorema 2.7 (Fórmula Integral de Cauchy para polidiscos)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{C}^N$ um aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $\mathbb{D}^N(a, \mathbf{r})$ é um polidisco cujo fecho está contido em U, então para cada $z \in \mathbb{D}^N(a, \mathbf{r})$, tem-se*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_N - a_N| = r_N} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_N - z_N)} d\zeta_N \cdots d\zeta_1 \tag{2.6}$$

Demonstração. Faremos a prova por indução em N. No caso $N = 1$ temos a fórmula integral de Cauchy para uma váriavel complexa. Agora, suponhamos por hipótese de indução que (2.6) seja verdadeira para $N - 1$. Mostraremos que a fórmula continua válida para N. Com efeito, para cada $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{D}^N(a, \mathbf{r})$, considere o conjunto

$$U_z = \{\zeta \in \mathbb{C} : (z_1, \ldots, z_{N-1}, \zeta) \in U\}.$$

Note que U_z é um aberto de $\mathbb{C}$ pois a função $h : \zeta \in \mathbb{C} \mapsto (z_1, \ldots, z_{N-1}, \zeta) \in \mathbb{C}^N$ é contínua e $U_z = h^{-1}(U)$. Definamos a função $g : U_z \longrightarrow \mathbb{C}$ por $g(\zeta) = f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta)$. Como f e h são Fréchet diferenciáveis, segue que $g = f \circ h : U_z \to \mathbb{C}$ é Fréchet diferenciável. Note que $\overline{\mathbb{D}(a_N, r_n)} \subset U_z$ e portanto existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{D}(a_N, r_N + \delta) \subset U_z$. Assim, aplicando a fórmula integral de Cauchy para uma variável complexa (Teorema 2.6) sobre $\mathbb{D}(a_N, r_N + \delta)$, obtemos

$$g(z_N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a_N| = r_N} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_N} d\zeta, \;\; z_N \in \mathbb{D}(a_N, r_N + \delta). \tag{2.7}$$

Fixe $\zeta_N \in \partial\mathbb{D}(a_N, r_N)$. Visto que a aplicação

$$(z_1, \ldots, z_{N-1}) \in \mathbb{D}(a_1, r_1) \times \cdots \times \mathbb{D}(a_{N-1}, r_{N-1}) \mapsto f(z_1, \ldots, z_{N-1}, \zeta_N) \in \mathbb{C}$$

é Fréchet diferenciável (pois é composta de Fréchet diferenciáveis), segue da hipótese de indução que

$$f(z_1, \ldots, z_{N-1}, \zeta_N) = \frac{1}{(2\pi i)^{N-1}} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_{N-1} - a_{N-1}| = r_{N-1}} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{N-1}, \zeta_N)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_{N-1} - z_{N-1})} d\zeta_{N-1} \cdots d\zeta_1 \tag{2.8}$$

sempre que $(z_1, \ldots, z_{N-1}) \in \mathbb{D}(a_1, r_1) \times \cdots \times \mathbb{D}(a_{N-1}, r_{N-1})$. Substituindo (2.8) em (2.7) com $\zeta = \zeta_N$, obtemos

$$f(z_1, \ldots, z_N) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_N - a_N| = r_N} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_N - z_N)} d\zeta_N \cdots d\zeta_1,$$

como queríamos.

■

Vejamos agora um lema simples mas que será importante na demonstração de que toda função holomorfa de finitas variáveis é também analítica em zero. Mas antes, precisamos de uma definição.

Definição 2.8. Seja $U \subset \mathbb{D}^N$ um aberto. Dizemos que uma sequência de funções $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente nas partes compactas de* U se as seguintes condições são satisfeitas:

(a) Para cada compacto $K \subset U$, existe $n_0 \geq 0$ tal que se $n \geq n_0$, então o domínio de f_n contém K.

(b) A sequência de restrições $(f_n|_K)_{n=1}^{\infty}$ é uniformemente convergente.

Ademais, denotaremos por $f_n \overset{u.p.c}{\longrightarrow} f$ se a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergir uniformemente para f nas partes compactas de U.

Lema 2.9. *Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente nas partes compactas de $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$ para uma função $f : \mathbf{r}\mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}$. Se $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbf{r}\mathbb{D}^N$, $j = 1, \ldots, N$, são caminhos de classe C^1 por partes, então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_N} f_n(z_1, \ldots, z_N) dz_N \cdots dz_1 = \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_N} f(z_1, \ldots, z_N) dz_N \cdots dz_1.$$

Demonstração. Como γ_j é contínua para cada $j = 1, \ldots, N$, o conjunto $\gamma_j([0,1]) \subset \mathbf{r}\mathbb{D}$ deve ser compacto sempre que $j = 1, \ldots, N$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, segue de $f_n \overset{u.p.c}{\longrightarrow} f$ que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma_1) \ldots \ell(\gamma_N)} \tag{2.9}$$

para todo $n > n_0$, onde $A := \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j([0,1])$ e $\ell(\gamma_j)$ denota o comprimento da curva γ_j. Desse modo, denotando $z := (z_1, \ldots, z_N)$ e $dz := dz_N \cdots dz_1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_N} f_n(z) dz - \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_N} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_N} f_n(z) - f(z) dz \right| \\
&\leq \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_N} |f_n(z) - f(z)| dz \\
&\leq \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_N} \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma_1) \cdots \ell(\gamma_N)} dz \\
&= \ell(\gamma_1) \cdots \ell(\gamma_N) \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma_1) \cdots \ell(\gamma_N)} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $n > n_0$. Isto completa a demonstração.

■

O próximo teorema é um resultado de análise complexa de várias variáveis complexas, o qual enunciaremos sem uma demonstração.

Teorema 2.10. *Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções holomorfas em $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$ que converge uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$ para $f : \mathbf{r}\mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}$. Então f é holomorfa.*

Demonstração. Veja [8, Theorem 2.4]. ■

Observação 2.11. Dados $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$, escrevemos $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_N^{\alpha_N}$. Considere $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ uma família de números complexos. Note que $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ é somável se, e somente se, $z \in \mathbb{D}^N$. Com efeito, se $z \in \mathbb{D}^N$ temos

$$\sum_{\alpha \in \{0,1,\dots,M\}^N} |z|^\alpha = \left(\sum_{k=0}^{M} |z_1|^k \right) \cdots \left(\sum_{k=0}^{M} |z_N|^k \right) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1 - |z_n|^{M+1}}{1 - |z_n|}$$

para cada M fixo. Mas como cada conjunto finito em $\mathbb{N}_0^N$ está contido em $\{0, 1, \dots, M\}^N$ para algum M, segue do Teorema 2.3 que $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ é somável, e neste caso

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |z|^\alpha = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - |z_n|}. \tag{2.10}$$

Definição 2.12. Seja $U \subset \mathbb{C}^N$ um subconjunto aberto. Dizemos que uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica em $a \in U$ se existem um poliraio $\mathbf{r}$ e uma família de coeficientes $(b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ de modo que

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} b_\alpha (z - a)^\alpha \tag{2.11}$$

para todo $z \in a + \mathbf{r}\mathbb{D}^N \subset U$.

Observação 2.13. Quando escrevermos a série (2.11), estaremos sempre pensando que a convergência é absoluta em cada ponto $z \in a + \mathbf{r}\mathbb{D}^N \subset U$. Em particular, a família $(b_\alpha (z - a)^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ é somável (Definição 2.3). Além disso, apesar da definição de analiticidade ser exibida para qualquer $a \in U$, investigaremos apenas o conceito para funções analíticas em zero.

Definição 2.14. Sejam $U \subset \mathbb{C}^N$ um aberto e

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} b_\alpha \, z^\alpha,$$

onde $(b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ são escalares complexos e a série converge absolutamente em cada ponto $z \in U$, i.e., $(b_\alpha \, z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ é somável. Nestas condições, diremos que a série *converge uniformemente* para f em um subconjunto $A \subset U$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um subconjunto finito $F_\varepsilon \subset \mathbb{N}_0^N$ tal que para todo subconjunto finito $F \subset \mathbb{N}_0^N$ com $F \supset F_\varepsilon$, tivermos

$$\left| f(z) - \sum_{\alpha \in F} b_\alpha \, z^\alpha \right| < \varepsilon \text{ para todo } z \in A.$$

Lema 2.15. *Sejam $U \subset \mathbb{C}^N$ um aberto e*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} b_\alpha \, z^\alpha, \tag{2.12}$$

onde $(b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ são escalares complexos e a série converge absolutamente em cada ponto $z \in U$. Então a série (2.12) convergirá uniformemente em $A \subset U$, se existir uma família somável $(r_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \subset (0, \infty)$ satisfazendo $|b_\alpha \, z^\alpha| \leq r_\alpha$ para todos $z \in A$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado arbitrário. Como $(r_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ é somável, existe um conjunto finito $F_\varepsilon \subset \mathbb{N}_0^N$ tal que

$$\sum_{\alpha\notin F_\varepsilon} r_\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} r_\alpha - \sum_{\alpha\in F_\varepsilon} r_\alpha < \varepsilon. \tag{2.13}$$

Donde, se $F \subset \mathbb{N}_0^N$ é finito e $F \supset F_\varepsilon$, então para cada $z \in A$, tem-se

$$\begin{aligned}\left| f(z) - \sum_{\alpha\in F} b_\alpha\, z^\alpha \right| &= \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} b_\alpha\, z^\alpha - \sum_{\alpha\in F} b_\alpha\, z^\alpha \right| \overset{(*)}{=} \left| \sum_{\alpha\notin F} b_\alpha\, z^\alpha \right| \\ &\leq \sum_{\alpha\notin F} |b_\alpha\, z^\alpha| \leq \sum_{\alpha\notin F_\varepsilon} |b_\alpha\, z^\alpha| \leq \sum_{\alpha\notin F_\varepsilon} r_\alpha < \varepsilon,\end{aligned}$$

onde $(*)$ segue do fato da série ser incondicionalmente convergente no ponto $z \in A \subset \mathbb{C}$ por ser absolutamente convergente. Isto completa a prova. ■

Observação 2.16. Segue da Observação 2.11 que a família $(z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ é somável para todo $z \in \mathbb{D}^N$ e, além disso, vale (2.10) para todo $z \in \mathbb{D}^N$. Afirmamos que a série (2.10) também converge uniformemente em $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$ sempre que $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N) \in (0,1)^N$. Com efeito, novamente pela Observação 2.11, obtemos que a família $(\mathbf{r}^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ é somável. Mas como $|z^\alpha| \leq \mathbf{r}^\alpha$ para todos $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ e $z \in \mathbf{r}\mathbb{D}^N$, segue do Lema 2.15 o desejado.

Finalmente, vejamos que uma função de finitas variáveis complexas (definida no polidisco) é holomorfa se e somente se é analítica em zero.

Teorema 2.17. *Sejam* $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N)$ *com* $0 < r_j < \infty$ *e* $f : \mathbf{r}\mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}$.

(i) *Se f é holomorfa, então f é analítica em 0. Com efeito, existe uma única família de coeficientes complexos* $(c_\alpha(f))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ *tal que para cada* $z \in \mathbf{r}\mathbb{D}^N$

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f) z^\alpha, \tag{2.14}$$

com convergência absoluta para cada $z \in \mathbf{r}\mathbb{D}^N$. *Ademais, a série (2.14) converge uniformemente sobre os subconjuntos compactos de* $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$, *e vale a fórmula integral de Cauchy*

$$c_\alpha(f) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_N^{\alpha_N+1}} d\zeta_N \cdots d\zeta_1 \tag{2.15}$$

para $0 < \rho_j < r_j$, $j = 1, \ldots, N$.

(ii) *Nas condições do item* (i), *valem a desigualdade de Cauchy*

$$|c_\alpha(f)|\rho^\alpha \leq \sup_{z\in\rho\mathbb{D}^N} |f(z)| \tag{2.16}$$

e

$$c_\alpha(f) = \frac{(\partial^\alpha f)(0)}{\alpha!}, \tag{2.17}$$

onde para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$, $|\alpha| \geq 1$, *denotamos*

$$(\partial^\alpha f)(0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(0)}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_N^{\alpha_N}}.$$

(iii) *Se* f *é analítica em* 0*, então* f *é holomorfa.*

Demonstração. (i) Sejam f uma função holomorfa em $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$ e $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N)$ tal que $0 < \rho_j < r_j$ para $j = 1, \ldots, N$. Pelo Teorema 2.7, para cada $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \rho\mathbb{D}^N$, tem-se

$$f(z_1, \ldots, z_N) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_N - z_N)} d\zeta_N \cdots d\zeta_1.$$

Seja $\Gamma := \{z_j : |z_j| < \rho_j\} \times \{\zeta_j : |\zeta_j| = \rho_j\}$. Note que para cada $(z_j, \zeta_j) \in \Gamma$ vale

$$\frac{1}{\zeta_j - z_j} = \frac{1}{\zeta_j} \frac{1}{1 - \left(\frac{z_j}{\zeta_j}\right)}.$$

Mas como

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z_j}{\zeta_j}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_j}{\zeta_j}\right)^k,$$

obtemos

$$\frac{1}{\zeta_j - z_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_j^k}{\zeta_j^{k+1}},$$

sendo que convergência é absoluta e uniforme em qualquer subconjunto compacto de Γ. Logo, pelo Lema 2.9, temos

$$f(z) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_N=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^N} \left(\int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)}{\zeta_1^{k_1+1} \cdots \zeta_N^{k_N+1}} d\zeta_N \cdots d\zeta_1 \right) z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N} \tag{2.18}$$

Para cada $\alpha = (k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{N}_0^N$, definimos

$$c_\alpha(f) := \frac{1}{(2\pi i)^N} \left(\int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)}{\zeta_1^{k_1+1} \cdots \zeta_N^{k_N+1}} d\zeta_N \cdots d\zeta_1 \right). \tag{2.19}$$

Note que podemos aplicar N vezes o Teorema 1.18 em (2.18) e concluir que $c_\alpha(f)$ não depende da escolha de ρ (aplique o teorema supondo z_1 variável, depois suponha z_2 variável, e assim por diante).

Vejamos agora que $\sum_\alpha c_\alpha(f) z^\alpha$ converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$. De fato, seja $K \subset \mathbf{r}\mathbb{D}^N$ um compacto, como $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(1+\varepsilon)K \subset \mathbf{r}\mathbb{D}^N$. Considere $z = (z(1), \ldots, z(N)) \in K$ e defina

$$s_j(z) = (1+\varepsilon)|z(j)| \quad \text{e} \quad s(z) = (s_1(z), \ldots, s_N(z)).$$

Note que para cada $z \in K$, temos $z \in s(z)\mathbb{D}^N$. Desse modo, $K \subset \bigcup_{z \in K} s(z)\mathbb{D}^N$ é uma cobertura aberta de K. Como toda cobertura aberta de um conjunto compacto admite uma subcobertura finita, podemos encontrar $z_1, \ldots, z_n \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} s(z_k)\mathbb{D}^N$. Desse modo, para se verificar a convergência sobre subconjuntos compactos de $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$, é suficiente mostrar a convergência em subconjuntos compactos de $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$ da forma $\overline{\mathbf{s}\mathbb{D}^N} = \mathbf{s}\overline{\mathbb{D}^N}$, onde $0 < s_j < r_j$, para todo $j = 1, \ldots, N$.

Fixe $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_N) \in \mathbb{C}^N$ tal que $0 < s_j < r_j$, $j = 1, \ldots, N$. Como $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$ é aberto, existe $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_N) \in \mathbf{r}\mathbb{D}^N$ tal que $s_j < t_j$ para todo $j = 1, \ldots, N$. Além disso, visto que $c_\alpha(f)$ não depende da escolha de ρ, segue que para cada $\alpha = (k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{N}_0^N$ e cada $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_N) \in \mathbf{r}\mathbb{D}^N$, com $s_j < t_j$, temos

$$
\begin{aligned}
|c_\alpha(f)| &= \left| \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=t_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=t_N} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)}{\zeta_1^{k_1+1} \cdots \zeta_N^{k_N+1}} \, d\zeta_N \cdots d\zeta_1 \right| \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{|\zeta_1|=t_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=t_N} \sup_{z \in \mathbf{t}\overline{\mathbb{D}^N}} |f(z)| \, \frac{1}{t_1^{k_1+1} \cdots t_N^{k_N+1}} \, d\zeta_N \cdots d\zeta_1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{|\zeta_1|=t_1} \cdots \int_{|\zeta_{N-1}|=t_{N-1}} \sup_{z \in \mathbf{t}\overline{\mathbb{D}^N}} |f(z)| \, \frac{1}{t_1^{k_1+1} \cdots t_N^{k_N+1}} \int_0^{2\pi} |t_N i e^{i\theta_N}| \, d\theta_N \cdots d\zeta_1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{|\zeta_1|=t_1} \cdots \int_{|\zeta_{N-1}|=t_{N-1}} \sup_{z \in \mathbf{t}\overline{\mathbb{D}^N}} |f(z)| \, \frac{2\pi}{t_1^{k_1+1} \cdots t_N^{k_N}} \, d\zeta_{N-1} \cdots d\zeta_1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{|\zeta_1|=t_1} \cdots \int_{|\zeta_{N-2}|=t_{N-2}} \sup_{z \in \mathbf{t}\overline{\mathbb{D}^N}} |f(z)| \, \frac{2\pi}{t_1^{k_1+1} \cdots t_N^{k_N}} \int_0^{2\pi} |t_{N-1} i e^{i\theta_{N-1}}| \, d\theta_{N-1} d\zeta_1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{|\zeta_1|=t_1} \cdots \int_{|\zeta_{N-2}|=t_{N-2}} \sup_{z \in \mathbf{t}\overline{\mathbb{D}^N}} |f(z)| \, \frac{(2\pi)^2}{t_1^{k_1+1} \cdots t_{N-1}^{k_{N-1}} t_N^{k_N}} \, d\zeta_{N-2} \cdots d\zeta_1 \\
&\ \ \vdots \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \sup_{z \in \mathbf{t}\overline{\mathbb{D}^N}} |f(z)| \, \frac{(2\pi)^N}{t_1^{k_1} \cdots t_N^{k_N}} \\
&= \frac{1}{\mathbf{t}^\alpha} \sup_{z \in \mathbf{t}\overline{\mathbb{D}^N}} |f(z)|.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
|c_\alpha(f)| \leq \frac{1}{\mathbf{t}^\alpha} \sup_{z \in \mathbf{t}\overline{\mathbb{D}^N}} |f(z)| \tag{2.20}
$$

sempre que $\alpha = (k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{N}_0^N$ e $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_N) \in \mathbf{r}\mathbb{D}^N$ com $s_j < t_j < r_j$. Donde,

$$|c_\alpha(f)|\mathbf{s}^\alpha \leq \frac{\mathbf{s}^\alpha}{\mathbf{t}^\alpha} \sup_{z \in \mathbf{t}\overline{\mathbb{D}^N}} |f(z)|$$

para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Como a série $\sum_\alpha \frac{\mathbf{s}^\alpha}{\mathbf{t}^\alpha}$ converge absolutamente (Observação 2.11), segue da Observação 2.16 que a série $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f) z^\alpha$ converge uniformemente e absolutamente em $\mathbf{s}\overline{\mathbb{D}^N}$. Logo, como (2.18) independe da escolha de $\boldsymbol{\rho}$, o Teorema 2.5 nos dá que podemos escrever $\sum_\alpha \cdots$ ao invés de $\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_N=0}^{\infty} \cdots$ na Equação (2.18), o que completa a prova de (i).

Mostremos agora o item (ii). Pela Desigualdade (2.20), para $\rho_j < r_j$, tem-se

$$|c_\alpha(f)|\boldsymbol{\rho}^\alpha \leq \sup_{z \in \boldsymbol{\rho}\mathbb{D}^N} |f(z)|$$

para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$. Por outro lado, segue de (2.19) que

$$c_\alpha(f) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)}{\zeta^{\alpha_1+1} \cdots \zeta^{\alpha_N+1}} d\zeta_N \cdots d\zeta_1$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \frac{1}{\zeta_1^{\alpha_1+1}} \cdots \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)}{\zeta_N^{\alpha_N+1}} d\zeta_N\right] \cdots d\zeta_1$$

para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$. Donde, pela fórmula integral de Cauchy de uma váriavel complexa para derivadas (Proposição 2.6), segue que

$$C_\alpha(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \frac{1}{\zeta_1^{\alpha_1+1}} \cdots \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_{N-1}|=\rho_{N-1}} \frac{1}{\zeta_{N-1}^{\alpha_{N-1}+1}} \left(\frac{1}{\alpha_N!} \frac{\partial^{\alpha_N} f(w_N)}{\partial z_N^{\alpha_N}}\right) d\zeta_{N-1}\right] \cdots d\zeta_1$$

para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$, onde $w_N = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{N-1}, 0)$. Mais uma vez, aplicando a fórmula de Cauchy de uma variável complexa para derivadas (Proposição 2.6), concluímos que o coeficiente $2\pi i\, C_\alpha(f)$ coincide com a seguinte expressão:

$$\int_{|\zeta_1|=\rho_1} \frac{1}{\zeta_1^{\alpha_1+1}} \cdots \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_{N-2}|=\rho_{N-2}} \frac{1}{\zeta_{N-2}^{\alpha_{N-2}+1}} \left(\frac{1}{\alpha_{N-1}!\alpha_N!} \frac{\partial^{\alpha_{N-1}} \partial^{\alpha_N} f(w_{N-1})}{\partial z_{N-1}^{\alpha_{N-1}} \partial z_N^{\alpha_N}}\right) d\zeta_{N-2}\right] \cdots d\zeta_1$$

para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ e $w_{N-1} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{N-2}, 0, 0)$. Continuando com esse processo, após aplicarmos a fórmula de Cauchy de uma variável complexa para derivadas mais $N-2$ vezes, obteremos

$$C_\alpha(f) = \frac{(\partial^\alpha f)(0)}{\alpha!},$$

como queríamos.

Finalmente, verificaremos o item (iii). Suponha que f seja analítica em 0. Isto é, existem uma família de coeficientes $(b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ e $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N) \in (0, \infty)^N$ tais que

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} b_\alpha z^\alpha \text{ para cada } z \in \mathbf{r}\mathbb{D}^N.$$

Seja $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_N)$ tal que $0 < s_j < r_j$ para cada j. Em particular, $\mathbf{s}\mathbb{D}^N \subset \mathbf{r}\mathbb{D}^N$. Ademais, é claro que $|b_\alpha z^\alpha| \leq |b_\alpha \mathbf{s}^\alpha|$ para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ e cada $z \in \mathbf{s}\mathbb{D}^N$. Ora, usando o fato da série $\sum_\alpha |b_\alpha \mathbf{s}^\alpha|$ convergir para todo α, obtém-se que a série $\sum_\alpha |b_\alpha z^\alpha|$ deve convergir uniformemente sobre o conjunto $\mathbf{s}\mathbb{D}^N$. Segue daí que, para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$f_k : \mathbf{s}\mathbb{D}^N \to \mathbb{C};\ f_k(z) = \sum_{\alpha \in \{0,1,\ldots,k\}^N} b_\alpha z^\alpha$$

converge uniformemente para uma função $f : \mathbf{s}\mathbb{D}^N \to \mathbb{D}$. Além disso, veja que as funções f_k's são todas holomorfas sobre $\mathbf{s}\mathbb{D}^N$ devido a serem somas finitas de polinômios de N variáveis complexas, os quais são sempre Fréchet diferenciáveis. Desse fato, juntamente com o Teorema 2.10, obtém-se $f \in \mathscr{H}(\mathbf{s}\mathbb{D}^N)$. Visto que $\mathbf{s}$ foi escolhido de modo arbitrário, e sabido que cada compacto de $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$ é, em particular, um subconjunto de $\mathbf{s}\mathbb{D}^N$ para algum $\mathbf{s}$ adequadamente escolhido, segue que f é uma função holomorfa em $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$.

Para finalizar, mostraremos que $b_\alpha = c_\alpha(f)$. De (2.19), para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$,

$$\begin{aligned} c_\alpha(f) &= \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_N^{\alpha_N+1}} d\zeta_N \cdots d\zeta_1 \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} b_\beta \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{\zeta^\beta}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_N^{\alpha_N+1}} d\zeta_N \cdots d\zeta_1, \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$. Afirmamos que as parcelas do somatório (2.21) são nulas sempre que $\beta_j \neq \alpha_j$, para algum $j = 1, \ldots, N$. Com efeito, suponha sem perda de generalidade que $\beta_N \neq \alpha_N$ e calculemos a parcela correspondente:

$$\begin{aligned} &\frac{b_\beta}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{\zeta_1^{\beta_1} \cdots \zeta_N^{\beta_N}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_N^{\alpha_N+1}} d\zeta_N \cdots d\zeta_1 = \\ &\qquad = \frac{b_\beta}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{\zeta_1^{\beta_1} \cdots (\rho_N e^{i\theta_N})^{\beta_N} \rho_N i e^{i\theta_N}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots (\rho_N e^{i\theta_N})^{\alpha_N+1}} d\theta_N \cdots d\zeta_1 \\ &\qquad = \frac{b_\beta}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{\zeta_1^{\beta_1} \cdots i(\rho_N e^{i\theta_N})^{\beta_N}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots (\rho_N e^{i\theta_N})^{\alpha_N}} d\theta_N \cdots d\zeta_1 \\ &\qquad = \frac{b_\beta}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \frac{\zeta_1^{\beta_1} \cdots i\rho_N^{\beta_N}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \rho_N^{\alpha_N}} \int_0^{2\pi} e^{i\theta_N(\beta_N - \alpha_N)} d\theta_N \cdots d\zeta_1 \\ &\qquad = 0. \end{aligned}$$

Segue daí e de (2.21) que

$$\begin{aligned} c_\alpha(f) &= \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} b_\beta \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{\zeta^\beta}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_N^{\alpha_N+1}} d\zeta_N \cdots d\zeta_1 \\ &= \frac{b_\alpha}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{\zeta_1^{\alpha_1} \cdots \zeta_N^{\alpha_N}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_N^{\alpha_N+1}} d\zeta_N \cdots d\zeta_1 \\ &= \frac{b_\alpha}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{1}{\zeta_1 \cdots \zeta_N} d\zeta_N \cdots d\zeta_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b_\alpha}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{\rho_N i e^{i\theta_N}}{\zeta_1 \cdots \rho_N e^{i\theta_N}} d\theta_N \cdots d\zeta_1 \\
&= \frac{b_\alpha}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{i}{\zeta_1 \cdots \zeta_{N-1}} d\theta_N \cdots d\zeta_1 \\
&= \frac{b_\alpha}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_{N-1}|=\rho_{N-1}} \frac{2\pi i}{\zeta_1 \cdots \zeta_{N-1}} d\zeta_{N-1} \cdots d\zeta_1 \\
&\vdots \\
&= b_\alpha.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
c_\alpha(f) = \frac{b_\alpha}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=\rho_N} \frac{\zeta_1^{\alpha_1} \cdots \zeta_N^{\alpha_N}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_N^{\alpha_N+1}} d\zeta_N \cdots d\zeta_1 = b_\alpha,
$$

e a prova está completa.

■

Encerraremos a seção com um teorema profundo devido ao matemático alemão Friedrich Hartogs. Esse resultado nos fornece um outro modo para avaliar se uma função definida num polidisco é holomorfa.

Teorema 2.18 (de Hartogs)**.** *Seja* $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N) \in (0, \infty)^N$ *um poliraio. Se* $f : \mathbf{r}\mathbb{D}^N \to \mathbb{C}$ *for uma função separadamente holomorfa, então* f *é holomorfa.*

Demonstração. Veja [8, Theorem 15.7]. ■

2.2 Funções holomorfas em espaços normados

No decorrer dessa seção, a letra E representa um espaço normado complexo, o qual pode ser de dimensão finita ou infinita. Comecemos a seção introduzindo o conceito de funções holomorfas definidas sobre espaços normados arbitrários.

Definição 2.19. Seja $U \subset E$ um conjunto aberto não vazio. Uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita ser *holomorfa* (*ou Fréchet diferenciável*) se para cada $a \in U$ existir um funcional $\mathbb{C}$-linear contínuo $L \in E^*$ tal que

$$
\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - L(x-a)|}{\|x - a\|} = 0. \tag{2.22}
$$

Denotaremos por $\mathscr{H}(U)$ o espaço vetorial das funções holomorfas $f : U \to \mathbb{C}$ com as operações definidas pontualmente.

Note que a definição acima generaliza o conceito de funções holomorfas com domínios em $\mathbb{C}^N$ para espaços normados arbitrários. Com o intuito de investigar propriedades fundamentais inerentes às funções holomorfas nesse contexto mais geral, veremos agora uma outra definição, a qual dá luz à uma "nova" classe de funções (na verdade, veremos adiante que os conceitos coincidem!).

Definição 2.20. Seja $U \subset E$ um conjunto aberto e não vazio. Dizemos que uma função $f : U \to \mathbb{C}$ *tem uma expansão em série de Taylor* em torno de um ponto $a \in U$ se existirem $r > 0$ e uma sequência de polinômios homogêneos $(P_m)_{m=0}^{\infty}$, $P_m \in \mathcal{P}(^m E)$ para $m \in \mathbb{N}_0$, tais que

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a), \tag{2.23}$$

com a série convergindo uniformemente no conjunto $B[a,r]$. Usaremos o símbolo $\mathscr{T}(U)$ para representar o espaço vetorial de todas as funções $f : U \to \mathbb{C}$ que tem uma expansão em série de Taylor em torno de todo ponto $a \in U$.

Observação 2.21. *Para cada $a \in U$, a sequência $(P_m)_{m=1}^{\infty}$ em (2.23) é única. Com efeito, suponha que existam $P_m, Q_m \in \mathcal{P}(^m E)$, $m \in \mathbb{N}_0$, tais que*

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x-a)$$

sempre que $x \in B(a;r)$. Logo, segue do Teorema 1.19 que $P_m = Q_m$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Desse modo, podemos escrever $P_m = P^m f(a)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Ademais, denotaremos por $A^m f(a)$ a aplicação multilinear simétrica tal que

$$\widehat{A^m f(a)} = P^m f(a).$$

A série $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} [P^m f(a)](x-a)$ é chamada a série de Taylor de f em a.

Teorema 2.22 (Desigualdade de Cauchy)**.** *Sejam $f \in \mathscr{T}(U)$ e $f(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} P_m f(a)(x-a)$ a sua série de Taylor em $B[a,r] \subset U$. Suponha $t \in E$ tal que $a + \xi t \in U$ sempre que $|\xi| \leq r$. Então, para cada $m \in \mathbb{N}_0$,*

$$\|P_m f(a)(t)\| \leq \frac{1}{r^m} \sup_{|\xi|=r} |f(a+\xi t)|.$$

Demonstração. Veja [14, Corollary 7.4]. ∎

Definição 2.23. Sejam $U \subset E$, $f \in \mathscr{T}(U)$ e $a \in U$.

(i) O raio de limitação de f no ponto a é definido por

$$r_b f(a) := \sup\{r > 0 : B[a,r] \subset U \text{ e } f|_{B[a,r]} \text{ é limitada}\}.$$

(ii) O raio de convergência uniforme da série de Taylor de f em a será denotado por $r_c f(a)$ (veja Definição 1.16).

(iii) A fronteira de U será denotada por ∂U. A distância de a até ∂U é dada por

$$d_U(a) = d(a, \partial U) = \inf\{\|x - a\| : x \in \partial U\}.$$

Quando $U = E$ adotaremos, por conveniência, $d_U(a) = +\infty$.

Teorema 2.24. *Sejam $f \in \mathscr{T}(U)$ e $a \in U$. Então $r_b f(a) = min\{r_c f(a), d_U(a)\}$.*

Demonstração. Veja [14, Theorem 7.13]. ■

Definição 2.25. Uma função $f : U \subset E \to \mathbb{C}$ é dita ser *G-holomorfa* se, para quaisquer $a \in U$ e $b \in E$, a função $\lambda \mapsto f(a + \lambda b)$ for holomorfa no conjunto aberto $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in U\}$.

Denotaremos por $\mathscr{H}_G(U)$ o conjunto de todas as funções G-holomorfas de U em $\mathbb{C}$. É de fácil verificação que este conjunto forma um espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação definidas pontualmente.

Teorema 2.26 (Lema de Schwarz)**.** *Seja $f \in \mathscr{H}_G(U)$. Dados $a \in U$ e $r > 0$ tais que $B(a, r) \subset U$, suponha que $|f(x)| \leq C$ para cada $x \in B(a, r)$. Então*

$$|f(x) - f(a)| \leq 2\, C\, \frac{\|x - a\|}{r} \quad \textit{para cada } x \in B(a, r).$$

Demonstração. Veja [14, Theorem 7.19]. ■

Como próximo objetivo, veremos que uma função é holomorfa se e somente se tem uma expansão em série de Taylor em todo ponto do seu domínio. Ademais, também veremos a relação entre funções G-holomorfas e funções holomorfas. Para isso, necessitamos de um lema.

Lema 2.27. *Seja $P : E \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que $P|_M \in \mathcal{P}_a(^m M)$ para cada subespaço vetorial $M \subset E$ de dimensão menor do que ou igual à $m + 1$. Então $P \in \mathcal{P}_a(^m E)$.*

Demonstração. Defina a função $A : E^m \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P\left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i\right).$$

Para completar a demonstração, mostraremos que A é uma forma m-linear e $P(x) = Ax^m$ para cada $x \in E$. Para isso, sejam $y_0, y_1, \ldots, y_m \in E$ arbitrários, e considere o subespaço M gerado por esses vetores. Temos que $\dim M \leq m + 1$ e, por conseguinte, $P|_M$ deve ser um polinômio m-homogêneo. Ou seja, existe uma forma m-linear simétrica $A_M \in \mathcal{L}_a^s(^m M)$ de modo que $P|_M(x) = A_M x^m$ para todo $x \in M$. Pela Fórmula de Polarização, tem-se

$$A_M(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1} P|_M \left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i\right)$$

para todo $x_j \in M$, $j = 1, \ldots, m$. Em particular, $A_M = A|_M$. Daí, e do fato de A_M ser uma forma m-linear, obtém-se

$$\begin{aligned} A(y_0 + \lambda y_1, y_2, \ldots, y_m) &= A_M(y_0 + \lambda y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ &= A_M(y_0, y_2 \ldots, y_m) + \lambda A_M(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ &= A(y_0, y_2, \ldots, y_m) + \lambda A(y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{aligned}$$

para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$. Mas como os vetores y_i's foram escolhidos arbitrariamente em E, prova-se com isso que A é linear na primeira entrada. Analogamente, verifica-se sem dificuldade que a função A é linear nas restantes $m-1$ entradas. Por fim, note que

$$A(y_0)^m = A|_M(y_0)^m = A_M(y_0)^m = P|_M(y_0) = P(y_0)$$

e, como y_0 foi escolhido arbitrário, a demonstração está completa. ■

Teorema 2.28. *Seja U um subconjunto aberto de um espaço normado E, e seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função dada. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *f é uma função holomorfa.*

(ii) *$f : U \to \mathbb{C}$ tem uma expansão em série de Taylor em cada ponto de U.*

(iii) *f é contínua e G-holomorfa.*

(iv) *f é localmente limitada e G-holomorfa.*

(v) *f é contínua e $f|_{U\cap M} : U \cap M \to \mathbb{C}$ tem uma expansão em série de Taylor em todo ponto de $U \cap M$ para cada subespaço de dimensão finita M de E.*

Demonstração. $(ii) \Rightarrow (i)$: Seja $a \in U$ e escolha $r \in (0, r_b f(a))$. Neste caso, tem-se que a função f é limitada em $B[a, r]$, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq C \text{ para todo } x \in B[a, r].$$

Pelo Teorema 2.24, $r_b f(a) \leq r_c f(a)$, e portanto

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P^m f(a)(x-a) \text{ para todo } x \in B[a, r].$$

Ainda, visto que $P^0 f(a)(x-a) = f(a)$, tem-se

$$f(x) = f(a) + P^1 f(a)(x-a) + \sum_{m=2}^{\infty} P^m f(a)(x-a).$$

Mostraremos que $L = P^1 f(a) \in E^*$ é o funcional $\mathbb{C}$-linear contínuo que satisfaz a condição (2.22) para a função f no ponto a. Com efeito, note que

$$\frac{|f(x) - f(a) - P^1 f(a)(x-a)|}{\|x-a\|} = \frac{|\sum_{m=2}^{\infty} P^m f(a)(x-a)|}{\|x-a\|}$$

$$\leq \frac{\sum_{m=2}^{\infty} |P^m f(a)(x-a)|}{\|x-a\|},$$

o que implica

$$\limsup_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - P^1 f(a)(x-a)|}{\|x-a\|} \leq \limsup_{x \to a} \sum_{m=2}^{\infty} \left| P^m f(a) \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right) \right| \|x-a\|^{m-1}.$$

Pela Desigualdade de Cauchy (Teorema 2.22),

$$\left| P^m f(a) \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right) \right| \leq r^{-m} \sup_{|\xi|=r} \left| f \left(a + \xi \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right) \right) \right| \leq C r^{-m}.$$

Donde,

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left| P^m f(a) \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right) \right| \|x-a\|^{m-1} \leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{C}{\|x-a\|} \left(\frac{\|x-a\|}{r} \right)^m$$
$$= \frac{C}{r^2} \|x-a\| \left(\frac{1}{1 - \frac{\|x-a\|}{r}} \right) = 0.$$

Fazendo $x \to a$, segue que f é holomorfa.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Como f é Fréchet diferenciável, segue que f é contínua. Sejam $a \in U$ e $b \in E$. Considere o conjunto $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in U\}$ e a função $\varphi : \Lambda \to U$ tal que $\varphi(\lambda) = a + \lambda b$. Para concluir que f é G-holomorfa, precisamos verificar que a função composta

$$f \circ \varphi : \Lambda \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C};\ (f \circ \varphi)(\lambda) = f(a + \lambda b)$$

é Fréchet diferenciável. Para isso, sejam $\lambda_0 \in \Lambda$ e $\widetilde{L} \in E^*$ o funcional $\mathbb{C}$-linear contínuo satisfazendo (2.22) para f no ponto $a + \lambda_0 b$. Vejamos que o funcional $\mathbb{C}$-linear contínuo

$$L : \lambda \in \mathbb{C} \mapsto \widetilde{L}(\lambda\, b) \in \mathbb{C}$$

satisfaz a condição (2.22) para a função $f \circ \varphi$ no ponto λ_0. Com efeito, note que para $\lambda \neq \lambda_0$ e $b \neq 0$, tem-se

$$\frac{|f \circ \varphi(\lambda) - f \circ \varphi(\lambda_0) - L(\lambda - \lambda_0)|}{|\lambda - \lambda_0|} = \frac{|f(a + \lambda\, b) - f(a + \lambda_0\, b) - \widetilde{L}((\lambda - \lambda_0)\, b)|}{|\lambda - \lambda_0|}$$
$$= \|b\| \cdot \frac{|f(a + \lambda\, b) - f(a + \lambda_0\, b) - \widetilde{L}((a + \lambda\, b) - (a + \lambda_0\, b))|}{\|(a + \lambda\, b) - (a + \lambda_0\, b)\|}.$$

Desse modo, fazendo $\lambda \to \lambda_0$ e usando o fato de $\widetilde{L} \in E^*$ ser o funcional $\mathbb{C}$-linear contínuo que satisfaz (2.22) para f no ponto $a + \lambda_0\, b$, obtemos o desejado.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: É imediato.

$(iv) \Rightarrow (v)$: Primeiro vejamos que f é contínua. Para isso, seja $a \in U$ escolhido arbitrário. Visto que f é localmente limitada, podemos encontrar $C, r > 0$ tais que

$$|f(x)| \leq C \text{ para todo } x \in B(a; r).$$

Logo, aplicando o Lema de Schwarz (Teorema 2.26) na função

$$x \in B(a,r) \longmapsto f(x) - f(a) \in \mathbb{C},$$

obtém-se

$$|f(x) - f(a)| \leq 2\,C\,\frac{\|x-a\|}{r} \text{ para todo } x \in B(a,r).$$

Donde, conclui-se que f deve ser contínua no ponto a. Como $a \in U$ foi escolhido arbitrário, segue que f é uma função contínua.

Agora, seja M um subespaço de dimensão finita de E. Sejam $a \in U \cap M$ e $\{x_1, \ldots, x_N\}$ uma base para M. Visto que $a \in U \subset E$, U é aberto, e a aplicação

$$h : (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N \longmapsto a + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_N x_N \in E$$

é contínua, segue que $h^{-1}(U)$ é aberto e portanto existe $\rho > 0$ tal que

$$\rho\mathbb{D}^N \subset \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N : a + \lambda_1\, x_1 + \cdots + \lambda_N\, x_N \in U\}.$$

Logo, como f é G-holomorfa, a aplicação

$$g : (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \rho\mathbb{D}^N \longmapsto f(a + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_N x_N) \in \mathbb{C}$$

é separadamente holomorfa. Segue daí e do Teorema 2.18 que g é holomorfa. Isto implica que se pode escrever

$$f(a + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_N x_N) = g(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_N^{\alpha_N},$$

onde $c_\alpha \in \mathbb{C}$ e a série converge absolutamente e uniformemente em algum polidisco $\mathbb{D}^N(0, \mathbf{r})$.

Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, defina $P_m \in \mathcal{P}(^m M)$ tal que

$$P_m(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_n^{\alpha_n}.$$

Donde,

$$f(a + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n),$$

com a série convergindo absolutamente e uniformemente em $\mathbb{D}^n(0, \mathbf{r})$. Isto mostra que $f|_{U \cap M} : U \cap M \subset M \to \mathbb{C}$ tem uma expansão em série de Taylor em a. Ora, como a foi escolhido arbitrário, isto mostra o desejado.

$(v) \Rightarrow (ii)$ Sejam $a \in U$ e $r > 0$ tais que $B(a,r) \subset U$. Seja $M \subset E$ um subespaço de dimensão finita contendo a. Como $f|_{U \cap M}$ é contínua, segue que f é limitada em $B[a,\rho]$ sempre que $0 < \rho < r$. Segue daí e de $r_b f(a) \leq r_c f(a)$ que existe uma sequência de polinômios $P_m^M \in \mathcal{P}(^m M)$ tal que

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m^M(x-a) \tag{2.24}$$

para todo $x \in M \cap B(a;r)$.

Acima provamos que para cada subespaço de dimensão finita M de E, conseguimos uma sequência de polinômios $(P_m^M)_{m=1}^\infty$, $P_m^M \in \mathcal{P}(^m M)$, de modo que $f|_M$ pode ser representada numa vizinhança de a como em (2.24). Agora, note que se M e N são dois subespaços de dimensão finita de E contendo a, então pela unicidade da Série de Taylor (Observação (2.21)) segue que $P_m^M(t) = P_m^N(t)$ para todo $t \in M \cap N$ e todo $m \in \mathbb{N}_0$. Devido a isso, podemos definir

$$P_m : E \longrightarrow \mathbb{C} \ \text{ por } \ P_m(t) = P_m^M(t),$$

onde M é qualquer subespaço de dimensão finita de E tal que $a, t \in M$. Pelo Lema 2.27, segue que $P_m \in \mathcal{P}_a(^m E)$ e

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a), \ \text{ para todo } \ x \in B(a,r) \cap M.$$

Falta verificar que cada P_m é contínuo. Como f é contínua, existem $s, c > 0$ tais que $B(a;s) \subset B(a;r)$ e $\|f(x)\| \leq c$ para cada $x \in B(a;s)$. Então, pela Desigualdade de Cauchy (Teorema 2.22) aplicada a $f|_{U\cap M}$,

$$\|P_m(t)\| \leq c\, s^{-m}, \ \text{ para todo } \ m \in \mathbb{N}_0.$$

Assim, cada P_m é contínuo e a série de potências $\sum_{m=0}^\infty P_m(x-a)$ tem raio de convergência maior ou igual a s. Portanto, f tem uma expasão em série de Taylor em $a \in U$. Mas como a foi escolhido arbitrário em U, concluímos que f tem uma expansão em série de Taylor em cada ponto de U. ■

Exemplo 2.29. Cada polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}(^m E)$ é uma função holomorfa. Com efeito, seja $A \in \mathcal{L}^s(^m E)$ tal que $P = \widehat{A}$. Pela Fórmula Binomial (Corolário 1.8) temos

$$P(x) = Ax^m = A(a + (x-a))^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} Aa^{m-j}(x-a)^j$$

onde $Aa^{m-j} \in \mathcal{L}^s(^j E)$ para todo $0 \leq j \leq m$.. Logo, pelo item (ii) do Teorema 2.28 P é holomorfa e a sequência de polinômios é dada por

$$P^j P(a) = \begin{cases} \dbinom{m}{j} Aa^{m-j} & \text{se } j \leq m; \\ \\ 0 & \text{se } j > m. \end{cases}$$

No Teorema 2.17, vimos que quando $E = \mathbf{r}\mathbb{D}^N$, dizer que uma função f é holomorfa é equivalente a dizer que ela é analítica em 0. Estudaremos agora o caso em que $E = B_{c_0}$, onde B_{c_0} denota a bola unitária aberta de c_0 . Consideremos o conjunto de multi-índices $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ no qual cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ é da forma $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N, 0, 0 \ldots)$, com $\alpha_k \in \mathbb{N}_0$ para cada $k = 1, \ldots, N$. Definimos o suporte de $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ como $supp(\alpha) := \{k \in \mathbb{N} : \alpha_k \neq 0\}$.

Teorema 2.30. *Para cada função holomorfa $f : B_{c_0} \longrightarrow \mathbb{C}$, existe uma única família de coeficientes $(c_\alpha(f))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ tal que para cada $z \in B_{c_{00}}$*

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha(f) z^\alpha, \tag{2.25}$$

onde a convergência da série é entendida de modo que a família $(c_\alpha(f)\, z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}}$ é somável para cada $z \in B_{c_{00}}$. Além disso, para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N \subset \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ e cada $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N)$ com $0 < r_1, \ldots, r_N < 1$, temos a fórmula integral de Cauchy

$$c_\alpha(f) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|\zeta_1|=r_1} \cdots \int_{|\zeta_N|=r_N} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_N, 0, 0, \ldots)}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_N^{\alpha_N+1}} d\zeta_N \cdots d\zeta_1 \tag{2.26}$$

E ainda, denotando $z = (z_1, \ldots, z_N)$, vale a desigualdade de Cauchy,

$$|c_\alpha(f)|\mathbf{r}^\alpha \leq \sup_{z\in\mathbf{r}\overline{\mathbb{D}}^N} |f(z_1, \ldots, z_N, 0, \ldots)| \tag{2.27}$$

e

$$c_\alpha(f) = \frac{(\partial^\alpha f)(0)}{\alpha!}, \tag{2.28}$$

onde

$$(\partial^\alpha f)(0) := \partial^\alpha f_N(0)$$

para

$$f_N : \mathbb{D}^N \to \mathbb{C}; \;\; f_N(z_1, \ldots, z_N) := f(z_1, \ldots, z_N, 0, 0, \ldots).$$

Demonstração. Seja $f : B_{c_0} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa e considere a restrição

$$f_N := f|_{\mathbb{D}^N} : \mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}\,;\; f_N(z_1, \ldots, z_N) = f(z_1, \ldots, z_N, 0, 0, \ldots)$$

para cada $N \in \mathbb{N}$. Pelo item (v) do Teorema 2.28, a função de uma variável complexa

$$z_j \in \mathbb{D} \longmapsto f(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_N, 0, \ldots) \in \mathbb{C}$$

é analítica para cada $j = 1, \ldots, N$, e portanto segue do Teorema de Hartogs (Teorema 2.18) que f_N é holomorfa em $\mathbb{D}^N$. Donde, segue do Teorema 2.17 que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe uma família de coeficientes $(c_\alpha(f_N))_\alpha$ tal que

$$f_N(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f_N) z^\alpha$$

para cada $z \in \mathbb{D}^N$. Assim,

$$f_N(z) = f_{N+1}((z, 0)) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{N+1}} c_\alpha(f_{N+1})(z, 0)^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f_{N+1}) z^\alpha,$$

e pela unicidade dos coeficientes de uma série de monômios devemos ter

$$c_\alpha(f_{N+1}) = c_\alpha(f_N)$$

para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^{N+1}$ com $\alpha_{N+1} = 0$. Deste modo, para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N, 0, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, tem-se $c_\alpha(f_N) = c_\alpha(f_{N+k})$ para todo $k \geq N$, e portanto para este α podemos tomar $c_\alpha(f) := c_\alpha(f_N) = c_\alpha(f_{N+1}) = \cdots$. Com a família $(c_\alpha(f))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ assim definida, notemos que para cada $z = (z_1, \ldots, z_N, 0, \ldots) \in B_{c_{00}}$, obtemos

$$\begin{aligned} f(z) = f_N(z_1, \ldots, z_N, 0, \ldots) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f_N)\, z^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} c_\alpha(f)\, z^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} c_\alpha(f)\, z^\alpha, \end{aligned}$$

sendo a última igualdade devida a $z^\alpha = 0$ sempre que $\alpha_j \neq 0$ e $j > N$. Logo, obtemos uma única família $(c_\alpha(f))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ satisfazendo (2.25), sendo a unicidade verificada pois cada família de coeficientes $(c_\alpha(f_N))_{\alpha \in \mathbb{N}^N}$ são unicamente determinados. E, por fim, temos que (2.26), (2.27) e (2.28) seguem dos itens correspondentes do Teorema 2.17 .

■

Observação 2.31. Para funções holomorfas $f : c_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ temos uma representação em série como em (2.25). Com efeito, dado $s > 0$, restringindo f ao polidisco $s\mathbb{D}^N$, temos do Teorema 2.17 que existe uma família de coeficientes $c_\alpha^s(f)$ tal que $f|_{s\mathbb{D}^N}$ pode ser representada como em (2.14). Do mesmo modo, pelo Teorema 2.30, existem coeficientes $c_\alpha(f)$ tal que a restrição de f a B_{c_0} pode ser dada por uma série de potências como em (2.25) para cada $z \in B_{c_{00}}$. Assim, obtemos de (2.15) e (2.26) que $c_\alpha^s(f) = c_\alpha(f)$ para todo $s > 0$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$. Portanto, como $c_{00} = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} s\mathbb{D}^N$ temos

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha(f) z^\alpha$$

para cada $z \in c_{00}$.

Finalmente, encerraremos o capítulo introduzindo um espaço de Banach de funções holomorfas que aparecerá de modo fundamental no Capítulo 5. Considere o conjunto

$$H_\infty(B_{c_0}) := \{f \in \mathscr{H}(B_{c_0}) : f \text{ é limitada}\}.$$

O conjunto $H_\infty(B_{c_0})$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathscr{H}(B_{c_0})$. De fato, isso segue trivialmente do fato de que somas de duas funções limitadas é uma função limitada. Também, a multiplicação por escalar de uma função limitada e um escalar ainda nos dá uma função limitada.

O espaço vetorial $H_\infty(B_{c_0})$ é um espaço normado com a norma definida por

$$\|f\|_\infty := \sup_{z \in B_{c_0}} |f(z)|.$$

A verificação de que a função acima é uma norma é padrão. De fato, essa norma nada mais é do que a norma da limitação uniforme conhecida dos cursos introdutórios de Análise Funcional. Vejamos abaixo que $(H_\infty(B_{c_0}), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Para isso, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.32. *Seja U um aberto de um espaço normado E. Suponha que $(f_n)_{n=1}^\infty$ seja uma sequência de funções em $\mathscr{H}(U)$ e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua tais que $(f_n|_K)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente para $f|_K$ sempre que $K \subset U$ for compacto. Então f é holomorfa.*

Demonstração. Veja [14, Proposition 9.13]. ■

Teorema 2.33. $(H_\infty(B_{c_0}), \|\cdot\|_\infty)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $H_\infty(B_{c_0})$. Logo, dados $x \in B_{c_0}$ e $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \tag{2.29}$$

para todos $n, m \geq n_0$. Isto prova que $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy para cada $x \in B_{c_0}$. Mas como $\mathbb{C}$ é completo, concluímos que $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ converge em $\mathbb{C}$. Desse modo, podemos definir

$$f : B_{c_0} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Fazendo $m \to \infty$ em (2.29), obtemos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{2.30}$$

para cada $n \geq n_0$. Isto implica que f_n converge uniformemente para f. Donde, visto que f_n é contínua para cada n (Teorema 2.28(iv)) e f é limite uniforme dessas funções, f deve ser contínua. E f também é limitada, pois

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + \varepsilon \leq \|f_{n_0}\| + \varepsilon$$

para cada $x \in B_{c_0}$.

Falta mostrar que f é holomorfa. Para isso, seja $K \subset B_{c_0}$ um subconjunto compacto. Segue de (2.30) que $(f_n|_K)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente para $f|_K$. Portanto, segue do Lema 2.32 que f é holomorfa. ■

Observação 2.34. É importante observar que a prova de que $(H_\infty(B_{c_0}), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach se repete *ipsis litteris* se B_{c_0} for substituído por uma bola unitária aberta de um espaço normado arbitrário.

CAPÍTULO 3

POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS NÃO ANALÍTICOS

No Capítulo 2, verificou-se através do Teorema 2.17 que toda função holomarfa definida sobre um polidisco pode ser representada por uma série infinita de monômios. Em outras palavras, toda função holomorfa definida num polidisco é analítica em 0. Ademais, quando consideramos a generalização natural dos polidiscos no contexto de holomorfia em espaços de Banach de dimensão infinita (a saber, o espaço c_0), segue da Observação 2.31 que cada função holomorfa $f : c_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ pode ser representada por uma série infinita de monômios em cada $z \in c_{00}$. Uma pergunta natural é: “Para todo $z \in c_0$, f ainda pode ser representada por uma série de monômios?”. A resposta é não!

No presente capítulo, veremos que no caso dos polinômios m-homogêneos, para $m \geq 2$, é possível construir um polinômio que não pode ser representado por uma série infinita de monômios em todos os pontos de c_0. Isto mostra que o conceito de analiticidade como colocada na Definição 2.12, para funções definidas no polidisco, não se estende de modo natural na teoria de holomorfia em dimensão infinita. Grosso modo, estes polinômios garantem que analiticidade e holomorfia/diferenciabilidade em dimensão infinita, em geral, não são equivalentes.

3.1 Conjuntos de indexação

A construção que faremos de polinômios homogêneos não analíticos em c_0 é intrigada e exigirá uma notação razoavelmente pesada. Desse modo, para não precisarmos interromper o desenvolvimento da construção para constantemente introduzir novas notações, usaremos essa seção para definir alguns conjuntos de indexação que nos auxiliarão na manipulação de polinômios homogêneos em c_0. Nas seções seguintes, focaremos exclusivamente na construção dos polinômios não analíticos.

Sejam m e n números naturais maiores do que 1. Considere os seguintes conjuntos de índices:

$$\mathscr{M}(m,n) := \{\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_m) \in \mathbb{N}^m : 1 \leq i_1,\ldots,i_m \leq n\};$$
$$\mathscr{J}(m,n) := \{\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_m) \in \mathbb{N}^m : 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m \leq n\};$$
$$\Lambda(m,n) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m\}.$$

Dados $\mathbf{i},\mathbf{j} \in \mathscr{M}(m,n)$, definimos a seguinte relação de equivalência em $\mathscr{M}(m,n)$: $\mathbf{i} \sim \mathbf{j}$ se existe uma permutação $\sigma \in S_m$ tal que $i_{\sigma(k)} = j_k$ para todo $1 \leq k \leq m$. Denotaremos por $[\mathbf{i}]$ e $|[\mathbf{i}]|$ a classe de equivalência e a cardinalidade de $\mathbf{i}$, respectivamente.

Note que para cada $\mathbf{i} \in \mathscr{M}(m,n)$ existe um único $\mathbf{j} \in \mathscr{J}(m,n)$ tal que $[\mathbf{i}] = [\mathbf{j}]$. Por outro lado, existe uma bijeção entre $\mathscr{J}(m,n)$ e $\Lambda(m,n)$ em que cada $\mathbf{j} \in \mathscr{J}(m,n)$ é associado ao multi-índice $\alpha \in \Lambda(m,n)$ com $\alpha_r = |\{k : i_k = r\}|$. Reciprocamente, para cada $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \Lambda(m,n)$ associamos ao índice

$$\mathbf{j} = (1, \overset{\alpha_1}{\ldots}, 1, 2, \overset{\alpha_2}{\ldots}, 2, \ldots, n \overset{\alpha_n}{\ldots}, n) \in \mathscr{J}(m,n). \tag{3.1}$$

Segue de (3.1) que se $\mathbf{j}$ e α estão relacionados, então

$$|[\mathbf{j}]| = \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} = \frac{m!}{\alpha!}.$$

Ainda, via esta identificação, para cada $z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ e cada $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, pode-se escrever

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} = z_1 \overset{\alpha_1}{\cdots} z_1 \cdots z_n \overset{\alpha_n}{\cdots} z_n = z_{i_1} \cdots z_{i_m} = z_{\mathbf{i}},$$

onde α está sendo identificado com $\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_m)$.

Seja $A : \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma forma m-linear. Denote

$$a_{\mathbf{i}} = a_{i_1 \cdots i_m} = A(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}) \tag{3.2}$$

para cada $\mathbf{i} \in \mathscr{M}(m,n)$. Logo, para $z_1,\ldots,z_m \in \mathbb{C}^n$, com $z_j = (z_j(1),\ldots,z_j(n)) \in \mathbb{C}^n$ e $j = 1,\ldots,m$, tem-se (dos cursos de Álgebra Linear)

$$A(z_1,\ldots,z_m) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathscr{M}(m,n)} a_{\mathbf{i}}\, z_1(i_1) \cdots z_m(i_m).$$

Considere $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ um polinômio homogêneo e $A : \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ a forma m-linear simétrica associada a P com coeficientes $(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathscr{M}(m,n)}$, i.e., $P(z) = Az^m$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$ e $a_{\mathbf{i}}$'s são dados como em (3.2). Visto que A é simétrica, segue que $a_{\mathbf{i}} = a_{\mathbf{j}}$ para todo $\mathbf{i} \sim \mathbf{j}$. Desse modo, podemos considerar apenas os coeficientes indexados em $\mathscr{J}(m,n)$. Assim,

$$P(z) = A(z,\ldots,z) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathscr{M}(m,n)} a_{\mathbf{i}}\, z_{i_1} \cdots z_{i_m} = \sum_{\mathbf{j} \in \mathscr{J}(m,n)} \sum_{\mathbf{i} \in [\mathbf{j}]} a_{\mathbf{i}}\, z_{i_1} \cdots z_{i_m}$$

$$= \sum_{\mathbf{j} \in \mathscr{J}(m,n)} |[\mathbf{j}]| a_{\mathbf{j}}\, z_{\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{j} \in \mathscr{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}},$$

onde $c_{\mathbf{j}} = |[\mathbf{j}]| a_{\mathbf{j}}$. Logo, se $\alpha \in \Lambda(m,n)$ e $\mathbf{j} \in \mathscr{J}(m,n)$ estão relacionados, então

$$c_\alpha = c_{\mathbf{j}} = |[\mathbf{j}]| a_{\mathbf{j}} = \frac{m!}{\alpha!} a_{\mathbf{j}}. \tag{3.3}$$

Finalmente, note que caso A não fosse simétrica, teríamos pela Proposição 1.6 apenas

$$c_\alpha = c_{\mathbf{j}} = \frac{1}{\alpha!} \sum_{\sigma \in S_m} a_{j_{\sigma(1)} \cdots j_{\sigma(m)}}. \tag{3.4}$$

Portanto, podemos sempre escrever P da seguinte forma:

$$P(z) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = m}} c_\alpha z^\alpha, \tag{3.5}$$

onde c_α's são escalares dados por (3.3) se A for simétrica ou, mais geralmente, por (3.4) caso contrário.

3.2 Polinômios 2-homogêneos não analíticos

Seja $P : c_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ um polinômio m-homogêneo. Pela Observação 2.31, existe uma única família de coeficientes $(c_\alpha(P))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ tal que

$$P(z) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha| = m}} c_\alpha(P) z^\alpha, \tag{3.6}$$

com convergência absoluta para cada $z \in c_{00}$ (de fato, vimos que a família $(c_\alpha(P) z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ é somável para cada $z \in c_{00}$). Dito isso, é natural se perguntar: A representação (3.6) vale para cada $z \in c_0$? Em outras palavras, P é analítico no sentido de poder ser representado por uma série de monômios?

Como primeiro resultado da seção, vejamos que a resposta para a pergunta supracitada é positiva no caso em que $m = 1$. Mas antes, deixemos abaixo a definição precisa de polinômios analíticos.

Definição 3.1. Seja $P : c_0 \to \mathbb{C}$ um polinômio m-homogêneo. Dizemos que P é *analítico* em $z \in c_0$ se a sua representação por série de monômios (3.6) convergir absolutamente, isto é,

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha| = m}} |c_\alpha(P) z^\alpha| < \infty. \tag{3.7}$$

Quando P é analítico para todo $z \in c_0$, diremos apenas que P é *analítico*.

Proposição 3.2. *Todo funcional linear contínuo $\varphi : c_0 \to \mathbb{C}$ é analítico.*

Demonstração. Sabemos da Observação 2.31 que existe uma única família de coeficientes $(c_\alpha(\varphi))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ tal que

$$\varphi(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha(\varphi) z^\alpha \text{ para todo } z \in c_{00}.$$

E, como φ é linear, devemos ter $c_\alpha(\varphi) = 0$ sempre que $|\alpha| \neq 1$. Ou seja, a somatória (3.7), ao ser avaliada para φ, somará termos não nulos apenas quando $\alpha = e_N$ para algum $N \in \mathbb{N}$. Ora, mas se $\alpha = e_N \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ para algum N, então de (2.15) e (2.26) obtém-se

$$c_\alpha(\varphi) = c_\beta(\varphi_N),$$

onde

$$\varphi_N : (\zeta_1, \ldots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^N \mapsto \varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_N, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{C} \text{ e } \beta = e_N \in \mathbb{N}_0^N.$$

Mas por (3.2), devemos ter $c_\beta(\varphi_N) = \varphi_N(e_N) = \varphi(e_N)$. Portanto, para $z = (z_j)_{j=1}^\infty \in c_0$ fixo, temos

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=1}} |c_\alpha(\varphi) z^\alpha| = \sum_{k=1}^\infty |\varphi(e_k) z_k| \leq \|z\|_\infty \cdot \sum_{k=1}^\infty |\varphi(e_k)|,$$

e a última série converge pois $\varphi \in (c_0)' = \ell_1$. ■

Concluímos da última proposição que quando $m = 1$ todo polinômio é analítico. Em contrapartida, quando $m \geq 2$ isso deixa de ser verdade como veremos adiante.

Observação 3.3. Fixe $N \in \mathbb{N}$. Considere a matriz $N \times N$ simétrica dada por $a_{rs} = e^{2\pi i \frac{rs}{N}}$ para $1 \leq r, s \leq N$. Afirmamos que essa matriz satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^N a_{rt}\overline{a}_{st} = N\delta_{rs} \\ |a_{rs}| = 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

onde δ_{rs} representa o delta de kronecker. Com efeito, para a primeira condição, note que

$$\sum_{t=1}^N a_{rt}\overline{a}_{st} = \sum_{t=1}^N e^{2\pi i \frac{rt}{N}} e^{-2\pi i \frac{st}{N}} = \sum_{t=1}^N e^{2\pi i \frac{(r-s)}{N} t}.$$

Agora, analisaremos os dois únicos casos possíveis:

- Para $r = s$, teremos

$$\sum_{t=1}^N a_{rt}\overline{a}_{st} = \sum_{t=1}^N e^{2\pi i \frac{(r-s)t}{N}} = \sum_{t=1}^N 1 = N.$$

- Para $r \neq s$, teremos $r - s = k \neq 0$, e portanto

$$\sum_{t=1}^{N} e^{2\pi i \frac{(r-s)t}{N}} = \sum_{t=1}^{N} (e^{2\pi i \frac{k}{N}})^t = \frac{e^{2\pi i \frac{k}{N}} - e^{2\pi i k \frac{N+1}{N}}}{1 - e^{2\pi i \frac{k}{N}}} = \frac{e^{2\pi i \frac{k}{N}} - e^{2\pi i k} e^{2\pi i \frac{k}{N}}}{1 - e^{2\pi i \frac{k}{N}}} = 0.$$

Para a segunda condição,

$$|a_{rs}| = |e^{2\pi i \frac{rs}{N}}| = \left|\cos\left(2\pi \frac{rs}{N}\right) + i\mathrm{sen}\left(2\pi \frac{rs}{N}\right)\right| = 1.$$

$\blacksquare$

Provaremos no próximo teorema a existência de polinômio 2-homogêneo que não é analítico. É importante notar que o teorema possui uma condição adicional (condição (ii)), a qual nos será de grande valia no último capítulo dessa dissertação.

Teorema 3.4. *Existe $P \in \mathcal{P}(^2c_0)$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $z \in \ell_{4+\varepsilon}$ tal que $\sum_\alpha |c_\alpha(P) z^\alpha| = \infty$. Em particular, P não é analítico.*
- (ii) *Para cada $z \in \ell_4$, tem-se $\sum_\alpha |c_\alpha(P) z^\alpha| < \infty$.*

Demonstração. O primeiro passo técnico da demonstração é construir uma sequência $P_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ de polinômios 2-homogêneos, os quais satisfarão propriedades suficientes de modo a nos permitir definir o polinômio P não analítico "colando" todos os P_N's.

Construção dos P_N's: Considere a forma bilinear simétrica $L_N : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$L_N(x,y) = \sum_{r,s}^{N} a_{rs} x_r y_s, \tag{3.9}$$

onde $(a_{rs})_{r,s} = e^{2\pi i \frac{rs}{N}}$ é uma matriz $N \times N$ simétrica e $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ e $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{C}^N$. Afirmamos que

$$\|L_N\| = \sup_{x,y \in \mathbb{D}^N} |L_N(x,y)| \leq N^{\frac{3}{2}}.$$

Com efeito, para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{D}^N$ e $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{D}^N$, segue da Desigualde de Cauchy-Schwarz que

$$\left|\sum_{r,s=1}^{N} a_{rs} x_r y_s\right| = \left|\sum_s \left(\sum_r a_{rs} x_r\right) y_s\right| \leq \left(\sum_s \left|\sum_r a_{rs} x_r\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_s |y_s|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq N^{\frac{1}{2}} \left(\sum_s \left|\sum_r a_{rs} x_r\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = N^{\frac{1}{2}} \left(\sum_s \left(\sum_{r_1} a_{r_1 s} x_{r_1}\right) \overline{\left(\sum_{r_2} a_{r_2 s} x_{r_2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Segue daí e de (3.8) que

$$\left|\sum_{r,s=1}^{N} a_{rs}x_r y_s\right| \leq N^{\frac{1}{2}}\left(\sum_s\left(\sum_{r_1} a_{r_1 s}x_{r_1}\right)\overline{\left(\sum_{r_2} a_{r_2 s}x_{r_2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = N^{\frac{1}{2}}\left(\sum_s\sum_{r_1,r_2} a_{r_1 s}\overline{a_{r_2 s}}x_{r_1}\overline{x_{r_2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= N^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{r_1,r_2} x_{r_1}\overline{x_{r_2}}\left(\sum_s a_{r_1 s}\overline{a_{r_2 s}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = N^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}\left(\sum_r x_r\overline{x_r}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= N\left(\sum_r |x_r|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq N\cdot N^{\frac{1}{2}} = N^{\frac{3}{2}}.$$

Isto mostra que $\|L_N(x,y)\| \leq N^{\frac{3}{2}}$ para todo $(x,y)\in\mathbb{D}^N\times\mathbb{D}^N$, como queríamos.

Agora, considere $P_N:\mathbb{C}^N\longrightarrow\mathbb{C}$ o polinômio 2-homogêneo associado a L_N. Pelo Teorema 1.11, segue que

$$\|P_N\| \leq \|L_N\| \leq N^{\frac{3}{2}}. \tag{3.10}$$

Usando (3.5) e (3.9), P_N pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^N\\|\alpha|=2}} c_\alpha(P_N)z^\alpha = P_N(z) = L_N(z,z) = \sum_{i,j=1} a_{ij}z_iz_j = \sum_i a_{ii}z_iz_i + \sum_{i\neq j} a_{ij}z_iz_j$$
$$= \sum_i a_{ii}z_i^2 + \sum_{i<j}(a_{ij}+a_{ji})z_iz_j. \tag{3.11}$$

Visto que $|\alpha|=2$, tem-se dois casos possíveis para α:

- $\alpha=(0,\dots,0,2,0,\dots0)$, que corresponde ao somatório $\sum_r a_{rr}z_rz_r$;
- $\alpha=(0,\dots,0,1,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, correspondente ao somatório $\sum_{r<s}(a_{rs}+a_{sr})z_rz_s$.

Desse modo, segue daí e de (3.11) que

$$c_\alpha(P_N)=a_{ii} \text{ ou } c_\alpha(P_N)=a_{rs}+a_{sr}. \tag{3.12}$$

Mas como $(a_{rs})_{r,s}$ é simétrica e $|a_{rs}|=1$ para todos r,s, obtemos

$$1\leq|c_\alpha(P_N)|\leq 2 \text{ para cada } \alpha. \tag{3.13}$$

Construção do polinômio 2-homogêneo não analítico: Estabelecidos os polinômios P_N's, foquemos na construção do polinômio 2-homogêneo almejado. Como faremos isso? A ideia principal é utilizar os polinômios P_N's, definidos acima, para obter o polinômio $P\in\mathcal{P}(^2c_0)$ nas condições do teorema. Grosso modo, para esse objetivo iremos "decompor" o espaço c_0 em blocos de tamanhos apropriados e, posteriormente, "copiaremos" os polinômios P_N's sobre esses blocos. Por fim, o polinômio P não analítico será obtido "colando" todas essas cópias dos P_N's.

Passemos para a construção:

(1) <u>*Decompondo c_0 em blocos:*</u> Iremos decompor cada $z = (z_j)_j \in c_0$ em blocos de comprimento 2^n da seguinte forma:

$$z = (\underbrace{z_1, z_2}_{z^{(1)}}, \underbrace{z_3, z_4, z_5, z_6}_{z^{(2)}}, \underbrace{z_7, \ldots, z_{14}}_{z^{(3)}}, \ldots). \tag{3.14}$$

Cada bloco deste pode ser representado como

$$z^{(n)} = \sum_{j \in B_n} z_j e_j \in \mathbb{C}^{2^n},$$

onde $B_n = \{2^n - 1, 2^n, \ldots, 2^{n+1} - 2\}$.

(2) <u>*Copiando os P_N's nos blocos:*</u> Para cada n, defina a projeção

$$\pi_n : c_0 \longrightarrow \ell_\infty^{2^n} \text{ por } \pi_n(z) = z^{(n)}.$$

Considere o polinômio 2-homogêneo

$$Q_n = \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} P_{2^n} \circ \pi_n : c_0 \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Note que $\|Q_n\| \leq \dfrac{1}{n^2}$. De fato, por (3.6),

$$\begin{aligned} \|Q_n\| &= \left\| \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} P_{2^n} \circ \pi_n \right\| \leq \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \|P_{2^n}\| \|\pi_n\| \\ &\leq \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} (2^n)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{n^2} \end{aligned} \tag{3.15}$$

(3) <u>*Colando as cópias dos P_N's:*</u> Defina

$$P : c_0 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ dado por } P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(z).$$

Note que P está bem definido e é um polinômio 2-homogêneo contínuo em c_0. Com efeito, segue de (3.15) que a série $\sum_n Q_n$ converge absolutamente no espaço $\mathcal{P}(^2c_0)$; mas, como este espaço é Banach, a convergência absoluta deve implicar a convergência da sequência para um elemento do espaço. Ou seja, $P \in \mathcal{P}(^2c_0)$.

<u>Mostrando que P satisfaz o desejado</u>: Primeiro, note que pelo Teorema 2.17, para cada $z \in c_{00}$,

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} P_{2^n}(\pi_n(z))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=2}} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} c_\alpha(P_{2^n})(\pi_n(z))^\alpha$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=2 \\ \text{supp}\alpha \subset B_n}} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} c_\alpha(P_{2^n}) z^\alpha.$$

Logo, usando (3.13) e a unicidade dos coeficientes de uma série de monômios, concluímos que para cada $z \in c_0$, devemos ter

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(P) z^\alpha| &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=2 \\ \text{supp}\alpha \subset B_n}} \left| \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} c_\alpha(P_{2^n}) z^\alpha \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=2 \\ \text{supp}\alpha \subset B_n}} |c_\alpha(P_{2^n}) z^\alpha| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{2^n} \\ |\alpha|=2}} |c_\alpha(P_{2^n})| |z^{(n)}|^\alpha \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |z_k^{(n)}| \right)^2. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

No intuito de provar $i)$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Fixe $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4+\varepsilon}$. Uma conta simples mostra que $0 < \delta < 1$ e $4 + \varepsilon = 4\dfrac{1}{1-\delta}$. Visto que $2^\delta > 1$, podemos escolher um número $0 < b < 1$ de modo que $2^\delta b^{1-\delta} > 1$. Defina uma sequência $w = (w_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$w_k^{(n)} = \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{n}{4}(1-\delta)} \quad \text{para} \;\; k = 1, \ldots, 2^n. \qquad (3.17)$$

Note que $w \in \ell_{4+\varepsilon}$, pois

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k^{4+\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{n}{4}(1-\delta)\frac{4}{1-\delta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} b^n = \frac{b}{1-b} < \infty.$$

Por outro lado, apenas usando a definição de w, obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |w_k^{(n)}| \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \left(2^n \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{n}{4}(1-\delta)} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \left(2^{2n} \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{n}{2}(1-\delta)} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \left(2^{2n-\frac{n}{2}(1-\delta)} b^{\frac{n}{2}(1-\delta)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}+\frac{3n+n\delta}{2}} b^{\frac{n}{2}(1-\delta)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{\frac{n}{2}\delta} b^{\frac{n}{2}(1-\delta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ((2^{\delta} b^{(1-\delta)})^{\frac{1}{2}})^n.$$

Mas esta série não converge, pois $2^{\delta} b^{1-\delta} > 1$. Segue daí e de (3.16) o desejado.

Finalmente, provemos (ii). Dado $z \in \ell_4$, segue de (3.13) e da Desigualdade de Hölder que

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(P) z^\alpha| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{2^n} \\ |\alpha|=2}} |c_\alpha(P_{2^n})| |z^{(n)}|^\alpha \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{2^n} \\ |\alpha|=2}} |z^{(n)}|^\alpha$$

$$\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |z_k^{(n)}| \right)^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \left(\left(\sum_{k=1}^{2^n} 1 \right)^{\frac{3}{4}} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |z_k^{(n)}|^4 \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{-\frac{3n}{2}} \left(((2^n)^{\frac{3}{4}})^2 \left(\sum_{k=1}^{2^n} |z_k^{(n)}|^4 \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\left(\sum_{k=1}^{2^n} |z_k^{(n)}|^4 \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \|z\|_4^2 < \infty.$$

Isto completa a demonstração. ■

3.3 Polinômios m-homogêneos não analíticos para $m \geq 3$

Nesta seção estendemos a construção realizada na Proposição 3.4 para o caso $m \geq 3$. Mais especificamente, para qualquer $m \geq 3$, construiremos um polinômio m-homogêneo que não é analítico para algum ponto $z \in c_0$. Para isso, precisamos de três lemas. Exibiremos o primeiro deles sem uma demonstração.

Lema 3.5. *Seja p um número primo e $1 \neq \zeta \in \mathbb{C}$ tal que $\zeta^p = 1$. Então $\{\zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{p-1}\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Veja [8, Proposition 4.9]. ■

O próximo lema servirá para construir os polinômios que substituirão os polinômios P_N's na demonstração do caso 2-homogêneo da última seção. Ressalta-se que muitas das argumentações usadas na demonstração desse lema estão na prova concernente à existência do polinômio 2-homogêneo não analítico, a qual foi elaborada na última seção. Devido a isso, e para evitar muitas repetições, seremos mais concisos durante a demonstração do lema seguinte.

Lema 3.6. *Sejam $m \geq 2$ um número natural e $p > m$ um número primo. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar um polinômio m-homogêneo $P_n : \ell_\infty^{p^n} \to \mathbb{C}$ de modo que cada polinômio goza das seguintes propriedades:*

(i) $\|P_n : \ell_\infty^{p^n} \to \mathbb{C}\| \leq (p^n)^{\frac{m+1}{2}}$ para todo n.

(ii) $\mu(m,p) = \sup\{|c_\alpha(P_n)| : n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^{p^n},\ |\alpha| = m\} < \infty$.

(iii) $\eta(m,p) = \inf\{|c_\alpha(P_n)| : n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^{p^n}, |\alpha| = m\} > 0$.

Demonstração. Nesta demonstração, procederemos do seguinte modo: Primeiro, veremos como construir polinômios m-homogêneos satisfazendo a condição (i). Para isso, definiremos formas m-lineares via as suas representações matriciais e, posteriormente, escolheremos os polinômios como sendo aqueles associados à essas formas m-lineares. Sabido como construir polinômios que satisfazem a condição (i), selecionaremos matrizes com propriedades mais restritivas de modo que as condições (ii) e (iii) também sejam satisfeitas. Com esse propósito, construiremos indutivamente uma sequência de matrizes M_n's, de ordem $p^n \times p^n$ para cada n, cujos coeficientes são constituídos de p-ésimas raízes da unidade (em particular, são finitos!). Passemos a demonstração:

Construindo polinômios satisfazendo a condição (i): Fixe $N \in \mathbb{N}$. Defina uma matriz quadrada $(a_{ij})_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots N$, tal que

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_{ik}\overline{a}_{jk} = N\delta_{ij}, \\ |a_{ij}| = 1. \end{cases} \tag{3.18}$$

Seja $L_N : \ell_\infty^N \times \cdots \times \ell_\infty^N \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$L_N(e_{i_1}, \ldots, e_{im}) = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{m-1} i_m}. \tag{3.19}$$

Logo, para $z_1, \ldots, z_m \in \ell_\infty^N$, tem-se

$$\begin{aligned} L_N(z_1, \ldots, z_m) &= \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{m-1} i_m} z_1(i_1) \cdots z_m(i_m) \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1} a_{i_1 \cdots i_m} z_1(i_1) \cdots z_m(i_m). \end{aligned}$$

Mostremos agora que

$$\|L_N\| \leq N^{\frac{m+1}{2}}, \quad \text{onde} \quad \|L_N\| = \sup_{z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{D}^N} |L(z_1, \ldots, z_N)|.$$

Para isso, faremos primeiro o caso $m = 3$. Sejam $x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N)$ e $z = (z_1, \ldots, z_N)$ vetores em $\mathbb{D}^N$. Temos

$$|L_N(x, y, z)| = \left| \sum_{i,j,k=1}^{N} a_{ij} a_{jk} x_i y_j z_k \right| \leq \sum_k \left| \sum_{i,j} a_{ij} a_{jk} x_i y_j \right| |z_k|$$

$$\leq \left(\sum_k \left|\sum_{i,j} a_{ij}a_{jk}x_iy_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k |z_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq N^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \left|\sum_{i,j} a_{ij}a_{jk}x_iy_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= N^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \left(\sum_{i_1j_1} a_{i_1j_1}a_{j_1k}x_{i_1}y_{j_1}\right)\overline{\left(\sum_{i_2,j_2} a_{i_2j_2}a_{j_2k}x_{i_2}y_{j_2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= N^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{i_1,i_2\\ j_1,j_2}} a_{i_1j_1}\overline{a}_{i_2j_2}x_{i_1}\overline{x}_{i_2}y_{j_1}\overline{y}_{j_2}\sum_k a_{j_1k}\overline{a}_{j_2k}\right)^{\frac{1}{2}} = N^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{i_1,i_2\\ j}} a_{i_1j}\overline{a}_{i_2j}x_{i_1}\overline{x}_{i_2}y_j\overline{y}_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= N \left(\sum_j \left|\sum_i a_{ij}x_i\right|^2 |y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq N \left(\sum_j \left(\sum_{i_1} a_{i_1j}x_{i_1}\right)\overline{\left(\sum_{i_2} a_{i_2j}x_{i_2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= N \left(\sum_{i_1,i_2}\sum_j a_{i_1j}\overline{a}_{i_2j}x_{i_1}\overline{x}_{i_2}\right)^{\frac{1}{2}} = N^{\frac{3}{2}} \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq N^{\frac{3+1}{2}} = N^2.$$

No caso geral, tomando $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{D}^N$ e repetindo o processo anterior, obtemos

$$\|L_N\| \leq N^{\frac{m+1}{2}}. \tag{3.20}$$

Desse modo, se P_n é o polinômio m-homogêneo dado por $P_n(x) = L_{p^n}x^m$, tem-se

$$\|P_n\| \leq \|L_{p^n}\| \leq (p^n)^{\frac{m+1}{2}},$$

e portanto a condição (i) é satisfeita para polinômios definidos por esse método.

Selecionando matrizes M_n's convenientes: Para que os polinômios P_n's definidos como acima também satisfaçam as outras condições, devemos selecionar matrizes $M_n = (a_{rs}^{(n)})_{r,s}$, $r, s = 1, \ldots, p^n$ e $n \in \mathbb{N}$, cujos seus coeficientes sejam mais restritivos. Façamos isso via um processo indutivo, construindo uma sequência de matrizes $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que cada M_n será uma matriz quadrada $p^n \times p^n$. Para $n = 1$, defina

$$M_1 = (m_{rs})_{r,s} = (e^{2\pi\frac{rs}{p}})_{r,s},\ r, s = 1, \ldots, p.$$

Depois, para $n = 2$, defina

$$M_2 = \begin{pmatrix} m_{11}M_1 & \dots & m_{1p}M_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1}M_1 & \dots & m_{pp}M_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11}m_{11} & \dots & m_{11}m_{1p} & \dots\dots & m_{1p}m_{11} & \dots & m_{1p}m_{1p} \\ m_{11}m_{21} & \dots & m_{11}m_{2p} & \dots\dots & m_{1p}m_{21} & \dots & m_{1p}m_{2p} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ m_{11}m_{p1} & \dots & m_{11}m_{pp} & \dots\dots & m_{1p}m_{p1} & \dots & m_{1p}m_{pp} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ m_{p1}m_{p1} & \dots & m_{p1}m_{pp} & \dots\dots & m_{pp}m_{p1} & \dots & m_{pp}m_{pp} \end{pmatrix}.$$

Por fim, para $n \geq 3$, defina indutivamente

$$M_n = \begin{pmatrix} m_{11}M_{n-1} & \dots & m_{1p}M_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1}M_{n-1} & \dots & m_{pp}M_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Note que cada matriz M_n é de ordem $p^n \times p^n$ e, escrevendo $M_n = (a_{rs}^{(n)})_{r,s=1,\dots,p^n}$, segue que cada $a_{rs}^{(n)}$ é um produto de n elementos de M_1. Desse modo, cada $a_{rs}^{(n)}$ é da forma

$$a_{rs}^{(n)} = e^{2\pi i \frac{r_1 s_1 + \dots + r_n s_n}{p}},$$

o que implica

$$(a_{rs}^{(n)})^p = 1 \ \text{ e } \ |a_{rs}^n| = 1 \ \text{ para } \ \text{todo } \ r, s.$$

Mostraremos por indução que para quaisquer r, s, n vale

$$\sum_{t=1}^{p^n} a_{rt}^{(n)} \overline{a_{st}^{(n)}} = p^n \delta_{rs}. \tag{3.21}$$

O caso $n = 1$ está mostrado na última seção (veja Observação 3.3). Para o caso $n = 2$, note que a somatória (3.21) é a soma de produtos entre elementos da r-ésima e s-ésima linha de M_2, as quais têm as seguintes formas (com r', r'', s' e s'' dependendo das linhas r e s escolhidas):

- *r-ésima linha:*

$$(m_{r'1}\, m_{r''1}, \dots, m_{r'1}\, m_{r''p}, m_{r'2}\, m_{r''1}, \dots, m_{r'2}\, m_{r''p}, \dots, m_{r'p}\, m_{r''1}, \dots, m_{r'p}\, m_{r''p}).$$

- *s-ésima linha:*

$$(m_{s'1}\, m_{s''1}, \dots, m_{s'1}\, m_{s''p}, m_{s'2}\, m_{s''1}, \dots, m_{s'2}\, m_{s''p}, \dots, m_{s'p}\, m_{s''1}, \dots, m_{s'p}\, m_{s''p}).$$

Com essa notação, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{p^2} a_{rt}^{(2)} \overline{a_{st}^{(2)}} &= m_{r'1}m_{r''1}\overline{m_{s'1}m_{s''1}} + \cdots + m_{r'1}m_{r''p}\overline{m_{s'1}m_{s''p}} + m_{r'2}m_{r''1}\overline{m_{s'2}m_{s''1}} + \cdots \\
&+ m_{r'2}m_{r''p}\overline{m_{s'2}m_{s''p}} + \cdots + m_{r'p}m_{r''1}\overline{m_{s'p}m_{s''1}} + \cdots + m_{r'p}m_{r''p}\overline{m_{s'p}m_{s''p}} \\
&= m_{r'1}\overline{m}_{s'1}(m_{r''1}\overline{m}_{s''1} + \cdots + m_{r''p}\overline{m}_{s''p}) + \cdots \\
&+ m_{r'p}\overline{m}_{s'p}(m_{r''1}\overline{m}_{s''1} + \cdots + m_{r''p}\overline{m}_{s''p}) \\
&= (m_{r'1}\overline{m}_{s'1} + \cdots + m_{r'p}\overline{m}_{s'p})(m_{r''1}\overline{m}_{s''1} + \cdots + m_{r''p}\overline{m}_{s''p}) \\
&= \left(\sum_{t=1}^{p} a_{r't}^{(1)}\overline{a_{s't}^{(1)}}\right)\left(\sum_{t=1}^{p} a_{r''t}^{(1)}\overline{a_{s''t}^{(1)}}\right) = p\delta_{r's'}p\delta_{r''s''} = p^2\delta_{r's'}\delta_{r''s''}
\end{aligned}
$$

Continuando o processo indutivo, suponha que o resultado seja válido para $n-1$. A r-ésima e s-ésima linhas de M_{n-1} têm a forma:

- *r-ésima linha:*

$$(m_{r'1}\, a_{r''1}^{(n-1)}, \ldots, m_{r'1}\, a_{r''p}^{(n-1)}, m_{r'2}\, a_{r''1}^{(n-1)}, \ldots, m_{r'2}\, a_{r''p}^{(n-1)}, \ldots m_{r'p}\, a_{r''1}^{(n-1)}, \ldots, m_{r'p}\, a_{r''p}^{(n-1)}).$$

- *s-ésima linha:*

$$(m_{s'1}\, a_{s''1}^{(n-1)}, \ldots, m_{s'1}\, a_{s''p}^{(n-1)}, m_{s'2}\, a_{s''1}^{(n-1)}, \ldots, m_{s'2}\, a_{s''p}^{(n-1)}, \ldots, m_{s'p}\, a_{s''1}^{(n-1)}, \ldots, m_{s'p}\, a_{s''p}^{(n-1)})$$

Deste modo, por hipótese de indução, obtemos

$$\sum_{t=1}^{p^n} a_{rt}^{(n)}\overline{a_{st}^{(n)}} = \left(\sum_{t=1}^{p-1} a_{r't}^{(1)}\overline{a_{s't}^{(1)}}\right)\left(\sum_{t=1}^{p-1} a_{r''t}^{(n-1)}\overline{a_{s''t}^{(n-1)}}\right) = p\delta_{r's'}p^{n-1}\delta_{r''s''}.$$

Note que $r = s$ se, e somente se, $(r', r'') = (s', s'')$. Donde, $\delta_{rs} = \delta_{r's'}\delta_{r''s''}$, e portanto

$$\sum_{t=1}^{p^n} = a_{rt}^{(n)}\overline{a_{st}^{(n)}} = p^n\delta_{rs}.$$

Isto mostra que (3.21) vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Visto que a matriz M_n satisfaz (3.18), sabemos da primeira parte da demonstração que ao escolhermos L_{p^n} associado à matriz $(a_{rs}^{(n)})_{r,s}$ (definida como em (3.19)), segue que L_{p^n} satisfaz (3.20). Logo, o polinômio m-homogêneo associado à essa forma m-linear cumpre o item (i), pois

$$\|P_n\| \leq \|L_{p^n}\| \leq p^{n\frac{m+1}{2}}.$$

Mostrando as condições (ii) e (iii): Considere os polinômios m-homogêneos P_n's definidos acima via as matrizes M_n's. Vejamos que eles também satisfazem as condições (i) e (ii).

No intuito de simplificar notação, para $n \in \mathbb{N}$ fixo, denotaremos $a_{rs}^{(n)}$ simplesmente por a_{rs}. Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p^n}) \in \mathbb{N}_0^{p^n}$, com $|\alpha| = m$, correspondente ao índice (veja (3.1))

$$(i_1, \ldots, i_m) = (1, \overset{\alpha_1}{\ldots}, 1, 2, \overset{\alpha_2}{\ldots}, 2, \ldots, p^n, \overset{\alpha_{p^n}}{\ldots}, p^n) \in \mathscr{I}(m, p^n).$$

Segue de (3.4) que os coeficientes de P_n e L_{p^n} estão associados através da seguinte igualdade:

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \sum_{\sigma \in S_m} a_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}} \cdots a_{i_{\sigma(m-1)} i_{\sigma(m)}}.$$

Donde,

$$\begin{aligned} \alpha! |c_\alpha(P_n)| &= \left| \sum_{\sigma \in S_m} a_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}} \cdots a_{i_{\sigma(m-1)} i_{\sigma(m)}} \right| \\ &\leq \sum_{\sigma \in S_m} |a_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}} \cdots a_{i_{\sigma(m-1)} i_{\sigma(m)}}| \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} 1 = m!. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mu(m, p) &= \sup\{|c_\alpha(P_n)| : n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^{p^n}, |\alpha| = m\} \\ &\leq \sup\{\alpha! |c_\alpha(P_n)| : n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^{p^n}, |\alpha| = m\} \leq m! < \infty. \end{aligned}$$

Por fim, provaremos a validade de (iii). Primeiramente, mostraremos que valem os seguintes itens:

(a) $\alpha! c_\alpha(P_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^{p^n}$ com $|\alpha| = m$;

(b) $|\{\alpha! |c_\alpha(P_n)| : n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^{p^n}, |\alpha| = m\}| < \infty$.

Para o item (a), suponhamos por absurdo que exista $\alpha \in \mathbb{N}^{p^n}$ tal que

$$\alpha! c_\alpha(P_n) = \sum_{\sigma \in S_m} a_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}} \cdots a_{i_{\sigma(m-1)} i_{\sigma(m)}} = 0. \tag{3.22}$$

Lembre que o conjunto de todas as p-ésimas raízes da unidade é dado por $\{e^{2\pi k i/p} : k = 0, 1, \ldots, p-1\}$. Defina $\zeta := e^{2\pi k i/p}$. Nesse caso, é claro que qualquer p-ésima raíz da unidade deve ser da forma ζ^k para algum $k = 0, \ldots, p-1$. Ora, como o produto $a_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}} \cdots a_{i_{\sigma(m-1)} i_{\sigma(m)}}$ é uma p-ésima raiz da unidade, existe $0 \leq k \leq p-1$ tal que

$$\zeta^k = a_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}} \cdots a_{i_{\sigma(m-1)} i_{\sigma(m)}}.$$

Deste modo,

$$\alpha! c_\alpha(P_n) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \zeta^k, \tag{3.23}$$

onde $\lambda_k = \lambda_k(\alpha)$ é o número de vezes que o termo ζ^k aparece em (3.22) e

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k = |S_m| = m!. \tag{3.24}$$

Note que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \zeta^k = \sum_{k=0}^{p-1} (e^{\frac{2\pi i}{p}})^k = \frac{1 - \left(e^{2\pi i/p}\right)^p}{1 - e^{2\pi i/p}} = 0,$$

e portanto

$$\sum_{k=1}^{p-1} \zeta^k = -1.$$

Segue daí e de (3.22) e (3.23) que

$$0 = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \zeta^k = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \zeta^k = -\lambda_0 \sum_{k=1}^{p-1} \zeta^k + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \zeta^k = \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda_k - \lambda_0)\zeta^k.$$

Pelo Lema 3.5, segue que $\lambda_k - \lambda_0 = 0$ para cada k. Assim,

$$m! = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_0 = \lambda_0 p,$$

o que implica $\dfrac{m!}{p} = \lambda_0 \in \mathbb{N}$. Mas isso é um absurdo pois, visto que p é um número primo maior do que ou igual à m, p não pode dividir m e nem $m-1, m-2, \ldots, 1$. Portanto, devemos ter $\alpha! c_\alpha(P_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^{p^n}$, o que prova (a).

Para a verificação de (b), note que segue de (3.24) que $\lambda_k \leq m!$ para cada k. Donde,

$$|\alpha! c_\alpha(P_n)| = \left| \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \zeta^k \right| \leq \sum_{k=0}^{p-1} |\lambda_k \zeta^k| \leq \sum_{k=0}^{p-1} m! \leq p \cdot m!,$$

o que implica

$$|\{\alpha! |c_\alpha(P_n)| : n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^{p^n}, |\alpha| = m\}| < \infty.$$

Assim, como se cumprem (a) e (b), obtemos

$$\begin{aligned}
\eta(m,p) &= \inf \left\{ \frac{1}{\alpha!} \alpha! |c_\alpha(P_n)| : n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^{p^n}, |\alpha| = m \right\} \\
&\geq \frac{1}{(m!)^m} \inf\{\alpha! |c_\alpha(P_n)| : n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^{p^n}, |\alpha| = m\} > 0,
\end{aligned}$$

e a demonstração está completa. ■

Lema 3.7. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $z_1, \ldots, z_n$ números reais não negativos. Então as seguintes desigualdades são válidas:*

$$\sum_{|\alpha|=m} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} z_j \right)^m \leq m! \sum_{|\alpha|=m} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}, \; m \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre n. Devido a isso, devemos analisar cada desigualdade separadamente. Antes disso, veja que para $n = 1$, ambas as desigualdades em (3.25) são trivialmente satisfeitas para todo $m \in \mathbb{N}$.

Suponha, por hipótese de indução, que a segunda desigualdade em (3.25) seja verdadeira para todo natural menor ou igual à algum $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que a desigualdade continua válida para $n + 1$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n+1} z_j\right)^m &= \left(\sum_{j=1}^{n} z_j + z_{n+1}\right)^m \\
&= \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)^{m-\ell} z_{n+1}^{\ell} \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} (m-\ell)! \sum_{|\alpha|=m-\ell} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \cdot z_{n+1}^{\ell} && \text{(por H. I.)} \\
&\leq m! \sum_{\ell=0}^{m} \sum_{|\alpha|=m-\ell} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \cdot z_{n+1}^{\ell} \\
&= m! \sum_{|\alpha|=m} z_1^{\alpha_1} \cdots z_{n+1}^{\alpha_{n+1}},
\end{aligned}$$

o que prova a validade da segunda desigualdade em (3.25).

Suponha agora, por hipótese de indução, que a primeira desigualdade em (3.25) seja verdadeira para todo natural menor ou igual à algum $n \in \mathbb{N}$. Portanto, usando os mesmos cálculos feitos acima, obtém-se

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n+1} z_j\right)^m &= \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)^{m-\ell} z_{n+1}^{\ell} \\
&\geq \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} \sum_{|\alpha|=m-\ell} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \cdot z_{n+1}^{\ell} && \text{(por H.I.)} \\
&\geq \sum_{\ell=0}^{m} \sum_{|\alpha|=m-\ell} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \cdot z_{n+1}^{\ell} \\
&= \sum_{|\alpha|=m} z_1^{\alpha_1} \cdots z_{n+1}^{\alpha_{n+1}},
\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. ■

Estamos preparados para provar a existência de polinômios m-homogêneos não analíticos para $m \geq 3$. A existência desses polinômios segue da condição (i) do próximo teorema. A condição (ii), se fará útil no último capítulo da dissertação. Ademais, ressalta-se que a demonstração do próximo teorema possui muitas argumentações similares à demonstração do caso 2-homogêneo. Devido a isso, e ainda objetivando evitar repetições excessivas, faremos uma demonstração mais concisa.

Teorema 3.8. *Para cada $m \geq 2$ fixo, existe $P \in \mathcal{P}(^m c_0)$ tal que*

(i) Para cada $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $z \in \ell_{\frac{2m}{m-1}+\varepsilon}$ com $\sum_{\alpha} |c_\alpha(P)z^\alpha| = \infty$. Em particular, o polinômio P não é analítico.

(ii) Para cada $z \in \ell_{\frac{2m}{m-1}}$, temos $\sum_{\alpha} |c_\alpha(P)z^\alpha| < \infty$.

Demonstração. Sejam $p > m$ e $P_n \in \mathcal{P}(^m \ell_\infty^{p^n})$ satisfazendo as condições do Lema 3.6. Seja $z = (z_j)_j \in c_0$. Iremos decompor a sequência $z = (z_j)_j$ em blocos de comprimentos $p, p^2, \ldots$ do seguinte modo:

$$z = (\underbrace{z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \overset{p}{\ldots}, z_p^{(1)}}_{z^{(1)}}, \underbrace{z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots \overset{p^2}{\ldots} \ldots, z_{p^2}^{(2)}}_{z^{(2)}}, \underbrace{z_1^{(3)}, z_2^{(3)}, \ldots \ldots \overset{p^3}{\ldots} \ldots \ldots, z_{p^3}^{(3)}, \ldots}_{z^{(3)}}) \tag{3.26}$$

Assim, o n-ésimo bloco pode ser escrito como

$$z^{(n)} \;\; = \;\; \sum_{j \in B_n} z_j^{(n)} e_j \in \ell_\infty^{p^n},$$

onde

$$B_n = \left\{ \frac{p^n - 1}{p - 1}, \ldots, \frac{p^n - 1}{p - 1} + p^n - 1 \right\}, n \geq 1.$$

Para cada n, considere a contração

$$\pi_n : c_0 \longrightarrow \ell_\infty^{p^n}, \;\; \text{dada por} \;\; \pi_n(z) = z^{(n)},$$

e defina o polinômio m-homogêneo

$$Q_n = \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} P_n \circ \pi_n : c_0 \longrightarrow \mathbb{C}.$$

É claro que P é polinômio m-homogêneo contínuo pois é composta de polinômio m-homogêneo contínuo com o operador linear contínuo π_n. Ademais, note que $\|Q_n\| \leq \dfrac{1}{n^2}$ (conta análoga ao caso 2-homogêneo da última seção). Logo, podemos definir

$$P : c_0 \longrightarrow \mathbb{C} \;\; \text{por} \;\; P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(z). \tag{3.27}$$

Novamente, analogamente ao feito no caso 2-homogêneo da última seção, concluímos que P é um polinômio m-homogêneo contínuo em c_0, pois $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(z)$ converge absolutamente em $\mathcal{P}(^m c_0)$.

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $0 < \delta < 1$ de modo que $\frac{2m}{m-1} + \varepsilon = \frac{2m}{m-1}\frac{1}{1-\delta}$. Como $p^\delta > 1$, pode-se escolher $0 < b < 1$ tal que $p^\delta b^{(1-\delta)} > 1$. Definamos $w = (w^{(n)})_n$ em blocos do seguinte modo:

$$w_k^{(n)} = \left(\frac{b}{p}\right)^{n\frac{m-1}{2m}(1-\delta)} \quad \text{para} \;\; k = 1, \ldots, p^n. \tag{3.28}$$

Temos que $w \in \ell_{\frac{2m}{m-1}+\varepsilon}$. Com efeito,

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k^{\frac{2m}{m-1}\frac{1}{1-\delta}} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p^n}\left(\frac{b}{p}\right)^{n\frac{m-1}{2m}(1-\delta)\frac{2m}{m-1}\frac{1}{1-\delta}} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p^n}\left(\frac{b}{p}\right)^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b^n = \frac{b}{1-b} < \infty.$$

Pelo Teorema 2.17, para cada $z \in c_{00}$, obtemos

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} P_n(\pi_n(z))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} c_\alpha(P_n)(\pi_n(z))^\alpha$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m \\ \mathrm{supp}\alpha\subset B_n}} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} c_\alpha(P_n) z^\alpha.$$

Portanto, pelo item (iii) do Lema 3.6 (denotando $\eta = \eta(m,p)$) e pela unicidade dos coeficientes de uma série de potências de monômios, para cada $z \in c_0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} |c_\alpha(P) z^\alpha| &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m \\ \mathrm{supp}\alpha\subset B_n}} \left| \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} c_\alpha(P_n)(z^{(n)})^\alpha \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} \left| c_\alpha(P_n)(z^{(n)})^\alpha \right| \\
&\geq \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} \left| (z^{(n)})^\alpha \right|
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.7 na última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} |c_\alpha(P) w^\alpha| &\geq \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} \left| (w^{(n)})^\alpha \right| \\
&\geq \frac{\eta}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{p^n} |w_k^{(n)}| \right)^m \\
&= \frac{\eta}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{p^n} \left(\frac{b}{p}\right)^{n\frac{m-1}{2m}(1-\delta)} \right)^m
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\eta}{m!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}p^{-n\frac{m+1}{2}}\left(\frac{b}{p}\right)^{n\frac{m-1}{2m}(1-\delta)m}p^{nm}\\
&= \frac{\eta}{m!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}b^{n\frac{m-1}{2}(1-\delta)}p^{-n\frac{m+1}{2}+nm-n\frac{m-1}{2}(1-\delta)}\\
&= \frac{\eta}{m!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}b^{n\frac{m-1}{2}(1-\delta)}p^{n\frac{m-1}{2}\delta}\\
&= \frac{\eta}{m!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(p^{\delta}b^{1-\delta})^{\frac{m-1}{2}n},
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Mas como $p^{\delta}b^{1-\delta} > 1$, segue que a última série acima não converge, o que prova (i).

Por fim, provemos a condição (ii). Seja $z \in \ell_{\frac{2m}{m-1}}$ e denote $\mu := \mu(m,p)$. Segue do Lema 3.6(ii), da primeira desigualdade em (3.25) e da Desigualdade de Hölder que

$$
\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=m}|c_\alpha(P)z^\alpha| &\leq \mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}p^{-n\frac{m+1}{2}}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{p^n}\\|\alpha|=m}}|(z^{(n)})^\alpha|\\
&\leq \mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}p^{-n\frac{m+1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{p^n}|z_k^{(n)}|\right)^m\\
&\leq \mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}p^{-n\frac{m+1}{2}}\left((p^n)^{\frac{m+1}{2m}}\left(\sum_{k=1}^{p^n}|z_k^{(n)}|^{\frac{2m}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{2m}}\right)^m\\
&\leq \mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\|z\|_{\frac{2m}{m-1}}^m < \infty,
\end{aligned}
$$

o que encerra a demonstração. ■

CAPÍTULO 4

ESPAÇOS VETORIAIS DE POLINÔMIOS NÃO ANALÍTICOS

O estudo de lineabilidade e espaçabilidade consiste na procura por estruturas lineares em conjuntos que a princípio não são lineares. Os termos *lineável* e *espaçável* foram introduzidos por Aron, Gurariy e Seoane-Sepúlveda no ano de 2005 (veja [3]). No entanto, bem antes disso, embora ainda não formalizados, resultados concernentes à lineabilidade e à espaçabilidade já vinham sendo investigados. Com efeito, um dos primeiros resultados nessa área foi provado em [12] por Gurariy em 1966, no qual foi verificado que o conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ e diferenciáveis em nenhum ponto é lineável. Mais recentemente, no ano de 1999, Fonf, Gurariy e Kadets, mostraram em [11] que esse conjunto também é espaçável.

Nos últimos anos, a busca por estruturas lineares em certos conjuntos tem sido bastante explorada, o que pode ser comprovado na referência [2]. Nela, encontram-se vários resultados a cerca da teoria de lineabilidade, os quais aparecem nas mais diversas áreas da Análise Matemática: Análise Complexa, Análise Harmônica, Teoria dos Espaços de Banach, Teoria de Operadores, etc.

Neste capítulo, estamos interessados na lineabilidade/espaçabilidade do conjunto dos polinômios homogêneos não analíticos em c_0.

4.1 O conjunto dos polinômios não analíticos é 2-lineável

Seja $m \geq 2$ um número natural. Nesta seção, verificaremos que o conjunto dos polinômios m-homogêneos contínuos e não analíticos em c_0 é 2-lineável, i.e., existe um espaço vetorial 2-dimensional que (a menos do polinômio nulo) é constituído por polinômios m-homogêneos contínuos e não analíticos. Posteriormente, na próxima seção, estenderemos a construção deste espaço 2-dimensional no intuito de provar que é possível construir um espaço vetorial de dimensão infinita constituído de polinômios m-homogêneos contínuos e não analíticos.

Acreditamos, assim como é exposto na referência [7], que estabelecer primeiro a prova para 2-lineável faz com que, mais adiante, a construção do espaço de dimensão infinita se torne mais clara. Por fim, ressaltamos que toda a construção está baseada no polinômio m-homogêneo não analítico construído na Proposição 3.8. Devido a isso, ao invés de repetir várias contas e argumentações, optamos apenas por indicar em que parte na demonstração da Proposição 3.8 elas se encontram.

Definição 4.1. Sejam E um espaço vetorial normado, $A \subset E$ e μ um número cardinal. Dizemos que o conjunto A é:

(i) *μ-lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão μ.

(ii) *μ-espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial fechado de dimensão μ.

Quando $A \cup \{0\}$ contiver um espaço vetorial (fechado) de dimensão infinita, diremos apenas que A é *lineável* (*espaçável*).

Denotaremos por $\mathscr{N}_m$ o conjunto dos polinômios m-homogêneos contínuos não analíticos em c_0.

Proposição 4.2. *O conjunto $\mathscr{N}_m$ é 2-lineável em $\mathcal{P}(^m c_0)$.*

Demonstração. Seja $p > m$ um primo fixado. Primeiramente, iremos decompor cada $z \in c_0$ em blocos, de modo que dois blocos consecutivos tenham comprimento $p, p^2, p^3, \ldots$; ou seja,

$$z = (\underbrace{z_{1,1}^{(1)}, \overset{p}{\ldots}, z_{1,p}^{(1)}}_{z_1^{(1)}}, \underbrace{z_{2,1}^{(1)}, \overset{p}{\ldots}, z_{2,p}^{(1)}}_{z_2^{(1)}}, \underbrace{z_{1,1}^{(2)}, \overset{p^2}{\ldots\ldots}, z_{1,p^2}^{(2)}}_{z_1^{(2)}}, \underbrace{z_{2,1}^{(2)}, \overset{p^2}{\ldots\ldots}, z_{2,p^2}^{(2)}}_{z_2^{(2)}}, \ldots).$$

Cada $z \in c_0$ pode ser escrito como $z = z_1 + z_2$, onde cada z_j é definido em blocos e o n-ésimo bloco de z_1 e z_2 são dados, respectivamente, por

$$z_1^{(n)} = \sum_{k=0}^{p^n-1} z_{b_n+k} e_{b_n+k} \ \text{ e } \ z_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{p^n-1} z_{c_n+k} e_{c_n+k} \ \text{ para cada } \ n \in \mathbb{N},$$

em que

$$b_n = \frac{2p(p^{n-1}-1)}{p-1} + 1 \ \text{ e } \ c_n = b_n + p^n \ \text{ para cada } \ n \in \mathbb{N}.$$

Note que z_1 é constituído dos primeiros blocos de comprimentos $p, p^2, p^3, \ldots$. De fato, temos

- $supp(z_1^{(1)}) = \{b_1, b_1+1, \ldots, b_1+p-1\} = \{1, 2, \ldots, p\}$;
- $supp(z_1^{(2)}) = \{b_2, b_2+1, \ldots, b_2+p^2-1\} = \{2p+1, 2p+2, \ldots, 2p+p^2\}$;
- $supp(z_1^{(3)}) = \{b_3, b_3+1, \ldots, b_3+p^3-1\} = \{2p^2+2p+1, 2p^2+2p+2, \ldots, 2p^2+2p+p^3\}$;

e assim por diante. De modo análogo tem-se que z_2 é formado dos segundos blocos de comprimentos $p, p^2, p^3, \ldots$. De fato, temos

- $supp(z_2^{(1)}) = \{b_1 + p, b_1 + p + 1, \dots, b_1 + 2p - 1\} = p + supp(z_1^{(1)})$;
- $supp(z_2^{(2)}) = \{b_2 + p^2, b_2 + 1 + p^2, \dots, b_2 + p^2 - 1 + p^2\} = p^2 + supp(z_1^{(2)})$;
- $supp(z_2^{(3)}) = \{b_3 + p^3, b_3 + 1 + p^3, \dots, b_3 + p^3 - 1 + p^3\} = p^3 + supp(z_1^{(3)})$;

e assim por diante.

Sob as mesmas condições do polinômio definido em (3.27), considere os polinômios m-homogêneos definidos por

$$Q_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} P_n(z_1^{(n)}) \text{ e } Q_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} P_n(z_2^{(n)}),$$

onde cada P_n satisfaz as condições do Lema 3.6. Como em (3.15), concluímos que $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(^m c_0)$. Além disso, temos que

$$\max\{\|Q_1\|, \|Q_2\|\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Agora, iremos mostrar que Q_1 e Q_2 não são analíticos. Para isso, devemos exibir um ponto para cada polinômio no qual a série que os define não converge. Considere $w = w_1 + w_2$, onde w_1 e w_2 são definidos em blocos do seguinte modo:

$$w_1 = (\underbrace{z_1^{(1)}, \overset{p}{\dots}, z_p^{(1)}}_{z^{(1)}}, 0, \overset{p}{\dots}, 0, \underbrace{z_1^{(2)}, \overset{p^2}{\dots}, z_{p^2}^{(2)}}_{z^{(2)}}, 0, \overset{p^2}{\dots}, 0, \dots)$$

$$w_2 = (0, \overset{p}{\dots}, 0, \underbrace{z_1^{(1)}, \overset{p}{\dots}, z_p^{(1)}}_{z^{(1)}}, 0, \overset{p^2}{\dots}, 0, \underbrace{z_1^{(2)}, \overset{p^2}{\dots}, z_{p^2}^{(2)}}_{z^{(2)}}, \dots).$$

Ademais, cada $z_k^{(n)}$ é definido como em (3.28). Ou seja,

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{p^n-1} \left(\frac{b}{p}\right)^{n\frac{m-1}{2m}(1-\delta)} e_{b_n+k} \text{ e } w_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{p^n-1} \left(\frac{b}{p}\right)^{n\frac{m-1}{2m}(1-\delta)} e_{c_n+k}.$$

(Lembre que $b > 0$ e $\delta > 0$ foram escolhidos dependendo de um $\varepsilon > 0$.) Seja $B_n = \{b_n, \dots, b_n + p^n - 1\}$. Pelo Teorema 2.17, para cada $z \in c_{00}$ tem-se

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} P_n(z_1^{(n)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha| = m \\ \text{supp}\alpha \subset B_n}} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} c_\alpha(P_n) z^\alpha. \end{aligned}$$

Logo, pela unicidade dos coeficientes, segue em particular que

$$c_\alpha(Q_1) \neq 0 \text{ se e somente se } \text{supp}(\alpha) \subseteq B_n \text{ para algum } n. \tag{4.1}$$

Deste modo, repetindo as argumentações de (3.29), obtemos

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}} |c_\alpha(Q_1)w^\alpha| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m\\ \text{supp}\alpha\subseteq B_n}} |c_\alpha(Q_1)w^\alpha| = \infty. \tag{4.2}$$

Agora, considerando $C_n = \{c_n, \ldots, c_n + p^n - 1\}$, concluímos por igual razão que

$$c_\alpha(Q_2) \neq 0 \text{ se e somente se } \text{supp}(\alpha) \subseteq C_n \text{ para algum } n. \tag{4.3}$$

e

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}} |c_\alpha(Q_2)w^\alpha| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m\\ \text{supp}\alpha\subseteq C_n}} |c_\alpha(Q_2)w^\alpha| = \infty. \tag{4.4}$$

Note que $B_i \cap C_j = \emptyset$ para todo i, j e $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cup C_n)$. De fato, visto que cada $b_n, c_n \in \mathbb{N}$, temos claramente que $\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cup C_n) \subset \mathbb{N}$. Por outro lado, como $c_n = b_n + p^n$, podemos reescrever o conjunto C_n do seguinte modo:

$$C_n = \{b_n + p^n, b_n + p^n + 1, \ldots, b_n + 2p^n - 1\}.$$

Logo, os conjuntos B_n e C_n são consecutivos. Mas como para cada $k \in \mathbb{N}$ dado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq p^n$, devemos ter

$$k \in \bigcup_{i=1}^{p^n}(B_i \cup C_i).$$

Como k foi escolhido de maneira arbitrária, temos $\mathbb{N} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cup C_n)$, como queríamos.

Ainda, como os conjuntos B_n e C_n são consecutivos, os polinômios Q_1 e Q_2 tem suportes mutuamente disjuntos, i. e.

$$\{n \in \mathbb{N} : Q_1(e_n) \neq 0\} \cap \{n \in \mathbb{N} : Q_2(e_n) \neq 0\} = \emptyset.$$

Isto implica que para cada $z \in c_{00}$, vale

$$\begin{aligned}(Q_1 + Q_2)(z) &= Q_1(z) + Q_2(z)\\ &= \sum_\alpha c_\alpha(Q_1)z^\alpha + \sum_\alpha c_\alpha(Q_2)z^\alpha\\ &= \sum_\alpha \left(c_\alpha(Q_1) + c_\alpha(Q_2)\right) z^\alpha.\end{aligned}$$

Logo, pela unicidade dos coeficientes, devemos ter

$$c_\alpha(Q_1 + Q_2) = c_\alpha(Q_1) + c_\alpha(Q_2)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$. Portanto, dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, segue que para cada $z \in c_0$:

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}} |c_\alpha(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)z^\alpha| = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}} |\lambda_1 c_\alpha(Q_1) + \lambda_2 c_\alpha(Q_2)||z^\alpha|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m \\ \text{supp}\alpha \subseteq B_n \cup C_n}} |\lambda_1 c_\alpha(Q_1) + \lambda_2 c_\alpha(Q_2)||z^\alpha|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m \\ \text{supp}\alpha \subseteq B_n}} |\lambda_1||c_\alpha(Q_1) z^\alpha| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m \\ \text{supp}\alpha \subseteq C_n}} |\lambda_2||c_\alpha(Q_2) z^\alpha|, \tag{4.5}$$

onde a última igualdade provém de (4.1) e (4.3). Daí, juntamente com (4.2) e (4.4), concluímos que se λ_1 e λ_2 não forem ambos nulos, então $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ não é analítico em w. Assim, o conjunto

$$X = \{\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 : \lambda_i \in \mathbb{C}\}$$

é um espaço vetorial em $\mathscr{N}_m \cup \{0\}$.

Vejamos que $\dim X = 2$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 = 0. \tag{4.6}$$

Daí, e pela unicidade dos coeficientes de uma série de monômios, segue que

$$c_\alpha(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) = 0 \tag{4.7}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$. Logo, segue de (4.5) que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pois do contrário teríamos $0 = \infty$, o que é claramente uma contradição. Isto prova que o conjunto $\{Q_1, Q_2\}$ é linearmente independente. ■

4.2 Lineabilidade dos polinômios não analíticos

À luz das argumentações utilizadas na demonstração da Proposição 4.2, construiremos uma sequência de polinômios m-homogêneos contínuos e não analíticos, de modo que qualquer polinômio não nulo gerado por uma combinação linear desses polinômios também será não analítico. Em outras palavras, provaremos que $\mathscr{N}_m$ é lineável (mais especificamente, é $\aleph_0$-lineável).

Teorema 4.3. *O conjunto $\mathscr{N}_m$ é lineável em $\mathcal{P}(^m c_0)$.*

Demonstração. Primeiro, construiremos uma sequência $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polinômios não analíticos em c_0 e mostraremos que, dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$, com $\lambda_N \neq 0$, teremos que $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i Q_i$ é não analítico. Posteriormente, provaremos que o conjunto constituído desses polinômios é linearmente independente.

Novamente, comece decompondo c_0 em blocos, agora com o primeiro de comprimento p, depois de comprimento p e p^2 e os seguintes p, p^2, p^3 e assim sucessivamente. Desse modo, para cada $z \in c_0$, teremos

$$z = \left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_1^{(2)}, z_3^{(1)}, z_2^{(2)}, z_1^{(3)}, z_4^{(1)}, z_3^{(2)}, z_2^{(3)}, z_1^{(4)}, \ldots \ldots \right).$$

Importante expressar que nessa demonstração a notação $z_k^{(n)}$ refere-se a *blocos*, diferentemente do Teorema 3.8 no qual utilizamos essa notação para representar os termos de certos blocos $z^{(n)}$'s. Ainda, note que na notação escolhida para a decomposição acima, o subíndice k de $z_k^{(n)}$ conta-nos que estamos exatamente no k-ésimo bloco de tamanho p^n que aparece na decomposição. Ora, cada bloco desse tipo pode ser escrito como

$$z_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{p^n-1} z_{s_k^{(n)}+i} e_{s_k^{(n)}+i},$$

onde $s_k^{(n)}$ define o índice do primeiro elemento do bloco $z_k^{(n)}$, os quais são tais que

$$s_1^{(1)} = 1, \;\; s_k^{(1)} = \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{i} p^j \right) + 1$$

e

$$s_{k-i}^{(1+i)} = s_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{i} p^j \;\; \text{para} \;\; i = 1, \ldots, k-1.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos o polinômio

$$Q_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} P_n(z_k^{(n)}),$$

onde cada P_n satisfaz as condições do Lema 3.6. Logo, como na Proposição 4.2, temos que $Q_k \in \mathcal{P}(^m c_0)$ e $\|Q_k\| \leq \frac{\pi^2}{6}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Agora, para quaisquer $k, n \in \mathbb{N}$, defina o conjunto

$$M_k^{(n)} = \{s_k^{(n)}, s_k^{(n)} + 1, \ldots, s_k^{(n)} + p^n - 1\}.$$

Note que os conjuntos $M_k^{(n)}$'s são dois a dois disjuntos para todos $k, n \in \mathbb{N}$. Com efeito, lembre que como definido acima, $s_k^{(n)}$ é o índice do primeiro elemento do bloco $z_k^{(n)}$, sendo que este bloco tem comprimento exatamente p^n. Em outras palavras, cada $M_k^{(n)}$ é constituído dos índices referentes à cada bloco $z_k^{(n)}$ e, por conseguinte, como decompomos c_0 em blocos dois a dois disjuntos, os conjuntos $M_k^{(n)}$'s devem ser dois a dois disjuntos. Desse modo, para cada $z = (z_j)_{j=1}^{\infty}$, visto que $M_k^{(n)}$ é suporte para o bloco $z_k^{(n)}$, podemos denotar

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in M_k^{(n)}} z_j \, e_j.$$

Com a notação acima, para cada $\ell \in \mathbb{N}$ fixo, defina $\widetilde{w}_\ell = (w_{\ell,j})_{j=1}^\infty$ tal que

$$\widetilde{w}_\ell = \sum_{n=1}^\infty \sum_{j\in M_\ell^{(n)}} w_{\ell,j}e_j = \sum_{n=1}^\infty \sum_{j\in M_\ell^{(n)}} \left(\frac{b}{p}\right)^{n^{\frac{m-1}{2m}(1-\delta)}} e_j, \tag{4.8}$$

onde $b > 0$ e $\delta > 0$ são escolhidos como no Teorema 3.8 para algum $\varepsilon > 0$ dado.

Paremos um pouco para entender como é a sequência $\widetilde{w}_\ell = (w_{\ell,j})_{j=1}^\infty$, para cada $\ell \in \mathbb{N}$. Primeiro, lembre que pela decomposição de c_0 definida no início da demonstração, podemos escrever

$$\widetilde{w}_\ell = ((\widetilde{w}_\ell)_1^{(1)}, (\widetilde{w}_\ell)_2^{(1)}, (\widetilde{w}_\ell)_1^{(2)}, (\widetilde{w}_\ell)_3^{(1)}, (\widetilde{w}_\ell)_2^{(2)}, (\widetilde{w}_\ell)_1^{(3)}, \ldots).$$

Desse modo, para sabermos precisamente como é a sequência $\widetilde{w}_\ell$, é suficiente conhecermos quais são os valores nos blocos $(\widetilde{w}_\ell)_k^{(n)}$'s. Mas o que nos diz (4.8)? Diz que os termos da sequência $\widetilde{w}_\ell$ correspondentes ao bloco $(\widetilde{w}_\ell)_\ell^{(n)}$ assumem todos valores iguais à $(b/p)^{n^{\frac{m-1}{2m}(1-\delta)}}$ e, por outro lado, os termos restantes são todos iguais a zero.

Agora, exibiremos um vetor $\widetilde{w}$ em c_0 no qual as séries de monômios de cada Q_k diverge absolutamente. Diferentemente do realizado na Proposição 4.2, não podemos tomar $\widetilde{w} = \sum_{\ell=1}^\infty \widetilde{w}_\ell$, pois nesse caso $\widetilde{w}$ teria infinitos termos iguais à $(b/p)^{n^{\frac{m-1}{2m}(1-\delta)}}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ dado, o que implicaria $\widetilde{w} \notin c_0$. Para que isso não ocorra, façamos

$$\widetilde{w} := \sum_{\ell=1}^\infty \frac{1}{\ell^2}\widetilde{w}_\ell.$$

Pelo Teorema 2.17, para cada $z \in c_{00}$,

$$\begin{aligned} Q_k(z) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} p^{-n^{\frac{m+1}{2}}} P_n(z_k^{(n)}) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m \\ \text{supp}\alpha\subset M_k^{(n)}}} \frac{1}{n^2} p^{-n^{\frac{m+1}{2}}} c_\alpha(P_n) z^\alpha. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Segue da unicidade dos coeficientes que

$$c_\alpha(Q_k) \neq 0 \text{ se e somente se } \text{supp}(\alpha) \subseteq M_k^{(n)} \text{ para algum } n \tag{4.10}$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} |c_\alpha(Q_k)\widetilde{w}^\alpha| &= \sum_{n=1}^\infty \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m \\ \text{supp}\alpha\subseteq M_k^{(n)}}} |c_\alpha(Q_k)\widetilde{w}^\alpha| \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} p^{-n^{\frac{m+1}{2}}} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m \\ \text{supp}\alpha\subseteq M_k^{(n)}}} |c_\alpha(P_n)\widetilde{w}^\alpha| \end{aligned}$$

$$\geq \frac{\eta}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}p^{-n\frac{m+1}{2}}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{p^n}\\|\alpha|=m}}|(\widetilde{w}_k)_k^{(n)}|^{\alpha}$$

$$\geq \frac{\eta}{m!k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(p^{\delta}b^{1-\delta})^{\frac{m-1}{2}n}, \tag{4.11}$$

onde a primeira igualdade é devida a (4.10), a segunda igualdade é devida à unicidade dos coeficientes através de (4.9), $\eta = \inf_{\alpha,n}|c_\alpha(P_n)| > 0$ e a última desigualdade é devida ao Lema 3.7. Note que a série (4.11) diverge pois $p^{\delta}b^{1-\delta} > 1$. Portanto, a sequência $(Q_k)_{k=1}^{\infty}$ é constituída por polinômios m-homogêneos contínuos e não analíticos em $\widetilde{w}$.

Agora, mostraremos que combinações lineares não nulas dos polinômios Q_k's ainda não são polinômios analíticos. Para isso, sejam $\lambda_1,\dots,\lambda_N\in\mathbb{C}$, $\lambda_N\neq 0$. Note que como os polinômios $Q_1,\dots,Q_N$ têm suportes mutuamente disjuntos (pois cada Q_k é suportado em $\bigcup_{n=1}^{\infty}M_k^{(n)}$ e $M_k^{(n)}$'s são dois a dois disjuntos), para cada $z\in c_{00}$ tem-se

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{N}Q_k\right)(z) &= Q_1(z)+\cdots+Q_N(z)\\ &= \sum_{\alpha}c_\alpha(Q_1)z^\alpha+\cdots+\sum_{\alpha}c_\alpha(Q_N)z^\alpha\\ &= \sum_{\alpha}\sum_{k=1}^{N}c_\alpha(Q_k)z^\alpha.\end{aligned}$$

Deste modo, pela unicidade dos coeficientes, segue que

$$c_\alpha\left(\sum_{k=1}^{N}Q_k\right)=\sum_{k=1}^{N}c_\alpha(Q_k).$$

para todo $\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$. Donde,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}}\left|c_\alpha\left(\sum_{k=1}^{N}\lambda_kQ_k\right)\widetilde{w}^\alpha\right| &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}}\left|\sum_{k=1}^{N}\lambda_kc_\alpha(Q_k)\right||\widetilde{w}^\alpha|\\ &= \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m\\ \text{supp}\alpha\subseteq M_k^{(n)}}}|c_\alpha(Q_k)|\,|\widetilde{w}^\alpha|\\ &\geq |\lambda_N|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m\\ \text{supp}(\alpha)\subseteq M_N^{(n)}}}|c_\alpha(Q_N)|\,|\widetilde{w}^\alpha|\\ &= \infty,\end{aligned}\tag{4.12}$$

onde a segunda igualdade provém de (4.10) e a última igualdade é devida ao fato de Q_N não ser analítico em $\widetilde{w}$.

Finalmente, vejamos que o conjunto $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente. Para isso, basta provar que o conjunto $\{Q_1, \ldots, Q_N\}$ é linearmente independente para todo $N \in \mathbb{N}$. Façamos isso: Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ e suponha

$$Q := \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_N Q_N = 0. \tag{4.13}$$

Primeiro, note que $\lambda_N = 0$, pois do contrário, obteríamos por (4.12) que $0 = \infty$, o que seria uma contradição. Logo, chegamos em

$$\lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_{N-1} Q_{N-1} = 0.$$

Analogamente ao que fizemos acima quando supormos $Q = 0$, podemos concluir que devemos ter $\lambda_{N-1} = 0$. E aplicando o mesmo argumento mais $N-2$ vezes, obtém-se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$. Portanto $\{Q_1, \ldots, Q_N\}$ é linearmente independente. ■

4.3 O conjunto $\mathscr{N}_m \cup \{0\}$ contém uma cópia isomorfa de ℓ_1

Definição 4.4. *Sejam E e F espaços normados. Dizemos que o espaço E contém uma cópia isomorfa do espaço F se existe um subespaço de E isomorfo a F.*

Teorema 4.5. *Para cada $m \geq 2$, o conjunto $\mathscr{N}_m \cup \{0\}$ contém um cópia isomorfa de ℓ_1. Em particular, $\mathscr{N}_m$ é espaçável em $\mathcal{P}(^m c_0)$.*

Demonstração. Considere

$$X = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k Q_k : (\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1 \right\}$$

onde $(Q_k)_{k=1}^{\infty}$ é a sequência definida na Proposição 4.3. Primeiramente, vejamos que o conjunto X é um subconjunto de $\mathcal{P}(^m c_0)$. Para isso, seja $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$. Segue daí e de $\|Q_k\| \leq \frac{\pi^2}{6}$ que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\lambda_k Q_k\| \leq \frac{\pi^2}{6} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty.$$

Isto mostra que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k Q_k$ converge absolutamente em $\mathcal{P}(^m c_0)$. Mas como $\mathcal{P}(^m c_0)$ é um espaço de Banach, e toda série absolutamente convergente num espaço de Banach deve convergir no espaço, concluímos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k Q_k$ define um polinômio m-homogêneo em c_0.

Afirmamos que todo polinômio não nulo em X é não analítico. Para provar isso, seja $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1 \setminus \{0\}$. Suponha $\lambda_{k_0} \neq 0$ para algum $k_0 \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema 2.30 que, para cada $z \in c_{00}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k Q_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha} c_\alpha(\lambda_k Q_k) z^\alpha$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_\alpha(Q_k) z^\alpha$$

e as séries de monômios que representam os Q_k's convergem absolutamente para pontos em c_{00}. Logo, pela unicidade dos coeficientes, obtemos

$$c_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k Q_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, c_\alpha(Q_k)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$. Segue daí e de (4.3) que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha| = m}} \left| c_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k Q_k \right) \widetilde{w}^\alpha \right| &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha| = m}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_\alpha(Q_k) \right| |\widetilde{w}^\alpha| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha| = m \\ \text{supp}\alpha \subseteq M_k^{(n)}}} |c_\alpha(Q_k)| \, |\widetilde{w}^\alpha| \\
&\geq |\lambda_{k_0}| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha| = m \\ \text{supp}(\alpha) \subseteq M_N^{(n)}}} |c_\alpha(Q_{k_0})| \, |\widetilde{w}^\alpha| \qquad (4.14) \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

onde a última série é infinita pois, como visto na Proposição 4.3, o polinômio Q_{k_0} não é analítico em $\widetilde{w}$. Isto prova que qualquer elemento não nulo de X é um polinômio m-homogêneo contínuo e não analítico.

Por fim, para mostrar que $\mathscr{N}_m \cup \{0\}$ tem uma cópia isomorfa de ℓ_1, é suficiente provar que a aplicação definida por

$$T : \ell_1 \longrightarrow X \subset \mathscr{N}_m \cup \{0\} \;\; ; \;\; T((\lambda_k)_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, Q_k$$

é linear, contínua e tem inversa contínua. Como já temos T sobrejetora por definição, precisamos apenas provar que T é linear e que existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 \, \|x\|_1 \leq \|T(x)\| \leq \, C_2 \, \|x\|_1 \text{ para todo } x \in \ell_1.$$

Vejamos que T é linear. Sejam $a \in \mathbb{C}$ e $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}, (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$. Daí,

$$\begin{aligned}
T(a \, (\lambda_k)_{k=1}^{\infty} + (\alpha_k)_{k=1}^{\infty}) = T((a \, \lambda_k + \alpha_k)_{k=1}^{\infty}) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a \, \lambda_k + \alpha_k) Q_k \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (a \, \lambda_k + \alpha_k) Q_k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a\,\lambda_k Q_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k Q_k \\
&= a \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k Q_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Q_k \\
&= a\, T((\lambda_k)_{k=1}^{\infty}) + T((\alpha_k)_{k=1}^{\infty}).
\end{aligned}
$$

Agora vejamos que $\|T(x)\| \leq C_2 \|x\|_1$ para todo $x \in \ell_1$ e $C_2 = \pi^2/6$. De fato, para $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$, tem-se

$$
\|T((\lambda_k)_{k=1}^{\infty})\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k Q_k \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sup \sum_{k=1}^{n} \|\lambda_k Q_k\| \leq \lim_{n\to\infty} \sup \frac{\pi^2}{6} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| = \frac{\pi^2}{6} \|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\|_1.
$$

Finalmente, mostraremos que $C_1 \|x\|_1 \leq \|T(x)\|$ para todo $x \in \ell_1$ e $C_1 = 2^{-m}\, p^{-\frac{m+1}{2}}\, \eta$. (Lembrando que $\eta = \inf_{\alpha,n} |c_\alpha(P_n)| > 0$.) Denote $M_k^{(n)}$ como na Proposição 4.3. Sabemos que os conjuntos $M_k^{(n)}$'s são dois a dois disjuntos e cada Q_k é suportado sobre $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_k^{n}$. Para $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$, $N \in \mathbb{N}$ e $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{D}^N$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|T((\lambda_k)_{k=1}^{\infty})\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, Q_k \right\| \geq \sup_{z\in\mathbb{D}^N} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, Q_k(z_1, \ldots, z_N, 0, \ldots) \right| \\
&\geq \sup_{z\in 2^{-1}\mathbb{D}^N} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, Q_k(z_1, \ldots, z_N, 0, \ldots) \right| \\
&= \sup_{\substack{z\in 2^{-1}\mathbb{D}^N \\ supp(z)\subset \bigcup_{\ell,n=1}^{\infty} M_\ell^{(n)}}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, Q_k(z_1, \ldots, z_N, 0, \ldots) \right| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \sup_{\substack{z\in 2^{-1}\mathbb{D}^N \\ supp(z)\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_k^{(n)}}} |Q_k(z_1, \ldots, z_N, 0, \ldots)| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \sup_{z\in 2^{-1}\mathbb{D}^N} |Q_k(z_1, \ldots, z_N, 0, \ldots)| \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|\, 2^{-m} |c_\alpha(Q_k)|
\end{aligned}
$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ com $|\alpha| = m$, onde a última desigualdade é devida a (2.27). Visto que $N \in \mathbb{N}$ foi escolhido arbitrário, isto implica

$$
\|T((\lambda_k)_{k=1}^{\infty})\| \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|\, 2^{-m} |c_\alpha(Q_k)| \tag{4.15}
$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ com $|\alpha| = m$. Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $z \in B_{c_{00}}$ temos

$$
Q_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m \\ \text{supp}(\alpha)\subset M_k^{(n)}}} \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} c_\alpha(P_n) z^\alpha,
$$

e portanto segue pela unicidade dos coeficientes que

$$c_\alpha(Q_k) = \frac{1}{n^2} p^{-n\frac{m+1}{2}} c_\alpha(P_n) \tag{4.16}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ com $|\alpha| = m$ e $supp(\alpha) \subset M_k^{(n)}$. Escolha $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ tal que $|\alpha_0| = m$ e $supp(\alpha_0) \subset M_k^{(1)}$. Com este α_0 escolhido, obtemos de (4.15) e (4.16) que

$$\begin{aligned} \|T((\lambda_k)_{k=1}^\infty)\| &\geq \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| \, 2^{-m} |c_{\alpha_0}(Q_k)| = \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| \, 2^{-m} p^{-\frac{m+1}{2}} |c_{\alpha_0}(P_1)| \\ &\geq 2^{-m} p^{-\frac{m+1}{2}} \eta \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|, \end{aligned}$$

e a prova está completa. ∎

CAPÍTULO 5

UMA APLICAÇÃO ÀS SÉRIES DE DIRICHLET

Neste capítulo estamos interessados num dos resultados mais famosos das séries de Dirichlet, conhecido como o *Problema de convergência absoluta de Bohr*. Este problema consiste na determinação de uma série de Dirichlet cuja largura da faixa em que a série converge uniformemente mas não absolutamente é máxima. Para o estudo desse problema, enunciamos primeiro alguns exemplos e resultados que nos ajudarão a entender e caracterizar o problema. Veremos ainda como as séries de Dirichlet estão relacionadas com as funções holomorfas. Os polinômios homogêneos não analíticos da Proposição 3.8 terão grande importância na prova desse problema, visto que através deles conseguiremos construir a série de Dirichlet com as propriedades desejadas.

5.1 Séries de Dirichlet e as abscissas de convergências

Nesta seção apresentamos os principais resultados sobre as séries de Dirichlet que serão úteis no decorrer do capítulo. Em particular, definimos as abscissas de convergências pontual, uniforme e absoluta de uma série de Dirichlet e, também, comparamos essas três abscissas de convergências. Além disso, veremos que os domínios de convergência de uma série de Dirichlet consiste de semiplanos.

Definição 5.1. Uma *série de Dirichlet* é uma série da forma

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

onde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares complexos e s é uma variável complexa.

Denotaremos por $\mathfrak{D}$ o conjunto de todas as séries de Dirichlet. Note que por enquanto as séries de Dirichlet em $\mathfrak{D}$ são séries formais, ou seja, ainda não estamos preocupados com o seu domínio de convergência. De fato, neste momento uma série de Dirichlet em $\mathfrak{D}$ poderia até mesmo não convergir em nenhum ponto. Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} n!n^{-s}$ não converge em nenhum ponto $s \in \mathbb{C}$, pois para cada $s \in \mathbb{C}$ tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |n!\, n^{-s}| &= \lim_{n\to\infty} |n!\, n^{-Re(s)}\, n^{-iIm(s)}| = \lim_{n\to\infty} |n!\, n^{-Re(s)}\, e^{-iIm(s)\cdot ln(n)}| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(n!\, n^{-Re(s)}\right) = \infty.\end{aligned}$$

Claramente $\mathfrak{D}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com as operações de soma e multiplicação por escalar de séries. Além disso, podemos definir a multiplicação de Dirichlet

$$\left(\sum_n a_n n^{-s}\right)\left(\sum_n b_n n^{-s}\right) = \sum_n \left(\sum_{km=n} a_k b_m\right) n^{-s},$$

onde "$km = n$" significa que no somatório considera-se todos os k e m tais que $km = n$. Munido com a multiplicação de Dirichlet, o espaço vetorial $\mathfrak{D}$ torna-se uma álgebra sobre $\mathbb{C}$.

Dado um número complexo $s \in \mathbb{C}$, sempre denotaremos $s := \sigma + i\,t$. Ademais, para cada $\sigma \in \mathbb{R}$, denotamos

$$[Re > \sigma] := \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \sigma\}.$$

Definição 5.2. Seja $D(s) = \sum a_n n^{-s}$ uma série de Dirichlet, definimos por

$$\begin{aligned}&\sigma_c(D) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R}\ : D \text{ converge em [Re} > \sigma]\} \in [-\infty, \infty],\\ &\sigma_u(D) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R}\ : D \text{ converge uniformemente em [Re} > \sigma]\} \in [-\infty, \infty] \text{ e}\\ &\sigma_a(D) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R}\ : D \text{ converge absolutamente em [Re} > \sigma]\} \in [-\infty, \infty]\end{aligned}$$

as *abscissas de convergência (pontual), convergência uniforme* e *convergência absoluta* de D, respectivamente. Ademais, quando a série não converge em nenhum ponto, teremos $\sigma_c(D) = \sigma_u(D) = \sigma_a(D) = \inf \emptyset := \infty$.

Importante ressaltar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ convergir uniformemente em $[Re > \sigma]$, é equivalente à sequência de funções $(\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s})_{n=1}^{N}$ convergir uniformemente em $[Re > \sigma]$. Por outro lado, dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge absolutamente num ponto s, coincide em afirmar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-s}$ converge em s.

Temos a seguinte relação entre as abscissas

$$-\infty \leq \sigma_c(D) \leq \sigma_u(D) \leq \sigma_a(D) \leq \infty \text{ para cada } D \in \mathfrak{D}. \tag{5.1}$$

Claramente $\sigma_c(D) \leq \sigma_u(D)$ para cada série de Dirichlet $D \in \mathfrak{D}$. Vejamos que $\sigma_u(D) \leq \sigma_a(D)$ para cada $D \in \mathfrak{D}$. Considere uma série de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ e $\varepsilon > 0$. Caso $\sigma_a(D) = \infty$, segue que $\sigma_u(D) \leq \sigma_a(D)$, como queríamos. Suponha que $\sigma_a(D) < \infty$. Neste último caso, temos

$$\left|\frac{a_n}{n^{\sigma_a(D)+\varepsilon+it}}\right| = \frac{|a_n|}{n^{\sigma_a(D)+\varepsilon}}$$

e, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_a(D)+\varepsilon}}$ é convergente, segue do Teste de Weierstrass que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_a(D)+\varepsilon+it}}$ converge uniformemente em [Re $> \sigma_a(D)+\varepsilon$]. Portanto, $\sigma_u(D) \leq \sigma_a(D)+\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Fazendo $\varepsilon \to \infty$, obtemos o desejado.

Um dos exemplos mais famosos de série de Dirichlet é a função Zeta de Riemann, a qual é obtida considerando $a_n = 1$ para cada n. Veremos no exemplo a seguir que no caso da função Zeta de Riemann as três abscissas de convergência coincidem.

Exemplo 5.3 (Zeta de Riemann)**.** Considere a série de Dirichlet $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Afirmamos que

$$\sigma_c(\zeta) = \sigma_u(\zeta) = \sigma_a(\zeta) = 1.$$

Com efeito, segue de

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{Re\ s}}$$

que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re\ s}}$$

converge sempre que Re $s > 1$. Logo, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge absolutamente se Re $s > 1$. No caso em que $s = 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ é divergente, por se tratar da série harmônica. Assim, $\sigma_a(\zeta) = \sigma_c(\zeta) = 1$, e obtemos ainda de (5.1) que $\sigma_u(\zeta) = 1$.

Recordemos um pouco sobre convergência de séries de potências de uma variável complexa. Neste caso, sabemos dos cursos introdutórios de análise complexa que os domínios de convergência naturais são discos. Com efeito, sabe-se que para uma série infinita de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $a \in \mathbb{C}$, convergindo em algum ponto diferente de a, podemos encontrar $R \in [0,\infty]$ tal que a série de potências convergirá absolutamente dentro de qualquer disco fechado com raio estritamente menor do que R e, por outro lado, divergirá em qualquer ponto fora do disco fechado de raio R. Esse raio R é chamado o raio de convergência da série de potência. Ademais, lembre dos cursos introdutórios de análise complexa que o raio de convergência de uma série de potências coincide com os raios de convergência absoluta e uniforme.

À luz do Exemplo 5.3 e do que sabemos de convergência de séries de potências de uma variável complexa, surgem duas perguntas naturais:

(I) Existem séries de Dirichlet cujas abscissas de convergência não coincidam? A resposta é sim, existem (veja Exemplo 5.7). Esse fato constitui uma *diferença* fundamental entre série de potências de uma variável complexa e séries de Dirichlet.

(II) Os semiplanos constituem os domínios de convergência naturais para as séries de Dirichlet? Ou seja, as abcissas de convergência definidas na Definição 5.2 são tais que a série converge (absolutamente ou uniformemente) para todo ponto cuja parte real seja estritamente maior do que a abscissa de convergência? E diverge quando for estritamente menor? As respostas são ambas positivas, esses são os domínios naturais de convergência para séries de Dirichlet. Esse fato constitui uma *similaridade* fundamental com relação às séries de potências de uma variável complexa.

Através do Teorema 5.6, primeiro responderemos a pergunta (II). Mas antes, precisamos de dois lemas.

Lema 5.4 (Soma de Abel). *Se* $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{C}$ *e* $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *para* $1 \leq n \leq N$, *então*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_n b_n + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}).$$

Demonstração. Com efeito, como $a_n = A_n - A_{n-1}$ para $2 \leq n \leq N$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n b_n &= A_1 b_1 + \sum_{n=2}^{N} (A_N - A_{N-1}) b_n = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=2}^{N} A_{n-1} b_n \\ &= A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_{n+1} = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}).\end{aligned}$$

■

Lema 5.5. *Seja* $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *uma série de Dirichlet que converge em* $s_0 \in \mathbb{C}$. *Então* $D(s)$ *converge uniformemente no conjunto angular*

$$\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > Re(s_0), |arg(s - s_0)| < \alpha < \frac{\pi}{2}\}.$$

Demonstração. Suponhamos que $s_0 = 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $N_0 \leq N \leq M$

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n \right| < \varepsilon \cos \alpha.$$

Considere o conjunto

$$S = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0, |\text{arg}(s)| < \alpha\},$$

e seja $\sigma + it = s \in S$. Pelo Lema 5.4 podemos escrever

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=N}^{M} a_n \frac{1}{n^s} \right| &= \left| \left(\sum_{k=N}^{M} a_k \right) \frac{1}{M^s} + \sum_{n=N}^{M-1} \left(\sum_{k=N}^{n} a_k \right) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \right| \\ &\leq \varepsilon \cos \alpha \frac{1}{M^\sigma} + \sum_{n=N}^{M-1} \varepsilon \cos \alpha \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right|.\end{aligned}$$

Como

$$\left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right| = \left| -s \int_{n}^{n+1} x^{-s-1} dx \right| \leq |s| \int_{n}^{n+1} |x^{-s-1}| dx$$

$$= |s| \int_n^{n+1} x^{-\sigma-1} dx = \frac{|s|}{\sigma}\left(\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right),$$

segue que

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n \frac{1}{n^s}\right| \leq \varepsilon \cos\alpha \frac{|s|}{\sigma}\left(\frac{1}{M^\sigma} + \sum_{n=N}^{M-1}\left(\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right)\right) = \varepsilon \cos\alpha \frac{|s|}{\sigma}\frac{1}{N^\sigma}.$$

Como $\dfrac{\sigma}{|s|} = \cos(\arg(s)) \geq \cos\alpha$, para todo $s \in S$ temos que

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n \frac{1}{n^s}\right| \leq \varepsilon \cos\alpha \frac{|s|}{\sigma}\frac{1}{N^\sigma} \leq \varepsilon \cos(\arg(s)) \frac{1}{\cos(\arg(s))}\frac{1}{n^s} < \varepsilon.$$

Agora suponha que $s_0 \neq 0$ e considere $u = s - s_0$. Então a série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s_0}} n^{-u}$$

converge em $u = 0$ e pelo que acabamos de mostrar, converge uniformemente em $\{u \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(u) > 0, |\arg(u)| < \alpha\}$. Como $u = s - s_0$ temos que $\mathrm{Re}(u) > 0$ implica que $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ e $|\arg(u)| < \alpha$ implica $|\arg(s - s_0)| < \alpha$. Portanto, a série $\sum a_n n^{-s}$ converge uniformemente em $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0),\ |\arg(s - s_0)| < \alpha\}$. ■

Teorema 5.6. *Seja $D(s) = \sum a_n n^{-s}$ uma série de Dirichlet (que não diverge em todo o ponto). Então $D(s)$ converge no semiplano $[\mathit{Re} > \sigma_c(D)]$ e diverge em $[\mathit{Re} < \sigma_c(D)]$. Além disso,*

$$f : [\mathit{Re} > \sigma_c(D)] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ dado por } f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

é holomorfa.

Demonstração. Já sabemos do Lema 5.5 que a série de Dirichlet converge em todo ponto $s \in \mathbb{C}$ com $Re(s) > \sigma_c(D)$. Para provar que ela converge para uma função holomorfa, usaremos o Teorema 2.10. Isto é, provaremos que a série converge uniformemente em todo subconjunto compacto de $[\mathrm{Re} > \sigma_c(D)]$. Para isso, seja $K \subset [\mathrm{Re} > \sigma_c(D)]$ um compacto. Ainda pelo Lema 5.5, sabemos que a série converge uniformemente em cada região angular da forma

$$A_{s_0,\alpha} := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0), |\arg(s - s_0)| < \alpha < \frac{\pi}{2}\}, \tag{5.2}$$

onde s_0 é um ponto no qual a série converge. Daí, concluímos que é suficiente mostrar que K está contido em alguma região angular desse tipo.

Como K é compacto, $F := [\mathrm{Re} = \sigma_c(D)]$ é fechado e $K \cap F = \emptyset$, existe $z_0 \in K$ tal que

$$dist(z_0, F) = \inf\{|x - y| : x \in K, y \in F\} > 0.$$

Seja $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma_c(D) < \sigma_0 < \text{Re}(z_0)$. Vejamos que existe $0 < \alpha_0 < \pi/2$ tal que $K \subset A_{\sigma_0,\alpha_0}$. Dado $z \in K$, tem-se $\sigma_0 < \text{Re}(z_0) < \text{Re}(z)$ (pois z_0 realiza a distância ao conjunto F), e portanto $|arg(z - \sigma_0)| < \pi/2$. Logo, existe $\alpha_z \in \mathbb{R}$ tal que

$$|arg(z - \sigma_0)| < \alpha_z < \pi/2,$$

o que implica $z \in A_{\sigma_0,\alpha_z}$. Com isso, provamos que

$$K \subset \bigcup_{z \in K} A_{\sigma_0,\alpha_z}.$$

Mas como K é compacto, conseguimos uma cobertura finita para a cobertura aberta de K acima, ou seja, existem $z_1, \ldots, z_N \in K$ e $0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_N < \pi/2$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} A_{\sigma_0,z_{\alpha_j}}.$$

Para finalizar a prova, basta tomar $\alpha_0 := \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$, o que nos dá

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} A_{\sigma_0,z_{\alpha_j}} \subset A_{\sigma_0,\alpha_0},$$

como queríamos. ■

Importante dizer que não é possível afirmar nada sobre a convergência sobre a reta $[\text{Re} = \sigma_c(D)]$. Com efeito, existem séries de Dirichlet D's que convergem em todos os pontos da reta $[\text{Re} = \sigma_c(D)]$ e, por outro lado, existem outras séries de Dirichlet que convergem em apenas um ponto ou em nenhum ponto dessa reta (Veja [13, Pag. 5]]).

Exibimos a seguir um exemplo de uma série de Dirichlet D para a qual $\sigma_a(D) \neq \sigma_c(D)$.

Exemplo 5.7. Considere a série de Dirichlet $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, n^{-s}$. Como visto no Exemplo 5.3, $\sigma_a(D) = \sigma_a(\zeta) = 1$. Por outro lado, visto que $(n^{-\sigma})_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência decrescente convergindo para zero para todo $\sigma > 0$, segue do teste para séries alternadas de análise real que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, n^{-\sigma}$ converge para cada $\sigma > 0$. Segue daí e do Lema 5.5 que $\sigma_c(D) = 0$.

Do último exemplo, temos de modo geral que as abscissas σ_a e σ_c não coincidem, ou seja, uma série de Dirichlet pode convergir condicionalmente mas não absolutamente num ponto. Também, segue que a largura máxima da faixa na qual uma série de Dirichlet converge condicionalmente mas não absolutamente é maior ou igual à 1, ou seja,

$$\sup\{\sigma_a(D) - \sigma_c(D) : D \in \mathfrak{D}\} \geq 1.$$

O próximo resultado nos diz que a largura máxima dessa faixa é igual à 1.

Proposição 5.8.

$$\sup\{\sigma_a(D) - \sigma_c(D) : \; D \in \mathfrak{D}\} = 1.$$

Demonstração. Pelo Exemplo 5.7, obtém-se

$$\sup\{\sigma_a(D) - \sigma_c(D) : \ D \in \mathfrak{D}\} \geq 1.$$

Logo, resta verificar apenas que $\sup\{\sigma_a(D) - \sigma_c(D) : \ D \in \mathfrak{D}\} \leq 1$. Para isso, suponha que a série $\sum_n a_n n^{-s}$ converge em $s_0 = \sigma_0 + it$. Isto implica que a sequência $\left(\dfrac{a_n}{n^{\sigma_0}}\right)_n$ converge para zero e portanto é limitada, i.e., existe $K > 0$ de modo que $\left|\dfrac{a_n}{n^{\sigma_0}}\right| \leq K$. Então, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n^{s_0+1+\varepsilon}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0+1+\varepsilon}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{n^{1+\varepsilon}} < \infty.$$

Deste modo, $\sigma_a(D) \leq \sigma_0 + 1 + \varepsilon$ para quaisquer $\sigma_0 > \sigma_c(D)$ e $\varepsilon > 0$. Portanto, fazendo $\sigma_0 \to \sigma_c(D)$ e $\varepsilon \to 0$, obtém-se $\sigma_a(D) \leq \sigma_c(D) + 1$ para cada série de Dirichlet, como queríamos. ■

Definição 5.9. Diremos que uma série de Dirichlet *depende de finitos primos* se existem números primos $p_{i_1}, \ldots, p_{i_N}$ tais que se $a_n \neq 0$ então $n = p_{i_1}^{\alpha_1} \cdots p_{i_N}^{\alpha_N}$ para algum α. Neste caso dizemos que a série de Dirichlet *depende de N primos*. Se a série depende dos primeiros números primos $p_1, \ldots, p_N$, diremos que a série de Dirichlet *depende dos N primeiros primos*.

Vimos que em geral as abscissas $\sigma_c(D)$ e $\sigma_a(D)$ não coincidem. Um dos casos em que essas abscissas podem coincidir é quando os coeficientes da série são positivos (Exemplo 5.3). O resultado a seguir garante que para séries de Dirichlet que dependem de finitos números primos as três abscissas de convergência coincidem.

Proposição 5.10. *Seja $D = \sum_n a_n n^{-s}$ uma série de Dirichlet que depende de finitos números primos. Então*

$$\sigma_c(D) = \sigma_a(D).$$

Demonstração. Faremos o caso em que a série depende apenas de dois números primos, o caso geral segue de modo análogo. Como $\sigma_c(D) \leq \sigma_a(D)$ para toda série de Dirichlet, basta mostrar que $\sigma_c(D) \geq \sigma_a(D)$.

Seja $D = \sum_n a_n n^{-s}$ uma série de Dirichlet que depende apenas de dois números primos, isto é, existem primos p e q tais que, se $a_n \neq 0$ então $n = p^k\, q^\ell$. Assim, podemos reescrever a série do seguinte modo

$$\sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_{p^k q^\ell} (p^k q^\ell)^{-s}.$$

Supondo que a série converge em $s = \sigma + it$, existe $M > 0$ tal que para todos $k, \ell \in \mathbb{N}$

$$\frac{|a_{p^k q^\ell}|}{(p^k q^\ell)^{\sigma}} \leq M.$$

Disso segue que para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k,\ell=1}^{N} |a_{p^k q^\ell}| \frac{1}{(p^k q^\ell)^{\sigma+\varepsilon}} \leq M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p^\varepsilon)^k} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(q^\varepsilon)^\ell} < \infty,$$

o que implica $\sigma_c(D) \leq \sigma_a(D)$. ■

5.2 Álgebra de Banach $\mathscr{H}_\infty$ e a abscissa absoluta

O principal objetivo da presente seção é relacionar a abscissa absoluta de uma série de Dirichlet com uma álgebra de Banach particular, denotada por $\mathscr{H}_\infty$. Com isso, estabelece-se uma maneira de estudar a abscissa absoluta de uma série de Dirichlet via técnicas oriundas da Análise Funcional. Para isso começaremos com a definição precisa de álgebra de Banach.

Definição 5.11. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que X é uma *álgebra* se possui uma operação $\cdot : X \times X \longrightarrow X$ que associa cada par (x, y) ao elemento $x \cdot y$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(ii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

(iii) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$,

(iv) $\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y)$.

para todos $x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Definição 5.12. Seja X é uma álgebra. Uma *norma de álgebra* sobre X é uma aplicação $\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $(X, \| \cdot \|)$ é um espaço normado e vale

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \text{ para todo } x, y \in X.$$

Neste caso, X é chamado de *álgebra normada*. Se X é uma álgebra normada e completa dizemos que X é uma álgebra de Banach.

Denote por $\mathscr{H}_\infty$ o conjunto de todas as séries de Dirichlet que são convergentes em $[\text{Re} > 0]$ e que constituem uma função limitada neste semiplano. Como a soma e o produto por escalar de séries convergentes (resp. funções limitadas) são convergentes (resp. limitadas), segue que o conjunto $\mathscr{H}_\infty$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{D}$, e portanto é um espaço vetorial. Ademais, munido da norma

$$\|D\|_\infty = \sup_{Re\ s>0} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right|,$$

$\mathscr{H}_\infty$ se torna uma álgebra de Banach (este fato será provado posteriormente). Por $H_\infty([\text{Re} > 0])$ denotamos a álgebra de Banach de todas as funções limitadas e holomorfas f no semiplano positivo $[\text{Re} > 0]$ munido com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{Re\ s>0} |f(s)|.$$

Do Teorema 5.6 sabemos que as séries de Dirichlet definem funções holomorfas em seu semiplano de convergência, daí segue que $\mathscr{H}_\infty$ é um subespaço de $H_\infty([\text{Re} > 0])$.

O próximo resultado constitui um dos resultados mais fundamentais publicados por Bohr em 1913. Este resultado será fundamental para a prova da completude de $\mathscr{H}_\infty$.

Teorema 5.13 (Teorema de Bohr). *Seja $D = \sum a_n n^{-s}$ uma série de Dirichlet (que não diverge em todo ponto). Suponha que sua função limite se estenda a uma função holomorfa limitada f em $[Re > 0]$. Então $\sum a_n n^{-s}$ converge uniformemente em $[Re > \varepsilon]$ para todo $\varepsilon > 0$, ou seja, $\sigma_u(D) \leq 0$.*

Demonstração. Veja [8, Proposition 1.13]. ∎

Outro resultado importante para estabelecer a completude de $\mathscr{H}_\infty$, e que também exibiremos sem uma demonstração, é o seguinte:

Proposição 5.14 (Fórmula de Tipo Parseval). *Para cada família finita de números complexos $a_1, \ldots, a_N$ temos*

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{it} \right|^2 dt$$

Demonstração. Veja [8, Proposition 1.11]

Por fim, provemos o último resultado preliminar para a verificação de que $\mathscr{H}_\infty$ é uma álgebra de Banach.

Proposição 5.15. *Para cada $\sum_n a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty$, temos*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right\|_\infty .$$

Em particular, para todo N

$$|a_N| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right\|_\infty .$$

Demonstração. De fato, como $\sum_n a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty$, segue do Teorema 5.6 que

$$f : [\text{Re} > 0] \to \mathbb{C} \text{ dada por } f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

é holomorfa. Fixados $\sigma > 0$ e $\varepsilon > 0$, pelo Teorema de Bohr (Teorema 5.13), a sequência $D_N(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$ converge uniformemente em $[\text{Re} = \sigma]$ para f. Deste modo, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geq N_0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{\sigma+it}} - f(\sigma+it) \right| < \varepsilon.$$

Segue daí que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{\sigma+it}} - f(\sigma+it) + f(\sigma+it) \right|$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{\sigma+it}} - f(\sigma+it) \right| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(\sigma+it)| \leq \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

Então, pela Proposição 5.14, para cada $N \geq N_0$

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \left| a_n \frac{1}{n^\sigma} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

Fazendo $\sigma, \varepsilon \to 0$ obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right\|_\infty,$$

como queríamos. ■

Teorema 5.16. *$(\mathscr{H}_\infty, \|\cdot\|_{\mathscr{H}_\infty})$ é uma álgebra de Banach.*

Demonstração. Começaremos mostrando que $\mathscr{H}_\infty$ é um espaço de Banach. Ora, como $H_\infty([\mathrm{Re} > 0])$ é um espaço de Banach, é suficiente provar que $\mathscr{H}_\infty$ é fechado em $H_\infty([\mathrm{Re} > 0])$. Para isso, seja $(D^k)_k = \left(\sum a_n^k n^{-s}\right)_k$ uma sequência em $\mathscr{H}_\infty$ tal que $(D^k)_k$ converge para $f \in H_\infty([\mathrm{Re} > 0])$.

Devemos provar que $f \in \mathscr{H}_\infty$. Primeiro, veremos que f coincide com uma série de Dirichlet num semiplano apropriado. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Segue de $(D^k)_{k=1}^\infty$ ser Cauchy e da Proposição 5.15 que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n^k - a_n^l| \leq \|D^k - D^l\|_\infty < \varepsilon \tag{5.3}$$

para todos $k, \ell \geq k_0$. Isto prova em particular que $(a_n^k)_{k=1}^\infty$ também é uma sequência de Cauchy. Desse modo, segue da completude de $\mathbb{C}$ que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{k\to\infty} a_n^k = a_n$. Mais uma vez pela Proposição 5.15, concluímos que para quaisquer k, n

$$|a_n^k| \leq \|D^k\|_\infty. \tag{5.4}$$

Visto que $(D^k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy, ela deve ser limitada, i.e., existe $K > 0$ tal que $\|D^k\| \leq K$. Daí, e de (5.4), obtém-se

$$|a_n^k| \leq \|D^k\| \leq K$$

para todos $n, k \in \mathbb{N}$. Portanto, fazendo $k \to \infty$, tem-se $|a_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto implica que a série $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ converge absolutamente em $[\mathrm{Re} > 1]$. Com efeito, se $\delta > 0$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^{1+\delta}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{n^{1+\delta}} < \infty.$$

Mas isto nos dá $\sigma_a(D) \leq 1 + \delta$. Assim, fazendo $\delta \to 0$, temos $\sigma_a(D) \leq 1$. Pois bem, o semiplano apropriado no qual f coincide com D é [Re > 1]. E para concluir isso, seja $s_0 \in$ [Re$(s) > 1$] fixo e faça $\ell \to \infty$ em (5.3), obtendo

$$|f(s_0) - D^{k_0}(s_0)| < \varepsilon \ \text{ e } \ |a_n^{k_0} - a_n| < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, visto que $\sigma_u(D^{k_0}) \leq 0$ e $\sigma_a(D) \leq 1$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| D^{k_0}(s_0) - \sum_{n=1}^{N} a_n^{k_0} \frac{1}{n^{s_0}} \right| < \varepsilon \ \text{ e } \ \left| D(s_0) - \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{s_0}} \right| < \varepsilon.$$

Donde,

$$\begin{aligned} |f(s_0) - D(s_0)| &\leq |f(s_0) - D^{k_0}(s_0)| + \left| D^{k_0}(s_0) - \sum_{n=1}^{N} a_n^{k_0} \frac{1}{n^{s_0}} \right| \\ &+ \left| \sum_{n=1}^{N} a_n^{k_0} \frac{1}{n^{s_0}} - \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{s_0}} \right| + \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{s_0}} - D(s_0) \right| \leq 2\varepsilon + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(s_0)}} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $s_0 \in$ [Re > 1], segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(s_0)}}$ é convergente e portanto $f \equiv D$ em [Re > 1].

Visto que f é limitada e é uma extensão de D, concluímos pelo Teorema de Bohr (Teorema 5.13) que $\sigma_u(D) \leq 0$. Logo, f e D são holomorfas em [Re > 0] e, como coincidem em [Re > 1], $f \equiv D$ em [Re > 0]. Isto prova que $f \in \mathscr{H}_\infty$.

Para completar a demonstração, devemos mostrar que para quaisquer $D_1, D_2 \in \mathscr{H}_\infty$ ocorrem:

- $D_1 \cdot D_2 \in \mathscr{H}_\infty$ e
- $\|D_1 \cdot D_2\|_\infty \leq \|D_1\| \|D_2\|$.

Considere as séries de Dirichlet

$$D_1(s) = \sum a_n n^{-s} \ \text{ e } \ D_2(s) = \sum b_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty$$

convergindo para $f_1, f_2 \in H_\infty$([Re > 0]), respectivamente. Primeiro, mostraremos que

$$D = D_1 D_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{km=n} a_k b_m \right) n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty.$$

De $D_1, D_2 \in \mathscr{H}_\infty$ tem-se $\sigma_c(D_j) \leq 0$, e pela Proposição 5.8 , segue que $\sigma_a(D_j) \leq 1$ para cada $j = 1, 2$. Assim, para cada $\sigma > 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \sum_{km=n} a_k \, b_m \right| \right) \frac{1}{n^\sigma} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{km=n} |a_k b_m| \right) \frac{1}{n^\sigma} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{1}{k^\sigma} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| \frac{1}{m^\sigma} \right) < \infty. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Isto mostra que a série de Dirichlet D é analítica em $[\text{Re} > 1]$. Se g é a função analítica determinada pelo limite de D, então $g = f_1 \cdot f_2$ em $[\text{Re} > 1]$. Mas como $f_1\, f_2$ estende g (e portanto $D_1\, D_2$) e é uma função analítica e limitada em $[\text{Re} > 0]$, segue novamente do Teorema de Bohr (Teorema 5.13) que $D = D_1 D_2 \in \mathscr{H}_\infty$, e ainda

$$\|D\|_\infty = \|g\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty = \|D_1\|_\infty \|D_2\|_\infty.$$

■

Lema 5.17. *Seja $D(s) = \sum_n a_n n^{-s}$ uma série de Dirichlet e $z_0 = \sigma_0 + it_0$. Então*

$$\sigma_c\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z_0}} n^{-s}\right) = \sigma_c(D) - \sigma_0.$$

Demonstração. Com efeito, denote

$$D_{z_0}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z_0}} n^{-s}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z_0}} \frac{1}{n^{\sigma_c(D)-\sigma_0+\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{(\sigma_c(D)+\varepsilon)+it_0}} < \infty.$$

Deste modo, $\sigma_c(D_{z_0}) \leq \sigma_c(D) - \sigma_0$. Por outro lado, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z_0}} \frac{1}{n^{\sigma_c(D_{z_0})+\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n^{(\sigma_c(D_{z_0})+\sigma_0+\varepsilon)+it_0}} < \infty,$$

obtemos que $\sigma_c(D) \leq \sigma_c(D_{z_0}) + \sigma_0 + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ e então $\sigma_c(D) \leq \sigma_c(D_{z_0}) + \sigma_0$. Portanto $\sigma_c(D) = \sigma_c(D_{z_0}) + \sigma_0$, como queríamos. ■

Observação 5.18. Seguindo exatamente o mesmo argumento do Lema 5.18, obtemos que

$$\sigma_u\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z_0}} n^{-s}\right) = \sigma_u\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right) - \sigma_0 \;\text{ e }\; \sigma_a\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z_0}} n^{-s}\right) = \sigma_a\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right) - \sigma_0.$$

Vejamos mais uma consequência do Teorema de Bohr, a qual afirma que a abscissa de convergência uniforme coincide com a abscissa de convergência de limitação. Tal como o Teorema de Bohr, esse resultado não é de trivial verificação e o exibiremos sem uma demonstração.

Lema 5.19. *Para toda série de Dirichlet $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-s}$, tem-se*

$$\sigma_u(D) = \inf\{\sigma > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-s} \textit{ é limitada em } [\textit{Re} > \sigma]\}.$$

Demonstração. Veja [8, Corollary 1.14]. ■

5.3 Solução do problema da convergência absoluta de Bohr

Sabemos da Proposição 5.8 que a largura máxima da faixa na qual uma série de Dirchlet converge condicionalmente mas não absolutamente é igual a 1. E sobre a distância máxima entre as abscissas $\sigma_a(D)$ e $\sigma_u(D)$, o que podemos dizer? Essa questão foi considerada por Harold Borh em 1913 e ficou conhecida como o *Problema da Convergência Absoluta de Bohr*. De (5.1) e da Proposição 5.8, segue que essa distância é menor ou igual a 1. Bohr mostrou que na verdade essa distância não excede a $\frac{1}{2}$, entretanto ele não conseguiu nenhum exemplo de série de Dirichlet D tal que

$$\sigma_a(D) - \sigma_u(D) = \frac{1}{2}.$$

Este problema foi solucionado apenas em 1931 por Hille e Bohnenblust em [4], onde mostraram que

$$S := \sup\{\sigma_a(D) - \sigma_u(D) : D \in \mathfrak{D}\} = \frac{1}{2}$$

e o supremo é atingido.

Um dos ingredientes utilizados para a solução do problema (em especial, para a prova de que o supremo é atingido) foi a construção do polinômio m-homogêneo não analítico que vimos na Proposição 3.8. Antes de partirmos para a solução dada por Hille e Bohnenblust, vejamos o resultado que garante que S é o supremo de todos $\sigma_a(D)$ com $D \in \mathscr{H}_\infty$.

Teorema 5.20.

$$S = \sup_{D \in \mathscr{H}_\infty} \sigma_a(D)$$

Demonstração. Segue dos Teoremas 5.6 e 5.13 que $\sigma_u(D) \leq 0$ para cada $D \in \mathscr{H}_\infty$. Daí, temos a seguinte desigualdade:

$$\sigma_a(D) \leq \sigma_a(D) - \sigma_u(D) \leq S \text{ para cada } D \in \mathscr{H}_\infty.$$

Dado $\varepsilon > 0$, pela definição de supremo, existe uma série de Dirichlet $D = \sum a_n n^{-s}$ tal que

$$S - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sigma_a(D) - \sigma_u(D),$$

e portanto

$$S - \varepsilon \leq \sigma_a(D) - \sigma_u(D) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Defina

$$D_{\sigma_u(D)+\frac{\varepsilon}{2}}(s) := \sum_n \frac{a_n}{n^{\sigma_u(D)+\frac{\varepsilon}{2}}} n^{-s}.$$

Segue da Observação 5.18 que

$$\sigma_a(D_{\sigma_u(D)+\frac{\varepsilon}{2}}) = \sigma_a(D) - \left(\sigma_u(D) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

e

$$\sigma_u(D_{\sigma_u(D)+\frac{\varepsilon}{2}}) = \sigma_u(D) - \left(\sigma_u(D) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, e pelo Lema 5.19, devemos ter $D_{\sigma_u(D)+\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathscr{H}_\infty$ e

$$S - \varepsilon \leq (\sigma_a(D) - \sigma_u(D)) - \frac{\varepsilon}{2} = \sigma_a(D_{\sigma_u(D)+\frac{\varepsilon}{2}}).$$

Ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, conseguimos uma série de Dirichlet $D_{\sigma_u(D)+\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathscr{H}_\infty$ que dista menos do que $\varepsilon > 0$ de S. Isto prova o desejado. ■

O resultado a seguir foi provado por Bohr e garante que $S \leq \dfrac{1}{2}$.

Proposição 5.21. *Dada uma série de Dirichlet $D \in \mathfrak{D}$, a largura da faixa que essa série converge uniformemente mas não absolutamente não excede a $\frac{1}{2}$, ou seja,*

$$S \leq \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Seja $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathfrak{D}$ uma série de Dirichlet arbitrária. Devemos mostrar que

$$\sigma_a(D) - \sigma_u(D) \leq \frac{1}{2}.$$

Seja $\sigma_0 > \sigma_u(D)$ e escolha $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma_u(D) < \sigma < \sigma_0$. Vejamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{n^{\sigma_0+\frac{1}{2}}}$ é convergente. Definindo $\varepsilon = \sigma_0 - \sigma$, temos pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{n^{\sigma_0+\frac{1}{2}}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{n^{\varepsilon+\sigma+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\frac{\varepsilon}{2}+\sigma}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{n^{2(\sigma+\frac{\varepsilon}{2})}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ é convergente, resta verificarmos que $\sum_{n}^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{n^{2(\sigma+\frac{\varepsilon}{2})}}$ converge. Visto que $\sigma > \sigma_u(D)$, a série D de Dirichlet converge uniformemente em $[\text{Re} > \sigma]$ e então existe $K > 0$ tal que

$$\sup_{\text{Re}(s)=\sigma+\frac{\varepsilon}{2}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^s} \right| \leq K$$

para todo N. Assim, pela Proposição 5.14 , temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \left| \frac{a_n}{n^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2}}} \right|^2 &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2}}} n^{it} \right|^2 dt \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2}-it}} \right|^2 dt \leq K^2\end{aligned}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{n^{2(\sigma+\frac{\varepsilon}{2})}}$ converge e isso encerra a prova. ■

Agora, sabido que $S \leq 1/2$, caminharemos para a obtenção de uma série de Dirichlet $D \in \mathfrak{D}$ que satisfaz

$$\sigma_a(D) - \sigma_u(D) = \frac{1}{2}.$$

Para esse fim, o próximo corolário nos diz que podemos procurar essa série no espaço $\mathscr{H}_\infty$.

Corolário 5.22. *Seja $D \in \mathscr{H}_\infty$. Se $\sigma_a(D) = \frac{1}{2}$, então*

$$S = \sigma_a(D) - \sigma_u(D) = \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Seja $D \in \mathscr{H}_\infty$ tal que $\sigma_a(D) = 1/2$. Segue do Teorema de Bohr (Teorema 5.13) que $-\sigma_u(D) \geq 0$. Daí, obtemos

$$\sigma_a(D) - \sigma_u(D) \geq \sigma_a(D) = \frac{1}{2}. \tag{5.6}$$

Por outro lado, segue da Proposição 5.21 que

$$\sigma_a(D) - \sigma_u(D) \leq S \leq \frac{1}{2}. \tag{5.7}$$

De (5.6) e (5.7), obtemos o desejado. ■

Dizemos já algumas vezes que os polinômios m-homogêneos contínuos e não analíticos, construídos no Capítulo 3, terão fundamental importância na solução do problema da convergência absoluta de Bohr. Ora, mas o último problema tem a ver com séries de Dirichlet, não com polinômios homogêneos ou funções holomorfas. Fica assim a pergunta: Como conectar esses dois "mundos"? Bem, faremos isso através da transformada de Bohr, a qual nos permitirá conectar o mundo das funções holomorfas ao das séries de Dirichlet.

Com o objetivo de definir a transformada de Bohr, precisamos primeiro fixar e relembrar algumas notações. Lembre que $\mathbb{N}_0$ denota o conjunto dos números inteiros não negativos e

$$\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}_0^k \times \{0\},$$

onde $0 := (0, 0, 0, 0, \ldots)$. Ou seja, $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ é o conjunto de todos os multi-índices de inteiros não negativos com suporte finito. Para um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ e uma sequência $z = (z_j)_{j=1}^{\infty}$, escrevemos

$$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_1} z_3^{\alpha_3} \cdots,$$

onde o produto é finito devido à α ter suporte finito.

Definiremos agora a *transformada de Bohr*, que conecta as séries de Dirichlet com as séries de potências de infinitas variáveis. Denote por p_k o k-ésimo número primo e escreva $\mathfrak{p} := (p_k)_{k=1}^{\infty}$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, cada $n \in \mathbb{N}$ tem uma única representação da forma $n = \mathfrak{p}^\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Desse modo, cada $n \in \mathbb{N}$ tem um único $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ associado. Isto nos permite definir a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B} : \mathfrak{P} & \longrightarrow & \mathfrak{D} \\ \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha & \xrightarrow{a_n = a_{\mathfrak{p}^\alpha} = c_\alpha} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \end{array}$$

entre o espaço $\mathfrak{P}$ das séries de potências de infinitas variáveis formais e o espaço $\mathfrak{D}$ das séries de Dirichlet formais (por "formais" queremos dizer, em particular, que não estamos preocupados com convergência). A aplicação $\mathfrak{B}$ é chamada transformada de Bohr.

Segue do Teorema 2.30 que cada função holomorfa $f : B_{c_0} \to \mathbb{C}$ é representada por uma séries de monômios em 0. Isto é, existe uma única família de coeficientes $(c_\alpha(f))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ de modo que para cada $z \in B_{c_{00}}$,

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha(f) z^\alpha. \tag{5.8}$$

Por consequência, a álgebra de Banach $H_\infty(B_{c_0})$ das funções holomorfas limitadas sobre B_{c_0} pode ser pensada como sendo um subconjunto de $\mathfrak{P}$. O próximo teorema garante que, via a transformada de Bohr, $H_\infty(B_{c_0})$ é isometricamente isomorfo à álgebra de Banach $\mathscr{H}_\infty$.

Teorema 5.23. *A seguinte aplicação é um isomorfismo isométrico*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{B}|_{H_\infty(B_{c_0})} : H_\infty(B_{c_0}) & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \mathscr{H}_\infty \\ f(z) = \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha(f) z^\alpha & \xrightarrow{a_n = a_{\mathfrak{p}^\alpha} = c_\alpha(f)} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}. \end{array}$$

Além disso, para cada $s \in [Re > 0]$,

$$f\left(\left(\frac{1}{p_k^s}\right)_{k=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n^s}.$$

Demonstração. Veja [8, Proposição 3.8] ■

O último teorema mostra como identificar as funções holomorfas definidas sobre a bola unitária aberta de c_0 e as séries de Dirichlet. O próximo passo é entender como são as séries de Dirichlet associadas aos polinômios homogêneos. Dado $P : c_0 \to \mathbb{C}$ um polinômio m-homogêneo, sabemos que $P_0 := P|_{B_{c_0}} : B_{c_0} \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa, e portanto está associada, via a transformada de Bohr, a uma série de Dirichlet $\mathfrak{B}(P_0)$. Neste caso, o que poderíamos dizer sobre $\mathfrak{B}(P_0)$? Para responder a essa pergunta, precisamos de mais um pouco de terminologia.

Dada uma série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, considere $\Omega(n)$ a quantidade de divisores primos de um número natural n contados com as suas multiplicidades. Por exemplo,

$$\Omega(2^3) = \Omega(2 \cdot 3^2) = \Omega(11 \cdot 13 \cdot 29) = 3.$$

Formalmente, podemos reordenar os termos de uma série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-s}$ de acordo com seus divisores primos, i. e.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\Omega(n)=m} a_n n^{-s}.$$

As séries de Dirichlet em que $a_n \neq 0$ somente se $\Omega(n) = m$ são chamadas de m-homogêneas. Denotaremos por $\mathfrak{D}_m$ o conjunto formado por essas séries.

Agora, considere o seguinte subconjunto de $\mathscr{H}_\infty$:

$$\mathscr{H}_\infty^m := \mathscr{H}_\infty \cap \mathfrak{D}_m = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty : a_n \neq 0 \Rightarrow \Omega(n) = m \right\}.$$

O conjunto $\mathscr{H}_\infty^m$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{H}_\infty$. De fato, ao somarmos duas séries de Dirichlet em $\mathscr{H}_\infty^m$, como ambas não possuem termos n^{-s} com $\Omega(n) \neq m$, na soma também não pode aparecer termos dessa forma. Também ocorre o mesmo ao multiplicarmos uma série de Dirichlet em $\mathscr{H}_\infty^m$ por um escalar.

Afirmamos que se $P \in \mathcal{P}(^m c_0)$ e $P_0 := P|_{B_{c_0}}$, então $\mathfrak{B}(P_0) \in \mathscr{H}_\infty^m$. Com efeito, se P_0 é m-homogêneo, então a sua representação por série de monômios é da forma

$$P_0(z) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha| = m}} c_\alpha(P_0) z^\alpha.$$

Mas para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N, 0, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, tem-se

$$|\alpha| = m \text{ se e somente se } \Omega(p_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot p_N^{\alpha_N}) = m,$$

e portanto $f \in H_\infty(B_{c_0})$ é m-homogêneo se e somente se $f \in \mathscr{H}_\infty^m$. Ademais, note que a aplicação

$$P \in \mathcal{P}(^m c_0) \longmapsto P|_{B_{c_0}} \in H_\infty(B_{c_0})$$

é uma isometria linear, pois

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^m c_0)} = \sup_{x \in B_{c_0}} |P(x)| = \|P|_{B_{c_0}}\|_{H_\infty(B_{c_0})}.$$

Segue da nossa discussão acima o seguinte resultado.

Teorema 5.24. *A igualdade isométrica $\mathcal{P}(^m c_0) = \mathscr{H}_\infty^m$ é mantida pela transformada de Bohr. Além disso,*

$$P\left(\left(\frac{1}{p_k^s} \right)_{k=1}^{\infty} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n^s}$$

para cada $s \in [Re > 0]$.

Neste ponto, entendido o suficiente sobre a transformada de Bohr, precisamos relembrar mais um resultado clássico de Teoria Analítica dos Números; a saber, o Teorema dos Números Primos. Lembre que este teorema se refere à "distribuição dos números primos" no conjunto dos números naturais; em particular, à sua distribuição assintótica. Mais especificamente, se $\pi(x)$ representa a quantidade de números primos menores do que x, gostaríamos de saber: Qual é o comportamento de $\pi(x)$ quando x tende para infinito? O grande matemático alemão, Carl

Friedrich Gauss, conjecturou que no limite (quando x tende para infinito) a razão $x/\ln(x)$ é igual a $\pi(x)$. Apesar de Gauss provavelmente ter feito essa conjectura pouco antes dos anos 1800, ela só foi provada em 1896 pelos matemáticos franceses Jacques-Salomon Hadamard e Charles de la Valée Poussin.

Enunciaremos abaixo o Teorema dos Números Primos em duas versões equivalentes.

Teorema 5.25 (Teorema dos Números Primos)**.** *Seja p_n o n-ésimo número primo. Então as seguintes relações assintóticas valem e são equivalentes:*

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{n\ln n}=1.$

Demonstração. Veja [1, Theorem 4.5] para uma demonstração da equivalência. E veja [1, Chap. 13] para uma prova analítica da validade do item (i). ■

Finalmente, os próximos dois resultados resolvem o Problema da Convergência Absoluta de Bohr e, com eles, encerramos o capítulo.

Teorema 5.26. *Para cada $m\geq 2$, existe uma série de Dirichlet m-homogênea $D\in\mathscr{H}_\infty^m$ tal que $\sigma_a(D)=\frac{m-1}{2m}$.*

Demonstração. Fixado $m\geq 2$, considere P o polinômio m-homogêneo da Proposição 3.8 e $D=\sum a_n n^{-s}$ sua série de Dirichlet m-homogênea correspondente pela Transformada de Bohr. Dado $\varepsilon>0$, segue da Proposição 3.8(i) que existe uma sequência decrescente $z\in\ell_{\frac{2m}{m-1}+\varepsilon}$ de modo que P não é analítico. Assim,

$$z_n^{\frac{2m}{m-1}+\varepsilon}n\leq\sum_{k=1}^{n}z_k^{\frac{2m}{m-1}+\varepsilon}\quad\text{para cada }\ n,$$

e isto implica

$$z_n n^{\frac{1}{\frac{2m}{m-1}+\varepsilon}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}z_k^{\frac{2m}{m-1}+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\frac{2m}{m-1}+\varepsilon}}\leq\|z\|_{\frac{2m}{m-1}+\varepsilon}=:K.$$

Portanto

$$z_n\leq K\frac{1}{n^{\frac{1}{\frac{2m}{m-1}+\varepsilon}}}\quad\text{para cada }\ n.$$

Visto que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}=0,$$

concluímos do Teorema dos Números Primos (Teorema 5.25(ii)) que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{n\ln n}\cdot\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}=0.$$

Em particular, existe $C > 0$ tal que $p_n \leq Cn^{1+\varepsilon}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(N)}$ com $|\alpha| = m$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{\frac{1}{\left(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon\right)(1+\varepsilon)}}} &= \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N})^{\frac{1}{\left(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon\right)(1+\varepsilon)}}} \\
&\geq \frac{1}{\left((C1^{1+\varepsilon})^{\alpha_1} (C2^{1+\varepsilon})^{\alpha_2} \cdots (CN^{1+\varepsilon})^{\alpha_N}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon\right)(1+\varepsilon)}}} \\
&\geq \frac{1}{C^{\frac{m}{\left(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon\right)(1+\varepsilon)}}} \left(\frac{z_1}{K}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{z_2}{K}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{z_N}{K}\right)^{\alpha_N} \\
&= \frac{1}{C^{\frac{m}{\left(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon\right)(1+\varepsilon)}} K^m} z^\alpha.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Daí, e usando a identificação $a_n = c_\alpha(P)$ se e somente se $n = \mathfrak{p}^\alpha$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{n^{\frac{1}{\left(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon\right)(1+\varepsilon)}}} &= \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)| \frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{\frac{1}{\left(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon\right)(1+\varepsilon)}}} \\
&\geq \frac{1}{K^m C^{\frac{m}{\left(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon\right)(1+\varepsilon)}}} \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P) z^\alpha| = \infty.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrário, isto mostra que

$$\sigma_a(D) \geq \frac{1}{\left(\frac{2m}{m-1} + \varepsilon\right)(1+\varepsilon)}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Desse modo, fazendo $\varepsilon \to 0$, segue que

$$\sigma_a(D) \geq \frac{m-1}{2m}. \tag{5.10}$$

Por outro lado, para cada $\varepsilon > 0$, a sequência $\left(\frac{1}{p_n^{\frac{m-1}{2m}+\varepsilon}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{2m}{m-1}}$. Com efeito,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^{\frac{m-1}{2m}+\varepsilon}}\right)^{\frac{2m}{m-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^{1+\varepsilon\frac{2m}{m-1}}} < \infty.$$

Assim, pela Proposição 3.8(ii), temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{n^{\frac{m-1}{2m}+\varepsilon}} = \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)| \left(\left(\frac{1}{p_n^{\frac{m-1}{2m}+\varepsilon}}\right)_{n=1}^{\infty}\right)^{\alpha} < \infty,$$

e portanto

$$\sigma_a(D) \leq \frac{m-1}{2m}. \tag{5.11}$$

Logo, por (5.10) e (5.11) segue que $\sigma_a(D) = \frac{m-1}{2m}$. ■

Teorema 5.27. *Temos*

$$S = \frac{1}{2},$$

e ainda

$$S \in \{\sigma_a(D) - \sigma_u(D) : D \in \mathscr{H}_\infty\}.$$

Mais especificamente, existe $D \in \mathscr{H}_\infty$ tal que $\sigma_u(D) = 0$ e $\sigma_a(D) = \dfrac{1}{2}$.

Demonstração. Segue da Proposição 5.21 e do Teorema 5.26 que

$$\frac{m-1}{2m} \leq S \leq \frac{1}{2}$$

para todo natural $m \geq 2$. Mas como

$$\frac{m-1}{2m} \xrightarrow{m\to\infty} \frac{1}{2},$$

devemos ter $S = \dfrac{1}{2}$.

Por outro lado, pelo Teorema 5.26 temos que para cada $m \geq 2$ existe uma série de Dirichlet $D_m = \sum_n a_n^m n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty^m$ tal que $\sigma_a(D_m) = \dfrac{m-1}{2m}$. Definindo

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2\|D_m\|_\infty} D_m(s) \in \mathscr{H}_\infty,$$

mostraremos que $\sigma_a(D) = \dfrac{1}{2}$ e $\sigma_u(D) = 0$. Para isso, considere $0 < \sigma < \dfrac{1}{2}$ e $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma < \dfrac{m_0 - 1}{2m_0} < \dfrac{1}{2}$. Como

$$\sum_{\Omega(n)=m_0} a_n n^{-s} = \frac{1}{m_0^2\|D_{m_0}\|_\infty} D_{m_0},$$

temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{n^\sigma} \geq \frac{1}{m_0^2\|D_{m_0}\|_\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{m_0}| \frac{1}{n^\sigma} = \infty,$$

o que implica $\sigma_a(D) \geq \sigma$. Visto que σ foi escolhido arbitrário em $(0, 1/2)$, obtemos $\sigma_a(D) \geq \frac{1}{2}$. Pelo Teorema de Bohr (Teorema 5.13) $\sigma_u(D) \leq 0$. Portanto, pela Proposição 5.21,

$$\frac{1}{2} \leq \sigma_a(D) \leq \sigma_a(D) - \sigma_u(D) \leq S \leq \frac{1}{2},$$

e assim

$$\sigma_a(D) - \sigma_u(D) = \frac{1}{2}.$$

Como $\sigma_a(D) \geq \dfrac{1}{2}$ e $\sigma_u(D) \leq 0$, concluímos que $\sigma_a(D) = \dfrac{1}{2}$ e $\sigma_u(D) = 0$. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] R. M. Aron, L. Bernal-González, D. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*, Chapman and Hall/CRC, 2015.

[3] R. M. Aron, V. I. Gurariy and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proceedings of the American Mathematical Society **133**, 795-803 (2005).

[4] H. F. Bohnenblust and E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Annals of Mathematics **32**, 600-622 (1931).

[5] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015, 2^a Edição.

[6] S. B. Chae, *Holomorphy and Calculus in Normed Spaces*, Marcel Dekker, 1985.

[7] J. A. Conejero, J. B. Seoane-Sepúlveda and P. Sevilla-Peris, *Isomorphic copies of* ℓ_1 *for* m*-homogeneous non-analytic Bohnenblust-Hille polynomials*, Mathematische Nachrichten **290**, 218-225 (2016).

[8] A. Defant, D. García, M. Maestre and P. Sevilla-Peris, *Dirichlet Series and Holomorphic Functions in High Dimensions*, Cambridge University Press, 2019.

[9] A. Defant and P. Sevilla-Peris, *The Bohnenblust-Hille cycle of ideas from a modern point of view*, Functiones et Approximatio **50**, 55-127, (2014).

[10] W. Ebeling, *Functions of Several Complex Variables and their Singularities*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2007.

[11] V. P. Fonf, V. I. Gurariy e M. I. Kadets, *An infinite dimensional subspace of $C(0,1)$ consisting of nowhere differentiable functions*, Comptes Rendus de L'Académie Bulgare des Sciences **52** 13-16 (1999).

[12] V. I. Gurariy, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Doklady Akademii Nauk SSSR **167**, 971-973 (1966).

[13] G. H. Hardy and M. Riez, *The General Theory of Dirichlet Series.* Cambridge University Press, 1915.

[14] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland, 1986.

[15] A. L. Neto, *Funções de uma Variável Complexa*, Projeto Euclides, IMPA, 2016, 3^a Edição.

[16] S. Ortega Castillo, *Cluster value problem in infinite-dimensional spaces*, Thesis, Texas A& M University, 2014.

[17] V. S. Ronchim, *Extensões de polinômios e de funções analíticas em espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, USP, 2016.

[18] A. R. Silva, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e ideais de composição*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2010.

[19] M. G. Soares, *Cálculo em uma Variável Complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2009, 5^a Edição.

[20] E. M. Stein and R. Schakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

[21] O. Toeplitz, *Über eine bei den Dirichletschen Reihen auftretende Aufgabe aus der Theorie der Potenzreihen von unendlichvielen Veränderlichen*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 417-432 (1913).