
Investigação Experimental de Controle Robusto Aplicado ao Problema de Rastreamento de Pêndulo Invertido Considerando Incertezas Politópicas

Adrian Eduardo Gonzalez Barreda



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Manaus
2020

Adrian Eduardo Gonzalez Barreda

**Investigação Experimental de Controle Robusto
Aplicado ao Problema de Rastreamento de
Pêndulo Invertido Considerando Incertezas
Politópicas**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação da Faculdade de Tecnologia da Universidade Federal do Amazonas como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação de Sistemas

Orientador: Renan Landau Paiva de Medeiros

Coorientador: João Edgar Chaves Filho

Manaus

2020

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

B271i Barreda, Adrian Eduardo Gonzalez
Investigação experimental de controle robusto aplicado ao problema de rastreamento de pêndulo invertido considerando incertezas politópicas / Adrian Eduardo Gonzalez Barreda . 2020
97 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Renan Landau Paiva de Medeiros
Coorientador: João Edgar Chaves Filho
Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Controle robusto. 2. Incertezas politópicas. 3. Desigualdades matriciais lineares. 4. Teorema de Kharitonov. 5. Sistema de pêndulo invertido. I. Medeiros, Renan Landau Paiva de. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

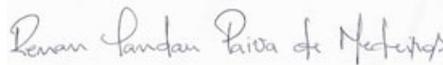
ADRIAN EDUARDO GONZALEZ BARREDA

**INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DE CONTROLE ROBUSTO
APLICADO AO PROBLEMA DE RASTREAMENTO DE PÊNULO
INVERTIDO CONSIDERANDO INCERTEZAS POLITÓPICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de concentração Controle e Automação de Sistemas.

Aprovado em 21 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Renan Landau Paiva de Medeiros, Presidente

Universidade Federal do Amazonas



Prof. Dr. Florindo Antônio de Carvalho Ayres Junior, Membro

Universidade Federal do Amazonas



Prof. Dr. Rodrigo Farias Araújo, Membro

Universidade do Estado do Amazonas

Dedico este trabalho de mestrado a minha mãe Margarita Rosa Barreda del Campo por ser a melhor persona que já conheci na minha vida, fonte de inspiração perseverança e luta, e ao mesmo tempo ter sido minha melhor amiga, para meu tio querido da alma por ter sido mais que um tio sempre um pai, ao meu irmão Edilberto Eduardo Torres Barreda sua esposa e meus dois sobrinhos Edilbertico e Eduardito, ao meu primo Eduardo Miguel Barreda Duque de Estrada e sua família maravilhosa, aos meus familiares e grandes amigos feitos no transcurso da minha vida, a Deus por ter me escutado e respondido sempre que pedi para ele.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por facilitar meu caminho nessa árdua andada, por me proporcionar a saúde mental necessária para nós emigrantes e poder assim enfrentar esta tarefa de grande envergadura longe de nossa terra e nossos costumes. Agradeço a minha mãe Margarita Rosa Barreda del Campo pelos ensinamentos de vida proporcionados nos melhores 19 anos da minha vida. Agradeço ao meu tio Eduardo Rafael Barreda del Campo pela confiança depositada em mim, por sempre acreditar no seu sobrinho e por ser o referencial de nossa família, agradeço a todos meus familiares pelo estímulo constante e as energias positivas recebidas.

Agradeço aos meus amigos Yarixey Sauquet Santana pela ajuda incondicional em todo momento, ao meu amigo Fernando Anglada pela ajuda nos momentos difíceis no Brasil. Agradeço ao meu orientador Renan Landau Paiva de Medeiros, pela confiança os ensinamentos a paciência e por sempre estar presente e disponível para esclarecer todas minhas dúvidas de maneira excelente. Agradeço ao professor João Edgar Chaves Filho pela confiança e seus grandes ensinamentos.

Agradeço ao Brasil por ser esse país maravilhoso que brinda tudo ou que tem aos estrangeiros, em especial à UFAM ao PPGEE e à CAPES pelo suporte acadêmico e financeiro oferecido durante o período de meu mestrado. Agradeço ao professor Florindo Ayres pela alegria transmitida e os ensinamentos propiciados, assim como os meus colegas do mestrado Nei Junior e Michel Campos pelas vivências neste trabalho de mestrado. Agradeço ao pessoal do laboratório do e-controls por me acolheram de maneira especial e pelas vivências experimentadas. Agradeço a todos os professores do PPGEE pelos ensinamentos e a disponibilidade em todo momento.

“Deus conhece os sacrifícios, as noites sem dormir, a oração aflita, as lágrimas no travesseiro e as lutas travadas em oculto, Deus te honrará em público.”

(Anónimo)

“Tente sempre uma vez mais pois em quanto não desistimos a vitória está a nosso alcance.”

(Anónimo)

“Mas não vos esqueçais de fazer o bem e de repartir com outros, pois com tais sacrifícios é que Deus se agrada.”

(Hebreus 13:16)

Resumo

Este trabalho, tem como finalidade a investigação experimental de uma nova metodologia de controle robusto o qual leva em consideração incertezas politópicas, de modo a ser realizado um estudo de caso aplicado ao problema de rastreamento de um sistema de pêndulo invertido. Para o desenvolvimento da técnica primeiramente é realizado um projeto de realimentação de estados baseados em desigualdades matriciais lineares (LMI) fazendo uso da minimização da norma H_2 , bem como do controlador misto H_2/H_∞ , objetivando proporcionar uma solução factível para os ganhos do controlador quando é considerado uma família de incertezas paramétricas no sistema dinâmico em questão decorrentes da variação de massa e comprimento da haste do pêndulo invertido, o que ocasiona uma deterioração de sua resposta dinâmica, bem como pode ocasionar instabilidade ao sistema. Em seguida, para o prosseguimento do projeto da metodologia proposta adota-se o sistema realimentado com os ganhos previamente calculados para o desenvolvimento de um projeto de um controlador na malha externa tendo como estrutura de controle o controlador proporcional-Integral (PI), este por sua vez é projetado fazendo uso do Teorema de Kharitonov e reescrevendo o problema como um problema programação linear objetivando garantir estabilidade robusta, bem como manter o desempenho robusto previamente projetado pela realimentação de estados. Por conseguinte, a aplicação das duas topologias de controle em cascata via LMI e projeto de otimização linear tem por finalidade garantir robustez e desempenho robusto ao sistema frente variações paramétricas no sistema de pêndulo invertido. Com o intuito de demonstrar a eficácia e robustez da metodologia proposta diversos testes em ambiente de simulação e experimental foram realizados. Os resultados apresentam que a metodologia proposta proporcionou ao sistema estabilidade robusta frente a uma família de incertezas, além disso garantiu um melhor desempenho dinâmico em comparação com outras metodologias.

Palavras-chave: Controle robusto. Incerteza politópica. LMI. Teorema de Kharitonov. Sistema de pêndulo invertido.

Abstract

This work aims to investigate a new robust control methodology that takes into account polytopic uncertainties to carry out a case study applied to the tracking problem of an inverted pendulum (IP) system. For the proposed technique, firstly, a state feedback project based on linear matrix inequalities (LMI) is carried out, through the controller H_2 norm, as well as the mixed H_2/H_∞ control, aiming to provide a solution feasible for the controller's gains, in the presence of parametric uncertainties, resulting from the system variation mass, which causes a deterioration of its dynamic response, as well as causing instability to the system. Then, adopted the state feedback gains obtained previously calculate to develop a controller's project in an external loop, having the Proportional-Integral (PI) controller such as control structure, using Kharitonov's theorem. Finally, the proposed methodology configuration is a cascade control structure that intertwines the internal control loop via a state-feedback LMI approach and an external loop via LP in a PI controller structure project, ensuring robustness and robust performance the presence of parametric variations in the IP system. Several tests in a simulation and experimental environment were carried out to demonstrate the proposed methodology's effectiveness and robustness. The results show that the proposed methodology provided the system with robust stability given a family of uncertainties and better dynamic performance than other methodologies.

Keywords: Polytopic uncertainty. LMI. Kharitonov's theorem. Inverted pendulum system.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diversos exemplos de sistemas de pêndulos invertidos.	19
Figura 2 – Esquema cartesiano para o IPS integrado com a base móvel linear. . .	27
Figura 3 – Diagrama de blocos para um sistema de realimentação unitária do tipo SISO com incerteza aditiva δ_a	38
Figura 4 – Diagrama de blocos para um sistema de realimentação unitária do tipo SISO com incertezas paramétricas δ	41
Figura 5 – Planta generalizada com um canal de saída para o controle pela norma H_2	43
Figura 6 – Planta generalizada com múltiplos canais de saída para o controlador misto H_2/H_∞	48
Figura 7 – Diagrama de blocos em cascata para a metodologia de controle proposta.	51
Figura 8 – Fluxograma do projeto de controlador robusto paramétrico proposto $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$	54
Figura 9 – Sistema de pêndulo invertido simples IPS	56
Figura 10 – Pêndulo invertido linear da Quanser®	57
Figura 11 – Sistema de hardware da Quanser® para o IPS	58
Figura 12 – Espaço das raízes para a região de desempenho desejado do controlador $PI - H_2$	64
Figura 13 – Espaço das raízes para a região de desempenho desejado do controlador $PI - H_2/H_\infty$	65
Figura 14 – Teste da exclusão da origem para o controlador $PI - H_2$	66
Figura 15 – Teste da exclusão da origem para o controlador $PI - H_2/H_\infty$	66
Figura 16 – Diagrama de blocos genérico para a inserção do distúrbio $d(t)$ no sistema.	67
Figura 17 – Deslocamento linear $x_c(t)$ do sistema com massa mínima.	71
Figura 18 – Posição angular $\theta(t)$ do sistema com massa mínima.	72
Figura 19 – Esforço de controle $u(t)$ do sistema com massa mínima.	72
Figura 20 – Deslocamento linear $x_c(t)$ do sistema com massa máxima.	73
Figura 21 – Posição angular $\theta(t)$ do sistema com massa máxima.	74

Figura 22 – Esforço de controle $u(t)$ do sistema com massa máxima.	74
Figura 23 – Deslocamento linear $x_c(t)$ considerando a inserção do distúrbio $d(t)$ na entrada do sistema com massa máxima.	76
Figura 24 – Posição angular $\theta(t)$ considerando a inserção do distúrbio $d(t)$ na entrada do sistema com massa máxima.	76
Figura 25 – Esforço de controle $u(t)$ considerando a inserção do distúrbio $d(t)$ na entrada do sistema com massa máxima.	77
Figura 26 – Deslocamento linear $x_c(t)$ do sistema com massa mínima.	81
Figura 27 – Variação angular $\theta(t)$ do sistema com massa mínima.	82
Figura 28 – Esforço de controle $u(t)$ do sistema com massa mínima.	83
Figura 29 – Deslocamento linear $x_c(t)$ do sistema com massa máxima.	84
Figura 30 – Variação angular $\theta(t)$ do sistema com massa máxima.	85
Figura 31 – Esforço de controle $u(t)$ do sistema com massa máxima.	86
Figura 32 – Deslocamento linear $x_c(t)$ do sistema com massa máxima.	87

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores dos parâmetros físicos do IPS	33
Tabela 2 – Autovalores do IPS linearizado em malha aberta.	59
Tabela 3 – Autovalores do IPS para controladores de malha interna.	61
Tabela 4 – Raízes do polinômio característico desejado para os controladores $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$	62
Tabela 5 – Controladores projetados para as malhas de controle externa e interna.	69
Tabela 6 – Índices de desempenho calculados para o Teste de simulação 1.	78
Tabela 7 – Índices de desempenho calculados para o Teste de simulação 2.	78
Tabela 8 – Índices de desempenho calculados para o Teste de simulação 3.	79
Tabela 9 – Índices de desempenho calculados para o Teste experimental 1.	88
Tabela 10 – Índices de desempenho calculados para o Teste experimental 2.	89

Lista de siglas

CPL *Constant Power Load*

COG *Centre Of Gravity*

CCW *Counter-Clockwise*

CC *Corrente continua*

DIPS *Double Inverted Pendulum System*

LMIs *Linear Matrix Inequalities*

2-DOF *Two Degrees Of Freedom*

FSF *Full State Feedback*

FTI *Função de Transferência Intervalar*

IPS *Inverted Pendulum System*

ISE *Integral square-error*

ITSE *Integral of time multiplied square-error Criterion*

IAE *Integral Absolute Error Criterion*

ITAE *Integral of time multiplied Absolute Error Criterion*

IQSC *Integral of Quadratic Signal Control*

IAEs *Índices de desempenho*

LGR *Lugar Geométrico das Raízes*

LQR *Linear Quadratic Regulator*

LP *Linear Programming*

LTI *Linear Time-Invariant*

RMPC *Robust Model Predictive Control*

MPC *Model Predictive Control*

PID *Controlador Proporcional Integral Derivativo*

PI *Controlador Proporcional Integral*

RIPS *Rotary Inverted Pendulum System*

RTDR *Robust Tracking and Disturbance Rejection*

SIDO *Single Input Dual Output*

SISO *Single Input Single Output*

TWIP *Two-Wheeled Inverted Pendulum*

TCRP *Teoria de Controle Robusto Paramétrico*

Sumário

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Motivação e justificativa	23
1.2	Objetivo geral	24
1.2.1	Objetivos específicos	24
1.3	Contribuições	25
1.4	Organização da Dissertação	25
2	ASPECTOS TÉCNICOS E TEÓRICOS DE UM IPS	26
2.1	Descrição da problemática	26
2.2	Determinação das equações de movimento não lineares	26
2.3	Linearização das equações de movimento do sistema de pêndulo invertido	30
2.4	Representação em espaços de estado e função de transferência do IPS	31
2.5	Conclusão do capítulo	34
3	BACKGROUND DE PROJETOS DE CONTROLE ROBUSTO	35
3.1	Introdução	35
3.2	Projeto de controlador robusto com variação paramétrica	36
3.2.1	Teorema de Kharitonov	36
3.2.2	Método de projeto do controlador de ordem fixa utilizando alocação de polos intervalar	37
3.2.3	Método de projeto de controlador de ordem fixa via alocação de polos intervalar para uma família de sistemas	40
3.3	Norma H_2 e controle misto H_2/H_∞ via LMIs	43
3.3.1	Controle H_2 por realimentação de estados via LMIs	43
3.3.2	Controle misto que relaciona as normas H_2 e H_∞ por realimentação de estados via LMIs	47

3.4	Metodologia de projeto de controlador em cascata que relaciona a variação paramétrica intervalar junto com as LMIs	50
3.5	Conclusão do capítulo	53
4	MATERIAIS E MÉTODOS	55
4.1	Introdução	55
4.2	Descrição do ambiente experimental	56
4.3	Modelo matemático do IPS considerando variações paramétricas	57
4.4	Cálculo dos ganhos dos controladores	59
4.4.1	Controladores de malha interna	60
4.4.2	Controladores de malha externa	61
4.5	Prova de Exclusão da Origem	65
4.6	Descrição dos Testes realizados	65
4.7	Método de Avaliação	68
4.8	Conclusão do capítulo	69
5	EXPERIMENTOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS	70
5.1	Avaliação dos Resultados de Simulação	70
5.1.1	Teste 1. Variação do sinal de referência considerando o sistema com massa mínima.	70
5.1.2	Teste 2. Variação do sinal de referência considerando o sistema com massa máxima.	73
5.1.3	Teste 3. Resposta ao distúrbio do tipo degrau para o sistema com massa máxima.	75
5.1.4	Teste 4. Avaliação dos índices de desempenho integrais (IAE's) para os resultados de simulação.	76
5.2	Avaliação dos Resultados Experimentais	80
5.2.1	Teste 1. Variação do sinal de referência considerando o sistema com massa mínima.	80
5.2.2	Teste 2. Variação do sinal de referência considerando o sistema com massa máxima.	82
5.2.3	Teste 3. Variação do sinal de referência considerando o distúrbio $d(t)$ e o sistema com massa máxima.	85
5.2.4	Teste 4. Avaliação dos índices de desempenho integrais (IAE's) para os resultados experimentais.	87
5.3	Conclusão do capítulo	89
6	CONCLUSÃO	90
6.1	Trabalhos Futuros	92
6.2	Contribuições em Produção Bibliográfica	93

REFERÊNCIAS	94
-------------------	----

Introdução

A área de controle automático de sistemas é um ramo da ciência e da engenharia que estuda o comportamento dinâmico de sistemas bem como a manipulação de determinadas variáveis para atingir o desempenho dinâmico desejado dos sistemas. Os sistemas de controle são encontrados em toda parte na sociedade, alguns exemplos de sistemas de controle incluem o corpo humano que desempenha uma série de funções conscientes e inconscientes ao longo de suas interações com o ambiente na busca contínua da homeostase. Além disso, em todas as instalações industriais cada parte da linha de produção funciona sob a supervisão de controladores digitais que garantem que cada dispositivo funcione corretamente de acordo com as especificações de desempenho desejadas para cada sistema em particular (DORF; BISHOP, 2011a).

Os sistemas de controle são classificados de acordo com suas características intrínsecas e individuais tendo como principal objetivo garantir a estabilidade dos sistemas dinâmicos bem como promover um desempenho previamente especificado pelo projetista, diversos exemplos de tais aplicações podem ser encontrados e verificados nos sistemas de pêndulo invertido. O interesse particular desta aplicação consiste na sua simples estrutura e distintas não linearidades associadas ao seu modelo matemático, o que o torna um sistema interessante para a realização de experimentos reais e virtuais apresentando grande utilidade como referência na aplicação de novas metodologias de controle. Os sistemas de pêndulos invertidos estão disponíveis em uma ampla gama de configurações como apresenta a Figura 1, dentre as mais populares encontram-se o sistema de pêndulo invertido rotativo (RIPS, do inglês, *Rotary Inverted Pendulum System*) o Sistema de Pêndulo Invertido Duplo (DIPS, do inglês, *Double Inverted Pendulum System*) e o Sistema de Pêndulo Invertido (IPS, do inglês, *Inverted Pendulum System*). Sendo estes os principais sistemas utilizados como referências para implementar novas técnicas de controle voltada para a área de robótica. Muitas investigações propõem a estabilização dos IPS por meio de um sistema de controle que consiga deixar o pêndulo invertido perfeitamente equilibrado na posição vertical enquanto rastreia um sinal de referência específico em uma base móvel.

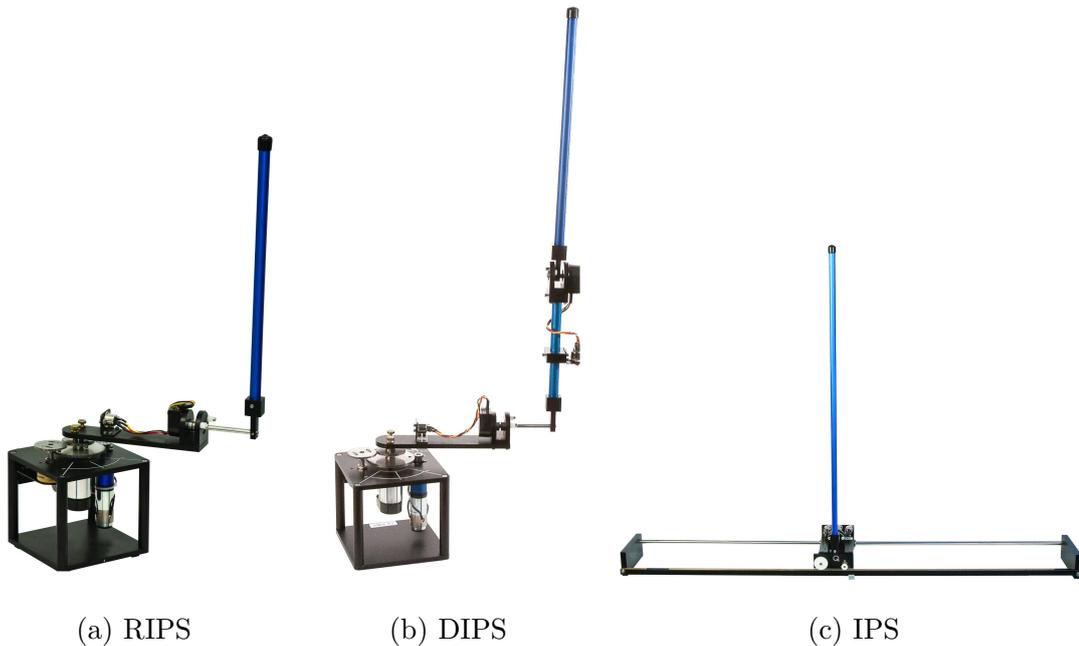


Figura 1 – Diversos exemplos de sistemas de pêndulos invertidos.

Fonte: o autor

Existe um campo de estudo abrangente quando se trata propor novas metodologias de controle para IPS como são os casos das redes neurais implementadas em (ANDERSON, 1989), o controle em tempo real (SUGIHARA; NAKAMURA; INOUE, 2002), a linearização de realimentação parcial (PATHAK; FRANCH; AGRAWAL, 2005), o controle preditivo (QIAN et al., 2011), entre outros métodos clássicos de projeto de controle como os apresentados em (JADLOVSKÁ; SARNOVSKÝ, 2012; JADLOVSKÝ; SARNOVSKÝ, 2013). Por outro lado, temos diversos trabalhos na área de controle moderno implementados no controle do IPS esses métodos incluem controle ótimo, controle PID, controle Nebuloso, controle de histerese, controle preditivo ou até métodos híbridos que são combinações dos métodos mencionados acima (BOUBAKER, 2013).

A teoria de controle clássico é projetada com base em uma função de transferência da planta controlada e possui uma estrutura de realimentação de saída, um exemplo desta teoria sendo implementada em IPS pode-se encontrar em (LUNDBERG; ROBERGE, 2003), onde é investigada uma metodologia de controle linear clássico através da técnica do Lugar Geométrico das Raízes (LGR) junto com o critério de estabilidade de Nyquist em um IPS e estendida para um DIPS, os resultados obtidos demonstram uma abordagem intuitiva para o problema sendo claramente compreendido. Em (HASAN et al., 2015) é modelado e simulado o problema do pêndulo invertido. Primeiro é obtido o modelo matemático do IPS seguido pelo projeto de controle clássico através de três métodos básicos de controle (LGR, Resposta em frequência e o controlador PID). Os resultados via simulação apresentaram boas características de estado estacionário e desempenho dinâmico.

Outras abordagens para projetar sistemas de controle aplicados nos sistemas de pêndulo invertido, fazem uso da teoria de controle clássica e moderna, como em (AKHTARUZZAMAN; SHAFIE, 2010) onde implementa-se em um RIPS um controlador PID através do método LGR, em seguida, abordam-se duas técnicas de controle moderno, sendo estas a realimentação total de estados (FSF, do inglês, *Full State Feedback*) e o regulador quadrático linear (LQR, do inglês, *Linear Quadratic Regulator*). Com base nos resultados apresentados observa-se que o método de controle clássico PID é capaz de controlar sistemas não lineares devido as características de resposta dinâmica serem satisfatórias, mas por enquanto na prática não são robustas. Por outro lado, as simulações e estudos experimentais determinaram a eficiência, confiabilidade e precisão dos outros dois controladores projetados, FSF e LQR, atendendo aos requisitos de projeto, e às variações de parâmetros. Finalmente o controlador LQR é o mais robusto e confiável do que o controlador FSF para manter o pêndulo estabilizado na posição vertical, apresentando também maior rapidez no tempo de acomodação da sua resposta dinâmica.

Além disso, encontra-se a teoria de controle robusto onde são apresentados importantes contribuições dentro da teoria de controle em geral. A mesma propõe um conjunto de técnicas de controle capaz de lidar com incertezas estruturadas e não estruturadas (BARMISH, 1989; CHAPPELLAT; BHATTACHARYYA, 1989). Os sistemas de controle robustos geralmente são projetados ou baseados em modelos matemáticos onde o controlador projetado deve atender a determinada especificação de desempenho dinâmico, quando o sistema opere em malha fechada, como: erro nulo de regime permanente, máximo sobressinal, máximo tempo de acomodação dentre outras características dinâmicas desejadas. Ademais, o projeto de controle robusto possibilita atenuações de distúrbios e proporciona estabilidade ao sistema mesmo sobre a influência de incertezas paramétricas, que por vezes podem estar caracterizadas devido a problemas na modelagem como: desconsideração de dinâmicas não dominantes, redução da ordem do modelo matemático, variações das condições do sistema real, variação paramétrica do modelo matemático entre outras não linearidades.

Dentre as técnicas mais estudadas de controle robusto, encontram-se a aplicação de Desigualdade Matriciais Lineares (LMIs, do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) utilizando as normas H_2 , H_∞ bem como o controle misto, que corresponde a observância conjunta das normas H_2 e H_∞ , fazendo uso da teoria de Lyapunov. As principais contribuições em problemas de controle formulados explicitamente em termos das normas de sistemas H_2 e H_∞ para funções de transferência, são atribuídas aos trabalhos apresentados por (YOULA; BONGIORNO; JABR, 1976) e (ZAMES, 1981). Para problemas formulados explicitamente em termos da norma H_2 a abordagem no domínio da frequência foi amplamente investigada em (YOULA; JABR; BONGIORNO, 1976), em seguida foram introduzidas técnicas no domínio do tempo por (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1995), bem como relacionou-se o problema escrito com base em LMIs em (BOYD et al., 1994).

De forma geral, o problema de controle empregando a norma H_2 objetiva projetar um controlador apropriado que estabilize internamente uma determinada planta e minimize a norma H_2 da matriz de transferência em malha fechada frente a qualquer entrada exógena para uma determinada saída observada (PALHARES; TAKAHASHI; PERES, 1997). Uma propriedade importante das LMIs reside no fato de que seu conjunto de restrições é convexo, deste modo esta propriedade é fundamental para que se possa utilizar ferramentas de programação linear, ou seja, são problemas de otimização convexa que minimizam uma função objetivo linear de um vetor de variáveis de decisão sujeito as restrições lineares do tipo LMIs (AGUIRRE, 2007). A teoria de controle robusto quando fundamentada em LMIs têm oferecido importantes resultados dentro da comunidade científica. Frequentemente alguns desses trabalhos são provados em IPS para testar novas estratégias de controle robusto. Alguns relevantes estudos podem ser citados como é o caso de (DELIBASI; KUCUKDEMIRAL; CANSEVER, 2007), onde é investigado um método de projeto de controlador robusto utilizando a estrutura de controle PID aplicado em um DIPS, com o intuito de combinar a eficácia dos métodos de otimização convexa baseados em LMIs com a estrutura de controlador PID, a fim de garantir a estabilidade quadrática e o desempenho robusto via especificação das normas H_2 e H_∞ transformando a problemática do projeto de controlador PID aplicadas ao uso de LMIs. Ademais, foram apresentados resultados experimentais nos quais ratifica-se a eficiência e robustez da metodologia proposta.

Neste cenário, apresenta-se em (KANADA; WATANABE; CHEN, 2011) outro estudo que investiga um projeto de controle fazendo uso de LMIs com aplicação em sistemas de pêndulo invertido de duas rodas (TWIP, *Two-Wheeled Inverted Pendulum*). Basicamente emprega-se o controlador pela norma H_2 por meio da realimentação de estados considerando parâmetros incertos existentes na modelagem do sistema. Os resultados mostrados conclui em que usando LMIs pode-se projetar um controlador H_2 robusto que satisfaça todas as condições desejadas de projeto. Finalmente, ao comparar o controlador H_2 robusto e o controlador LQR por meio de simulações e testes experimentais, verificou-se uma maior eficácia e precisão do controlador H_2 . Posteriormente, em (MINOUCHEHR et al., 2015) foi proposto um modelo de controlador preditivo robusto (RMPC, Robust Model Predictive Control) em um TWIP. O TWIP é considerado um sistema instável e sub atuado afetado por restrições físicas e ambientais. Devido às incertezas no modelo torna-se necessário conceber um modelo paramétrico de incertezas politópicas para descrever a dinâmica do robô junto com uma abordagem de controle que estabilize a postura do TWIP. A metodologia proposta RMPC é baseada em LMIs e esta sujeita a restrições de entrada e saída, onde o torque máximo produzido pelos motores na base do TWIP foi definido como uma restrição do sinal de controle na entrada do sistema. Por último, os resultados corroboram que a metodologia RMPC, quando comparado com o controlador MPC, apresentou um desempenho dinâmico superior.

Por outra parte, com uma abordagem focado nos sistemas de controle robustos importantes contribuições foram obtidas por meio dos métodos de otimização que utilizam ferramentas de programação linear (LP, do inglês, *Linear Programming*). Nessa temática, diversos trabalhos que investigam as aplicações e o desenvolvimento da LP, fazem uso de métodos de projeto de controlador de ordem fixa (KEEL; BHATTACHARYYA, 1999) considerando incertezas politópicas baseados no Teorema de Kharitonov (BARMISH, 1989). O objetivo principal nos métodos de LP é garantir a estabilidade do sistema quando submetido a variações paramétricas (KEEL; BHATTACHARYYA, 1997a). Uma das aplicações desta metodologia pode ser vista em (MEDEIROS et al., 2018) onde é implementado um projeto de controle robusto multivariável descentralizado empregando LP aplicado a um conversor de potência do tipo SIDO (do inglês, *Single Input Dual Output*) o qual possui um único elemento indutivo compartilhado para múltiplas saídas. Para o projeto de controle foi realizado uma análise de pareamento (Entrada/Saída) objetivando identificar qual é a melhor entrada para controlar uma determinada saída de modo que os efeitos indesejados do acoplamento sejam minimizados devido ao fato de ter uma estratégia de controle robusta que leva em consideração incertezas paramétricas. Neste trabalho, as incertezas paramétricas presentes no modelo da planta, foram definidas como a variação de carga e do nível de tensão na entrada do sistema. Os resultados apresentaram que o controle robusto proposto obteve melhor desempenho em comparação com as demais metodologias. Seguidamente, em (LUCAS-MARCILLO et al., 2019) é apresentado uma metodologia de controle robusto através da LP que inicialmente leva em consideração o Teorema de Kharitonov e conseqüentemente é reescrito o problema de otimização linear levando em consideração o Teorema de Chebyshev, o que vai produzir uma região de factibilidade mais flexível. Tal metodologia foi aplicada em uma micro-rede CC (corrente contínua) a qual possui uma carga de potência constante (CPL, do inglês, *Constant Power Load*) conectada como carga no barramento CC controlado.

Por último no estudo apresentado em (TANAKA et al., 2013) foi proposto um método de projeto de controle com um observador de perturbação de carga. Onde os ganhos do observador são determinados por meio da LP em termos do critério de estabilidade de Routh-Hurwitz e a função de custo é definida com base no teorema do valor final. Além disso, o modelo de controle é baseado numa estrutura de realimentação de estados e os ganhos são determinados através do método LQR. Os resultados exibidos através da realização de um experimento em um motor CC confirmam a eficácia do método proposto quando comparada com outras técnicas de controle investigadas, onde a saída estimada pelo sistema de controle proposto converge com maior rapidez para o rastreamento de um sinal de referência em presença de uma perturbação de carga adicionada ao sistema de controle.

Considerando o que foi levantado no estado da arte, este trabalho visa propor uma metodologia de projeto de controle robusto que leva em consideração a abordagem via

LMIs associado a aplicação da norma H_2 e ao controlador misto H_2/H_∞ aplicada numa malha de controle interna utilizando a estrutura de realimentação de estados. Em sequência constitui-se um projeto de controlador fundamentado na estrutura PI. Os ganhos do controlador PI são obtidos por meio do teorema de Kharitonov. Dito controlador é projetado na malha de controle externa levando em consideração incertezas politópicas. Em sentido geral tanto a malha de controle interna quanto a malha de controle externa conformam a metodologia proposta por meio de uma estrutura de controle em cascata. Tal metodologia foi aplicada em um IPS como estudo de caso, ademais com o objetivo de promover as incertezas paramétricas do sistema será realizada a variação da massa da base móvel e a variação no comprimento da haste do sistema.

1.1 Motivação e justificativa

Em vistas do estado da arte anteriormente apresentado observa-se que o estudo de técnicas de projeto de controladores robustos focados em garantir robustez e desempenho à sistemas dinâmicos vem ganhando atenção no mundo acadêmico bem como em aplicações industriais, devido a estas metodologias conseguirem contornar diversas problemáticas enfrentadas nas aplicações reais como desconsideração de dinâmicas não dominantes, desconsideração de aspectos não modelados na planta, redução da ordem do modelo matemático, imprecisões na mensuração de parâmetros, erros relativos as variáveis de medição e de atuação, entre outros problemas que possam vir a ocorrer. Deste modo, uma abordagem clássica para sanar tal problemática é considerar que tais problemas sejam representados por um intervalo de variação dos parâmetros de um determinado modelo matemático, tal incerteza é denominada de incerteza estruturada. Assim, como um estudo de caso pode-se aplicar tal abordagem ao IPS, visto que tal sistema possui uma grande gama de aplicações bem como torna-se um problema interessante do ponto de vista do controle devido às não linearidades e imprecisões na determinação dos parâmetros presentes no seu modelo matemático.

De posse de um modelo matemático contendo incertezas paramétricas torna-se viável a investigação de algumas abordagens de controle robusto dentre as possibilidades encontra-se uso de LMIs para projeto de realimentação de estados, projeto de um controlador LQR, projeto de alocação de polos, projeto de controladores em cascata, uso de pré-compensadores entre outras abordagens. Neste contexto, a fim de garantir a estabilidade e o desempenho robusto do sistema propõe-se o projeto de um controlador por meio da mistura de duas abordagens distintas de controle robusto sendo estas a utilização de LMIs para o projeto de controlador de realimentação de estados e a utilização do projeto de outro controlador na malha externa realimentando a saída fazendo uso da LP baseado no Teorema de Kharitonov. Deste modo, tal metodologia propõe a integração das duas metodologias fazendo uso tanto da solução via LMIs por meio das normas H_2 e H_∞ quanto

utilizando a LP para garantir a observância ao Teorema de Kharitonov, com o intuito de atender as especificações de projeto desejadas. Adicionalmente, este trabalho propõe o desenvolvimento de uma investigação por meio de experimentos e simulações no que tange a eficácia da metodologia proposta tendo como estudo de caso o IPS considerando como parâmetro incerto o tamanho e a massa da haste assim como a massa da base móvel do sistema, os quais serão modeladas por meio de incertezas estruturadas obtendo assim um modelo matemático intervalar. Em sequência será realizada uma análise comparativa de diversas técnicas de controle com o intuito de demonstrar a adequabilidade e eficiência da metodologia proposta garantindo estabilidade e desempenho robusto para o sistema.

1.2 Objetivo geral

Investigar experimentalmente uma técnica de controle robusto em cascata (malha de controle interna e externa) que integre os conceitos de LMIs e controle robusto intervalar, considerando incertezas politópicas aplicado a um sistema de pêndulo invertido (IPS).

1.2.1 Objetivos específicos

Essencialmente, os objetivos específicos e metas deste trabalho de mestrado são:

1. Desenvolver um modelo matemático que descreva adequadamente a dinâmica do sistema de pêndulo invertido, bem como descreva as incertezas relativas ao modelo matemático;
2. Projetar os controladores para o sistema de pêndulo invertido, utilizando metodologias bem conhecidas na literatura;
3. Desenvolver um simulador em ambiente computacional, que descreva adequadamente o sistema de pêndulo invertido investigado, bem como possibilite a implementação dos controladores projetados;
4. Desenvolver testes experimentais dos controladores investigados em um sistema de pêndulo invertido real;
5. Desenvolver uma análise dos principais índices de desempenho integral, IAE, ISE, ITAE, ITSE e IQSC, de modo a avaliar quantitativamente a robustez e o desempenho das estratégias de controle investigadas.

1.3 Contribuições

Por fim, espera-se que a contribuição deste trabalho represente um passo de avanço sólido na área de controle de sistemas lineares, bem como poder recomendar a técnica de controle robusto paramétrico para aplicações em sistemas robóticos e processos industriais. Os testes experimentais permitem certificar a eficiência e o desempenho adequado atingido pelos controladores sendo propostos quando operam em um ambiente real.

1.4 Organização da Dissertação

Esta dissertação de mestrado encontra-se distribuída em sete capítulos, a saber:

1. Capítulo 1: Apresenta a introdução e apresentação da problemática estudada, o estado da arte para aplicações de controle robusto assim como estratégias de controle aplicadas aos sistemas de pêndulos invertidos descrevendo a motivação e a justificativa para o desenvolvimento deste estudo assim como apresentando os objetivos gerais e específicos;
2. Capítulo 2: Descreve a modelagem matemática do pêndulo invertido e a obtenção do modelo matemático intervalar que leva em consideração incertezas paramétricas, como a variação da massa e tamanho da haste do sistema;
3. Capítulo 3: Descreve detalhadamente a base teórica de controle robusto utilizada, bem como apresenta a metodologia de controle robusto proposta neste trabalho;
4. Capítulo 4: Apresenta o ambiente computacional para o desenvolvimento das simulações, bem como apresenta o ambiente experimental desenvolvido para a realização dos testes, em seguida descreve detalhadamente os testes desenvolvidos para esta investigação;
5. Capítulo 5: Apresenta e discute os resultados parciais obtidos via simulação;
6. Capítulo 6: Apresenta a análise dos resultados experimentais obtidos.
7. Capítulo 7: Apresenta as conclusões dos resultados integrais, bem como expõe o cronograma e recomendação para trabalhos futuros.

Aspectos Técnicos e Teóricos de um Sistema de Pêndulo Invertido

Nesse capítulo será discutido os aspectos técnicos e teóricos de um sistema de pêndulo invertido, de modo a obter um modelo matemático que descreva adequadamente o comportamento dinâmico do sistema, para tal finalidade será utilizado o método de Lagrange. Nesta abordagem será considerado como entrada do sistema a força F_c que por sua vez é o esforço de controle aplicado (u).

2.1 Descrição da problemática

A Figura 2 apresenta um esquema simplificado de um IPS o qual é montado em uma base móvel linear, reconhecida em outras referências como IP02 (APKARIAN; LACHERAY; MARTIN, 2012). Na Figura 2, pode-se verificar que o sentido de rotação do pêndulo invertido é definido positivo quando o pêndulo gira em sentido anti-horário (CCW, do inglês, *Counter-Clockwise*) e a base móvel linear se movimenta para a direita. Além disso, o ângulo de abertura em relação ao plano normal da base móvel é definido como zero, isto é, $\theta = 0$ ou $2\pi \text{ rad}$, tal angulação corresponde ao pêndulo invertido localizado perfeitamente na posição vertical sobrepondo o plano normal. Ademais, por convenção adota-se a direção positiva do deslocamento linear é para direita como indicado pelas coordenadas cartesianas globais na Figura 2.

2.2 Determinação das equações de movimento não lineares

A obtenção das equações não lineares de movimento para o IPS junto com sua base móvel é obtida considerando os principais fundamentos mecânicos. Para tal finalidade a modelagem matemática desenvolvida nesta seção utiliza abordagem Lagrangiana baseada

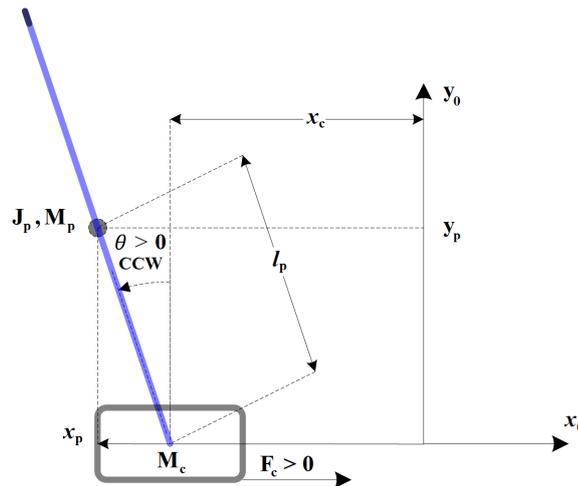


Figura 2 – Esquema cartesiano para o IPS integrado com a base móvel linear.

Fonte: o autor

em energia (FANTONI; LOZANO, 2002; OGATA, 2010). Neste caso, devido ao sistema possuir dois graus de liberdade (2-DOF, do inglês, *Two Degrees Of Freedom*) deve haver duas coordenadas Lagrangianas. As duas coordenadas escolhidas são nomeadas como x_c e θ , que representam a posição do carrinho e o ângulo de inclinação do pêndulo. Presume-se que a massa do pêndulo invertido (M_p) é calculada no centro de gravidade (COG, do inglês, *Centre Of Gravity*). O centro de massa do pêndulo ¹ é de comprimento l_p , e o momento de inércia em relação ao seu centro de massa é J_p . Por fim, a posição do COG do pêndulo denota as coordenadas cartesianas generalizadas $(x_p; y_p)$.

Para a utilização do método de Lagrange deve-se inicialmente determinar o Lagrangiano do sistema sendo este calculado por meio da energia total do sistema (E_T). Para obter a energia total do IPS foi considerada a energia cinética total (T_T) e a energia potencial total (V_T) do IPS (OGATA, 2010). De acordo com o esquemático do IPS apresentado na Figura 2, as coordenadas cartesianas absolutas do COG do pêndulo podem ser caracterizadas por meio das seguintes relações.

$$x_p = x_c - l_p \sin(\theta) \quad (1)$$

$$y_p = l_p \cos(\theta) \quad (2)$$

Em seguida, deve-se calcular a energia potencial total do sistema V_T , conforme apresenta (3). A energia potencial de um sistema é a quantidade de energia que o mesmo ou um determinado elemento dele tem devido a estar realizando ou ter realizado algum

¹ O centro de massas também pode ser chamado de centro de gravidade quando um corpo estiver sob a influência de um campo gravitacional uniforme, ou seja, aquele em que a força gravitacional é igualmente exercida em todos os pontos do objeto.

tipo de trabalho, sendo por sua vez causado por um deslocamento vertical denominado de energia potencial gravitacional.

$$V_T = M_p g l_p \cos(\theta) \quad (3)$$

Após calcular a energia potencial torna-se importante determinar a energia cinética total do sistema T_T . A energia cinética deve medir a quantidade de energia em um sistema devido ao seu movimento. Deste modo, T_T é calculada como a soma da energia cinética rotacional e translacional sendo estas relacionadas com a base móvel (considerando que a direção de translação da base móvel é ortogonal a rotação do rotor) e ao pêndulo invertido integrado (considerando que a translação do pêndulo invertido simples é ortogonal a sua rotação). Desta forma a energia cinética translacional da base móvel motorizada é representada por T_{ct} e pode ser expressa da seguinte maneira:

$$T_{ct} = \frac{1}{2} M (\dot{x}_c)^2 \quad (4)$$

A continuação considera-se a energia cinética rotacional relacionada ao motor CC utilizado na base móvel a qual é representada por T_{cr} e pode ser caracterizada por (5):

$$T_{cr} = \frac{1}{2} \frac{J_m K_g^2 (\dot{x}_c)^2}{r_{mp}^2} \quad (5)$$

Desse modo o resultado da soma de (4) e (5) possibilitam o cálculo da energia cinética total da base móvel T_c sendo definida da seguinte forma:

$$T_c = \frac{1}{2} M_c (\dot{x}_c)^2 \quad (6)$$

onde

$$M_c = M + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \quad (7)$$

Conseqüentemente, prosseguimos com o cálculo da energia cinética, agora relacionada ao pêndulo. Primeiro assume-se que a massa do pêndulo invertido simples M_p é calculada no COG. Sendo assim, a energia cinética translacional do pêndulo T_{pt} pode ser apresentado em função da velocidade linear no COG como apresenta (8):

$$T_{pt} = \frac{1}{2} M_p \sqrt{(\dot{x}_p)^2 + (\dot{y}_p)^2} \quad (8)$$

onde as coordenadas x e y da velocidade linear no COG do pêndulo pode ser calculada por meio das formulações (9) e (10), respectivamente.

$$\dot{x}_p = \dot{x}_c - l_p \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (9)$$

$$\dot{y}_p = -l_p \sin(\theta) \dot{\theta} \quad (10)$$

Em sequência a energia cinética rotacional do pêndulo T_{pr} , pode ser calculada por meio da seguinte relação:

$$T_{pr} = \frac{1}{2} J_p (\dot{\theta})^2 \quad (11)$$

onde o momento de inércia do pêndulo invertido J_p , em relação ao seu COG é caracterizado por:

$$J_p = \frac{1}{12} M_p L_p^2 \quad (12)$$

Para realizar o cálculo da T_T considera-se a soma individual das equações (4)–(11) onde previamente foram calculadas todas as energias cinéticas presentes no sistema, deste modo pode-se obter a formulação (13).

$$T_T = \frac{1}{2} (M_c + M_p) (\dot{x}_c)^2 - M_p l_p \cos(\theta) (\dot{\theta}) (\dot{x}_c) + \frac{1}{2} (J_p + M_p l_p^2) (\dot{\theta})^2 \quad (13)$$

De posse na T_T e levando em consideração que o IPS é um sistema com 2-DOF, as equações de Lagrange podem ser escritas em termos das duas coordenadas generalizadas x_c e θ , logo considerando as derivadas de primeira e segunda ordem; reescreve-se as seguintes relações.

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_c} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_c} \right) = Q_{x_c} \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = Q_{\theta} \quad (15)$$

onde L é o Lagrangiano do sistema, definido como a diferença entre a energia cinética total e a energia potencial total conforme apresenta (16):

$$L = T_T - V_T \quad (16)$$

Nas equações (14) e (15), Q_{x_c} e Q_{θ} são definidos como as forças generalizadas aplicadas às coordenadas x_c e θ respectivamente. No sistema as forças generalizadas podem ser definidas como:

$$Q_{x_c} = F_c - B_{eq}(\dot{x}_c) \quad (17)$$

$$Q_\theta = -B_p(\dot{\theta}) \quad (18)$$

As forças não conservativas correspondentes às coordenadas generalizadas são F_c e as forças de amortecimento viscosas, onde B_p é o coeficiente de torque de atrito viscoso do pêndulo (também conhecido como amortecimento viscoso), e B_{eq} é o coeficiente de força de amortecimento viscoso do carrinho.

Deve-se notar que o atrito de Coulomb foi desconsiderado. Além disso, a força que o carro exerce sob a ação do pêndulo tem sido ignorada no modelo desenvolvido. Por fim, desenvolvendo os cálculos relativos às equações (14), (15) e (16) e substituindo nas equações (17) e (18) obtém-se as seguintes equações de movimento não lineares:

$$(J_{eq} + M_p) \ddot{x}_c - M_p l_p \cos(\theta) \ddot{\theta} + M_p l_p \sin(\theta) (\dot{\theta})^2 = F_c - B_{eq} \dot{x}_c \quad (19)$$

$$-M_p l_p \cos(\theta) \ddot{x}_c + (J_p + M_p l_p^2) \ddot{\theta} - M_p l_p g \sin(\theta) = -B_p \dot{\theta} \quad (20)$$

2.3 Linearização das equações de movimento do sistema de pêndulo invertido

De posse no modelo não-linear que descreve o comportamento dinâmico do IPS torna-se necessário a obtenção de um modelo linearizado em torno a um determinado ponto de operação. Para realizar a linearização diversas metodologias podem ser utilizadas, no entanto para este trabalho faz-se uso da linearização por séries de Taylor (GARCIA, 2005) o qual descreve o comportamento dinâmico do sistema entorno de um ponto de operação escolhido. Deste modo, opta-se pela seleção do ponto $\theta = 0$ que descreve a condição de repouso do sistema apresentando a haste do pêndulo invertido sobreposta ao plano normal considerando manter o pêndulo invertido na posição vertical. Desta forma, tendo em conta que θ e $\dot{\theta}$ sejam grandezas suficientemente pequenas ou variações angulares próximas de 0, podem ser utilizadas as seguintes aproximações (OGATA, 2010).

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= 1 \\ \sin(\theta) &= \theta \\ \theta(\dot{\theta})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Finalmente, substituindo as aproximações em (21) nas equações de Lagrange (19) e (20), deixando em evidência a aceleração linear \ddot{x}_c e a aceleração angular $\ddot{\theta}$, são obtidas as seguintes equações de movimento lineares para o IPS.

$$\ddot{x}_c = \frac{1}{J_T} \left(- (J_p + M_p l_p^2) B_{eq} \dot{x}_c - M_p l_p B_p \dot{\theta} + M_p^2 l_p^2 g \theta + (J_p + M_p l_p^2) F_c \right) \quad (22)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_T} \left(- (M_p l_p B_{eq}) \dot{x}_c - (J_{eq} + M_p) B_p \dot{\theta} + (J_{eq} + M_p) M_p l_p g \theta + M_p l_p F_c \right) \quad (23)$$

onde

$$J_T = J_{eq} + J_p + M_p J_p + J_{eq} M_p l_p^2 \quad (24)$$

$$J_{eq} = M_c + \frac{\eta_g K_g^2 J_m}{r_{mp}^2} \quad (25)$$

2.4 Representação em espaços de estado e função de transferência do IPS

Com base na condição de linearização (21) e o modelo linearizado definido em (22) e (23), podemos reescrever o sistema em espaços de estados conforme apresenta a seguinte relação.

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= A \delta x(t) + B \delta u(t) + B_w \delta w(t) \\ \delta y(t) &= C \delta x(t) + D \delta u(t) \end{aligned} \quad (26)$$

Na formulação (26) as matrizes A , B , C , e D descrevem a dinâmica do IPS, $\delta w(t)$ corresponde ao distúrbio sendo aplicado na planta e $\delta y(t)$ é a variação da saída da planta. Além disso, foi igualada a matriz de perturbação B_w com a matriz de entrada B , desejando reproduzir um distúrbio intenso de curta duração por meio de um sinal de tensão aplicado no motor ou considerar uma força mecânica aplicada na haste do pêndulo, promovendo assim uma variação no ponto de equilíbrio do sistema. Esta situação é um caso particular visto que B_w pode ter diferentes representações válidas (um sinal do tipo impulsivo, constante ou senoidal por citar alguns). Ademais, foram considerados para compor o vetor de estados do sistema as coordenadas generalizadas x_c e θ , junto com suas respectivas derivadas \dot{x}_c e $\dot{\theta}$ que representam a velocidade da base móvel e a velocidade angular do pêndulo, respectivamente. Sendo assim foi construída a relação estabelecida em (27) para a confecção do vetor de variação dos estados adotados $\delta x(t)$ em relação a variação do sinal de controle $\delta u(t)$ que representa a entrada ao sistema.

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= \left[\delta x_c(t) \quad \delta \theta(t) \quad \delta \dot{x}_c(t) \quad \delta \dot{\theta}(t) \right]^T \\ \delta u(t) &= \delta F_c \end{aligned} \quad (27)$$

Como o controle do motor é realizado por meio da tensão e não do torque torna-se necessário inserir a dinâmica do atuador à modelagem matemática do sistema e assim obter um modelo matemático em função da tensão aplicada ao motor CC. Deste modo, substitui-se a entrada do sistema F_c , pela tensão de alimentação do motor V_m , conforme descreve a relação (28) a qual representa o torque do motor acoplado rigidamente na base móvel.

$$F_c = -\frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m \dot{x}_c}{R_m r_{mp}^2} + \frac{\eta_g K_g K_t \eta_m V_m}{R_m r_{mp}} \quad (28)$$

Seguidamente reorganizando as equações de movimento lineares (22), (23) e considerando o vetor de estados junto com a entrada ao sistema como em (27), pode-se obter as matrizes do sistema em espaço de estados (A , B , C , e D) que descrevem o comportamento do sistema linearizado entorno ao ponto de operação escolhido em (21) conforme apresentam as seguintes relações.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{M_p^2 l_p^2 g}{J_T} & -\frac{(J_p + M_p l_p^2) B_{eq}}{J_T} & -\frac{M_p l_p B_p}{J_T} \\ 0 & \frac{(J_{eq} + M_p) M_p l_p g}{J_T} & -\frac{M_p l_p B_{eq}}{J_T} & -\frac{(J_{eq} + M_p) B_p}{J_T} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J_p + M_p l_p^2}{J_T} \\ \frac{M_p l_p}{J_T} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad D = [0] \quad (30)$$

Por outro lado, com o intuito de obter uma relação entre a parte física do sistema e seu modelo matemático linearizado foi necessário determinar uma função de transferência que represente o sistema no domínio da frequência. Para isso, as condições iniciais devem ser consideradas nulas e obedecer a relação estabelecida em (31) (CHEN, 1999).

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (31)$$

Em seguida, para facilitar o cômputo de $\hat{G}(s)$ as matrizes do sistema A e B podem ser expressas de forma mais compacta como apresentadas em (32). Sendo assim, os elementos definidos como a_1, a_2, \dots, a_6 e b_1, b_2 são equivalentes aos elementos das matrizes A e B em (29) com a mesma posição linha por coluna, isto é, $a_1 = \frac{M_p^2 l_p^2 g}{J_T}$ e assim por diante para os elementos restantes.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

A continuação, substituindo as matrizes do sistema (32) e (30) na equação (31) podem-se obter a função de transferência genérica (33). A função de transferência $\hat{G}(s)$ é definida

para um limite inferior e um limite superior, decorrente da variação paramétrica considerada na massa dos subsistemas que compõe o IPS.

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{(a_2a_4 - a_1a_5)^{-1}(-2b_1s^2 + (2b_1a_2 + b_1a_6)s + b_2a_3)}{s^4 + (-a_2 - a_6)s^3 + (a_2a_6 - a_4)s^2 + (a_1a_5 - a_2a_4)s} \\ \frac{(a_2a_4 - a_1a_5)^{-1}(-2b_2s^2 + (2b_2a_6 + b_1a_5)s + b_2a_2)}{s^4 + (-a_2 - a_6)s^3 + (a_2a_6 - a_4)s^2 + (a_1a_5 - a_2a_4)s} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Os valores específicos dos parâmetros físicos que conformam o IPS são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Valores dos parâmetros físicos do IPS

Parâmetro	Descrição	Quantidade	Unidade
R_m	Resistência de armadura do motor	2.6	Ω
V_m	Tensão de armadura do motor	6	V
L_m	Corrente de armadura do motor	180×10^{-6}	H
K_t	Constante de torque do motor	0.00767	N·m/A
K_m	Constante de força retro-eletromotriz	0.00767	V·s/rad
K_g	Relação de engrenagem da caixa planetária	3.71	
r_{mp}	Raio do pinhão do motor	6.35×10^{-3}	m
η_m	Eficiência do motor	1.0	
η_g	Eficiência da caixa planetária	1.0	
J_m	Momento de inércia do rotor	3.9×10^{-7}	kg/m ²
J_p	Momento de inércia do pêndulo	$(1.19 \rightarrow 7.88) \times 10^{-3}$	kg·m ²
B_{eq}	Amortecimento viscoso do motor	4.3 \rightarrow 5.4	
B_p	Amortecimento viscoso do pêndulo	0.0024	
M_c	Massa do carrinho IP02	0.57	kg
M_w	Peso adicional do carrinho IP02	0.37	kg
M	Massa total do IP02	$M_c + M_w$	kg
M_p	Massa do pêndulo	0.127 \rightarrow 0.230	kg
L_p	Comprimento total do pêndulo	0.3365 \rightarrow 0.6413	m
l_p	Comprimento do pêndulo do pivô ao COG	0.1778 \rightarrow 0.3302	m

Fonte: (APKARIAN; LACHERAY; MARTIN, 2012)

2.5 Conclusão do capítulo

Este capítulo abordou aspectos técnicos e teóricos sobre o IPS, bem como descreveu detalhadamente o modelo matemático que representa o comportamento dinâmico do sistema na forma não-linear, em seguida discutiu formas de linearização do modelo em torno a um ponto de operação desejado assim como a obtenção da função de transferência genérica. O próximo capítulo irá realizar a revisão bibliográfica dos principais conceitos e fundamentos da teoria de controle robusto bem como a base científica da metodologia de controle proposta.

Background de Projetos de Controle Robusto

Os sistemas de controle robustos geralmente são projetados baseados em modelos matemáticos ou baseados em dados. No caso das técnicas de controle baseadas em modelos o controlador projetado deve atender a determinada especificação de desempenho dinâmico quando o sistema opere em malha fechada como erro nulo de regime permanente, máximo sobressinal, máximo tempo de acomodação dentre outras características dinâmicas desejadas. Além disso, o projeto de controle robusto possibilita atenuações de distúrbios e proporciona estabilidade ao sistema mesmo sobre a influência de incertezas, que por vezes podem estar caracterizadas devido a problemas na modelagem como desconsideração de dinâmicas não dominantes, redução da ordem do modelo matemático, variações das condições do sistema real, variação paramétrica referentes aos parâmetros do modelo que foram considerados constantes, condições de desgaste, tolerância dos valores dos parâmetros mensurados e/ou ruídos, linearização de sistemas não lineares entre outros (MEDEIROS et al., 2018).

3.1 Introdução

Metodologias de projeto de controle baseadas em modelos necessitam dispor de um modelo matemático que represente adequadamente o comportamento dinâmico do sistema real. Esses modelos matemáticos podem ser classificados como lineares ou não lineares, bem como podem-se obter diversos tipos de modelos como modelo físico, modelo fenomenológico, modelo empírico (BHATTACHARYYA; DATTA; KEEL, 2009). Nesse contexto, diversos estudos são conduzidos com base em modelos lineares e não lineares, no entanto os modelos lineares possuem um elevado arcabouço de ferramentas bem conhecidas na literatura que por sua vez facilitam a análise e projeto de estratégias de controle quanto à sua complexidade, portanto torna-se uma alternativa, à transformação de um modelo não linear poder ser representado por um modelo linear considerando o entorno de um

determinado ponto de operação, tal processo denomina-se de linearização (OGATA, 2010) como apresentado na seção 2.3.

De posse de um modelo linearizado em um determinado ponto de operação deve-se atentar que diversas considerações foram aplicadas para a obtenção do modelo de modo que o tal modelo matemático não representa em sua plenitude toda a dinâmica proporcionada por um modelo não linear visto que o mesmo só possui uma resposta satisfatória ao entorno do ponto de operação ao qual foi linearizado. Além disso, diversas falhas ou descon siderações até mesmo para a obtenção do modelo não linear possibilitam que o modelo matemático não descreva todo o comportamento dinâmico de um determinado sistema proporcionando uma diferença em suas respostas. Objetivando considerar essas situações no projeto de controle robusto de um determinado sistema lança-se mão do uso de incertezas, tais incertezas podem ser caracterizadas como estruturadas (paramétricas) ou não estruturadas (não paramétricas).

3.2 Projeto de controlador robusto com variação paramétrica

Nesse contexto, considerando o conceito de incerteza estruturada, ao qual pode ser descrito por uma determinada variação de parâmetros representativos do modelo matemático que descreve o sistema. Pode-se utilizar diversas ferramentas para o projeto de um controlador que por sua vez considera ditas variações no modelo e garantam a estabilidade e o desempenho do sistema frente a tais incertezas. Levando em consideração as variações de incertezas paramétricas e considerando uma determinada família de incertezas do tipo politópica (*hyperbox*) pode-se utilizar como principal ferramenta o Teorema de Kharitonov, que tem como principal objetivo testar se um determinado polinômio é dito estável frente a uma determinada família de incertezas (BHATTACHARYYA; DATTA; KEEL, 2009).

3.2.1 Teorema de Kharitonov

O Teorema de Kharitonov é considerado como o ponto de partida no desenvolvimento da teoria de controle robusto paramétrico utilizando a abordagem da função de transferência. As incertezas presentes nos parâmetros se representam mediante uma família de incertezas $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in R^n$ independentes, isto é, o valor de cada parâmetro incerto não está relacionado a outro e por sua vez são representado por limites previamente conhecidos como $\delta_i^- \leq \delta_i \leq \delta_i^+, \forall i = 0, 1, \dots, n$. Deste modo, considerando o seguinte polinômio intervalar:

$$p(s, \delta) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n \quad (34)$$

Torna-se uma tarefa hercúlea determinar que os infinitos polinômios descritos por esta família de incertezas sejam todos estáveis. Então, pode-se testar os polinômios de Kharitonov desde que algumas condições sejam satisfeitas, sendo elas:

1. O polinômio intervalar determinado pela família de incertezas não deve ter perda de grau, ou seja, o coeficiente de maior grau deve ser diferente de zero para qualquer variação intervalar;
2. As incertezas relacionadas são do tipo intervalar politópica e cada coeficiente incerto não interfere no outro; ou seja, o valor de cada parâmetro incerto não está relacionado a outro e, por sua vez, é representado por limites anteriormente conhecidos como $[\delta_i^-, \delta_i^+]$ onde, o vetor de coeficiente δ_i varia em uma caixa:

$$\Delta = [\delta_0^-, \delta_0^+] \times [\delta_1^-, \delta_1^+] \times \cdots \times [\delta_n^-, \delta_n^+] \quad (35)$$

Sendo assim pode-se escrever os quatro polinômios de Kharitonov $K_{h1}, K_{h2}, K_{h3}, K_{h4}$, relacionados a cada um dos vértices do retângulo de Kharitonov, conforme apresentado na seguinte relação com o intuito de realizar um teste de estabilidade para o polinômio Kharitonov frente a uma família de incertezas.

$$\begin{aligned} K_{h1}(s) &= \delta_0^- + \delta_1^- s^1 + \delta_2^+ s^2 + \delta_3^+ s^3 + \delta_4^- s^4 + \delta_5^- s^5 \dots \\ K_{h2}(s) &= \delta_0^+ + \delta_1^+ s^1 + \delta_2^- s^2 + \delta_3^- s^3 + \delta_4^+ s^4 + \delta_5^+ s^5 \dots \\ K_{h3}(s) &= \delta_0^+ + \delta_1^- s^1 + \delta_2^- s^2 + \delta_3^+ s^3 + \delta_4^+ s^4 + \delta_5^- s^5 \dots \\ K_{h4}(s) &= \delta_0^- + \delta_1^+ s^1 + \delta_2^+ s^2 + \delta_3^- s^3 + \delta_4^- s^4 + \delta_5^+ s^5 \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Teorema de Kharitonov: Seja $p(s, \delta)$ uma família de polinômios intervalares, a qual mantém a invariância de grau e considera uma incerteza do tipo *hiperbox*. Então $p(s, \delta)$, é dito robustamente estável, se e somente se, todos os polinômios de Kharitonov são ditos Hurwitz-estáveis (todas as raízes de um polinômio localizadas no semiplano esquerdo do plano complexo). As propriedades do Teorema de Kharitonov utilizados com coeficientes reais podem ser estendidas para intervalos com coeficientes complexos, para maiores detalhes e demonstrações vide (BARMISH, 1989), (BARMISH, 1994), (BHATTACHARYYA; DATTA; KEEL, 2009).

3.2.2 Método de projeto do controlador de ordem fixa utilizando alocação de polos intervalar

O controlador de ordem fixa é projetado de acordo com (KEEL; BHATTACHARYYA, 1997a; KEEL; BHATTACHARYYA, 1999), associado a uma formulação de LP, que levará a um conjunto de restrições de desigualdades lineares. Nesta seção projetamos um

controlador padrão para uma região de desempenho desejada intervalar, cujo polinômio característico esteja contido dentro da região de desempenho desejado. Nesse contexto, para um sistema causal do tipo SISO, linear invariante no tempo (LTI) de ordem n , conforme apresentado na Figura 3 com função de transferência genérica $G(s)$ estritamente própria descrita em (37), um compensador $C(s, X)$ de ordem r conforme apresenta (38) e junto com o diagrama de blocos mostrado na Figura 3,

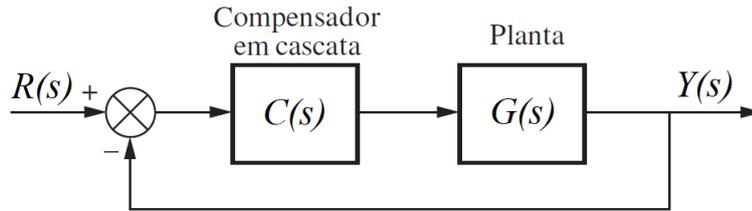


Figura 3 – Diagrama de blocos para um sistema de realimentação unitária do tipo SISO com incerteza aditiva δ_a

Fonte: o autor

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (37)$$

$$C(s, X) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)} = \frac{x_0 s^r + x_1 s^{r-1} + \dots + x_{r-1} s + x_r}{y_0 s^r + y_1 s^{r-1} + \dots + y_{r-1} s + y_r} \quad (38)$$

é possível calcular o polinômio característico de malha fechada do sistema através da solução da equação Diofantina (\mathcal{D}), resumindo assim o problema de localização dos polos em malha fechada, como apresenta a relação (39):

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= d_c(s)d(s) + n_c(s)n(s) \\ &= y_0 a_0 s^{n+r} + (y_0 a_1 + y_1 a_0 + x_0 b_1) s^{n+r-1} + \dots + y_r a_n + x_r b_n \end{aligned} \quad (39)$$

Em seguida, define-se uma região polinomial intervalar desejada $\Phi(s)$, do mesmo grau ($n + r$) que \mathcal{D} levando em consideração a dinâmica almejada para o desenvolvimento do projeto de controle, conforme apresenta a seguinte relação:

$$\Phi(s) = s^m + \phi_1 s^{m-1} + \dots + \phi_{m-1} s + \phi_m \quad (40)$$

Onde ϕ_i representam os coeficientes do polinômio desejado em malha fechada de ordem $m = n + r$. O polinômio $\Phi(s)$, representa uma família polinomial intervalar que contém o conjunto de raízes que estabelecem o desempenho pretendido pelo projetista. Assim, a região polinomial desejada é definida da seguinte forma:

$$\Phi(s) := \{\phi_l^- \leq \phi_i \leq \phi_h^+\}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (41)$$

Onde $[\phi_l^-; \phi_h^+]$ representam os limites inferiores e superiores respectivamente de ϕ_i . Uma vez definido $\Phi(s)$ precisamos conformar o conjunto de desigualdades que possibilitem o ajuste do controlador. Para isso, são igualados os termos da mesma ordem do polinômio desejado $\Phi(s)$ junto com o polinômio característico \mathcal{D} como indica (42)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i(s, X) &= \Phi(s), \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \phi_l^- &\leq \mathcal{D}_i(s, X) \leq \phi_h^+ \end{aligned} \quad (42)$$

chegando assim no seguinte conjunto de desigualdades:

$$\begin{aligned} \phi_{l(n+r)}^- &\leq y_0 a_0 \leq \phi_{h(n+r)}^+ \\ \phi_{l(n+r-1)}^- &\leq y_0 a_1 + y_1 a_0 + x_0 b_1 \leq \phi_{h(n+r-1)}^+ \\ &\vdots \\ \phi_{l(1)}^- &\leq y_r a_n + x_r b_n \leq \phi_{h(1)}^+ \end{aligned} \quad (43)$$

As desigualdades construídas conforme (43) podem ser representadas em formato matricial, deste modo pode-se escrever a matriz de *Sylvester*¹ A_S como apresenta (44):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{l(n+r)}^- \\ \phi_{l(n+r-1)}^- \\ \phi_{l(n+r-2)}^- \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{l(1)}^- \end{bmatrix}}_{\phi_l^-} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 \\ b_{n-1} & b_1 & 0 & 0 & a_{n-1} & a_0 & 0 \\ \vdots & b_{n-1} & b_1 & 0 & \vdots & a_{n-1} & a_0 \\ b_n & \vdots & b_{n-1} & \ddots & a_n & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & b_n & \vdots & \ddots & 0 & a_n & \vdots \\ 0 & 0 & b_n & \vdots & 0 & 0 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_S} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{r-1} \\ x_r \\ y_0 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}}_X \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{h(n+r)}^+ \\ \phi_{h(n+r-1)}^+ \\ \phi_{h(n+r-2)}^+ \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{h(1)}^+ \end{bmatrix}}_{\phi_h^+} \quad (44)$$

Na qual os vetores colunas $[\phi_l^-, \phi_h^+]$, contêm os limites inferiores e superiores da região de desempenho desejada, respectivamente. A matriz A_S é associada aos coeficientes dos parâmetros da planta e o vetor coluna X representa os coeficientes do controlador que satisfaz o sistema de desigualdades lineares apresentado em (44). Em seguida, pode-se reescrever o problema como um problema de otimização empregando ferramentas de LP. De acordo com (KEEL; BHATTACHARYYA, 1997a) uma sugestão para a aplicação da função de custo deste problema, pode ser a escolha do somatório dos ganhos calculados

¹ Na álgebra linear, a matriz Sylvester de dois polinômios fornece informações aritméticas sobre esses polinômios além de definir seu resultado.

do controlador ($f(x) = \sum_i X_i$), de modo a reescrever este problema como um problema de minimização objetivando minimizar os ganhos do controlador, conforme expressa a seguinte relação

$$\begin{aligned} \min_{A_S, \phi_i, x_i, y_i} \quad & \sum_{i=0}^r x_i + \sum_{i=0}^r y_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} A_S(q) \\ -A_S(q) \end{bmatrix} X \leq \begin{bmatrix} \phi_h^+ \\ -\phi_l^- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

Conseqüentemente podemos afirmar que a solução para este problema de otimização linear irá conter as raízes do polinômio característico \mathcal{D}_i dentro da região polinomial desejada $\Phi(s)$ previamente definida pelo projetista, isto é:

$$\mathcal{R}(\mathcal{D}_i(s)) \subset \mathcal{R}(\Phi(s)) \quad (46)$$

onde, $\mathcal{R}(\mathcal{D}_i(s))$ é o conjunto de raízes do polinômio característico, e $\mathcal{R}(\Phi(s))$ é o espaço das raízes do polinômio desejado $\Phi(s)$. A condição expressa em (46) é muito importante na hora de projetar a metodologia de controle e obter os coeficientes do controlador que satisfazem as desigualdades em (44), por isso, mais adiante no Capítulo 4 demonstraremos essa propriedade.

3.2.3 Método de projeto de controlador de ordem fixa via alocação de polos intervalar para uma família de sistemas

Em vista do que foi abordado na subseção 3.2.2, nesta seção vamos adicionar os passos para obter um projeto de controlador de ordem fixa com alocação de polos intervalar mais agora estendido para uma família de sistemas. Por tanto, assumindo uma estrutura de incertezas paramétricas para a planta (δ), mostra-se que a abordagem robusta também admite uma formulação de LP com suas vantagens inerentes, como é o caso de produzir todo o conjunto de coeficientes dos controladores atingindo as especificações de desempenho de forma robusta, através de um conjunto convexo de desigualdades.

Com o intuito de projetar um controlador robusto considera-se que o diagrama de blocos apresentado na Figura 3 possa ser representado em malha fechada para uma família de sistemas $G(s, \delta)$ levando em consideração as incertezas paramétricas incidentes na planta δ como mostra a Figura 4. Ao mesmo tempo a função de transferência (37) pode ser representada através de uma função de transferência intervalar onde seus coeficientes tanto do numerador quanto do denominador possam apresentar limites inferiores e superiores $[n_i^-, n_i^+]$, $[d_i^-, d_i^+]$ decorrentes da variação de qualquer um de seus parâmetros, conforme apresenta a relação (47).

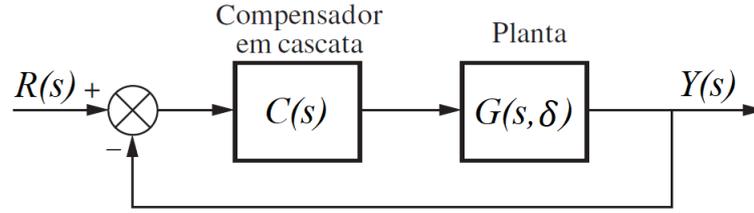


Figura 4 – Diagrama de blocos para um sistema de realimentação unitária do tipo SISO com incertezas paramétricas δ

Fonte: o autor

$$G(s, \delta) = \frac{n_i(s)}{d_j(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n};$$

$$\left\{ b_i^- \leq b_i \leq b_i^+, a_j^- \leq a_j \leq a_j^+, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 0, 1, 2, \dots, n \right\} \quad (47)$$

A continuação podemos definir δ como o vetor de parâmetros incertos relacionados a planta conforme foi apresentado na subseção 3.2.1. Considerando que o controlador $C(s)$ possui a mesma estrutura conforme apresentado em (38), o vetor de parâmetros reais X , representa os coeficientes do controlador definido.

$$\delta := [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1} \ b_n \ a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1} \ a_n]$$

$$X := [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{r-1} \ x_r \ y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{r-1} \ y_r] \quad (48)$$

O polinômio característico da nova família de sistemas $G(s, \delta)$ pode ser calculado também por meio da equação Diofantina (39). Dita equação, agora terá um formato intervalar como consequência de ser calculada com base em uma família de sistemas $G(s, \delta)$. Devido a essa diferença, identificaremos o novo cálculo da equação Diofantina como $\Delta\mathcal{D}_i$, fazendo uma clara referência ao polinômio característico intervalar de $G(s, \delta)$. Portanto, os parâmetros de $\Delta\mathcal{D}_i$ são representados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{D}_i(s, \delta, X) &= d_c(s)d_j(s) + n_c(s)n_i(s) \\ &= y_0[a_0^-, a_0^+]s^{n+r} + (y_0[a_1^-, a_1^+] + y_1[a_0^-, a_0^+] + x_0[b_1^-, b_1^+])s^{n+r-1} + \dots \\ &= \dots + y_r[a_n^-, a_n^+] + x_r[b_n^-, b_n^+] \end{aligned} \quad (49)$$

Em seguida, define-se uma região polinomial intervalar desejada $\Phi(s)$ como em (40), do mesmo grau $(n+r)$ que $\Delta\mathcal{D}_i(s, \delta)$. Imediatamente se igualam os termos da mesma ordem entre $\Phi(s)$ e $\Delta\mathcal{D}_i(s, \delta)$. Como os parâmetros da planta agora são incertos do tipo δ , o número de desigualdades será maior em relação ao apresentado em (43). Consequentemente as relações obtidas nas seguintes desigualdades são decorrentes da combinação

linear de todos os limites inferiores $[n_i^-, d_i^-]$ e dos limites superiores $[n_i^+, d_i^+]$ dos vértices de $G(s, \delta)$, junto com os coeficientes do controlador $[x_r, y_r]$:

$$\begin{aligned}
\phi_{l(n+r)}^- &\leq y_0 a_0^- \leq \phi_{h(n+r)}^+ \\
\phi_{l(n+r)}^- &\leq y_0 a_0^+ \leq \phi_{h(n+r)}^+ \\
&\vdots \\
\phi_{l(n+r-1)}^- &\leq y_0 a_1^- + y_1 a_0^- + x_0 b_1^- \leq \phi_{h(n+r-1)}^+ \\
\phi_{l(n+r-1)}^- &\leq y_0 a_1^+ + y_1 a_0^- + x_0 b_1^- \leq \phi_{h(n+r-1)}^+ \\
\phi_{l(n+r-1)}^- &\leq y_0 a_1^- + y_1 a_0^+ + x_0 b_1^- \leq \phi_{h(n+r-1)}^+ \\
\phi_{l(n+r-1)}^- &\leq y_0 a_1^+ + y_1 a_0^+ + x_0 b_1^- \leq \phi_{h(n+r-1)}^+ \\
\phi_{l(n+r-1)}^- &\leq y_0 a_1^- + y_1 a_0^- + x_0 b_1^+ \leq \phi_{h(n+r-1)}^+ \\
\phi_{l(n+r-1)}^- &\leq y_0 a_1^+ + y_1 a_0^- + x_0 b_1^+ \leq \phi_{h(n+r-1)}^+ \\
\phi_{l(n+r-1)}^- &\leq y_0 a_1^- + y_1 a_0^+ + x_0 b_1^+ \leq \phi_{h(n+r-1)}^+ \\
\phi_{l(n+r-1)}^- &\leq y_0 a_1^+ + y_1 a_0^+ + x_0 b_1^+ \leq \phi_{h(n+r-1)}^+ \\
&\vdots \\
\phi_{l(1)}^- &\leq y_r a_n^- + x_r b_n^- \leq \phi_{h(1)}^+ \\
\phi_{l(1)}^- &\leq y_r a_n^+ + x_r b_n^- \leq \phi_{h(1)}^+ \\
\phi_{l(1)}^- &\leq y_r a_n^- + x_r b_n^+ \leq \phi_{h(1)}^+ \\
\phi_{l(1)}^- &\leq y_r a_n^+ + x_r b_n^+ \leq \phi_{h(1)}^+
\end{aligned} \tag{50}$$

O número de desigualdades é geralmente muito menor do que o listado acima em (50) pois haverá muitas desigualdades redundantes. No entanto o número máximo de desigualdades será o mesmo que o número de vértices, dependendo da ordem de realização de $G(s, \delta)$ e de $C(s)$. Por fim, torna-se necessário que o espaço das raízes do polinômio característico intervalar encontre-se contido dentro da região de desempenho intervalar desejada como indicado na seguinte condição.

$$\mathcal{R}(\Delta \mathcal{D}_i(s, \delta)) \subseteq \mathcal{R}(\Phi(s)) \tag{51}$$

Vários exemplos nos quais é implementada a LP para sistemas lineares do tipo SISO sujeitos a incertezas paramétricas são discutidos em (BHATTACHARYYA; DATTA; KEEL, 2009).

3.3 Norma H_2 e controle misto H_2/H_∞ via LMIs

Nesta seção será apresentada a metodologia para o desenvolvimento do projeto de controle pelas normas H_2 e o controle misto que relaciona as normas H_2 e H_∞ ambos através da realimentação de estados via LMIs. Diversos conceitos empregados serão brevemente apresentados com o intuito de formalizar as bases da metodologia proposta. Para um melhor entendimento dos conceitos relacionados as LMIs recomenda-se o apoio das seguintes literaturas (BOYD et al., 1994; PALHARES; TAKAHASHI; PERES, 1997; AGUIRRE, 2007).

3.3.1 Controle H_2 por realimentação de estados via LMIs

De forma geral, o problema de controle H_2 consiste em obter um controlador $K(s)$ de dimensão finita linear e invariante no tempo LTI que estabilize o sistema dinâmico $P(s)$ e minimize a norma H_2 da matriz de transferência em malha fechada T_{z_2w} em presença da entrada exógena w para a saída controlada z_2 conforme é ilustrado na Figura 5 e abordada na equação (52).

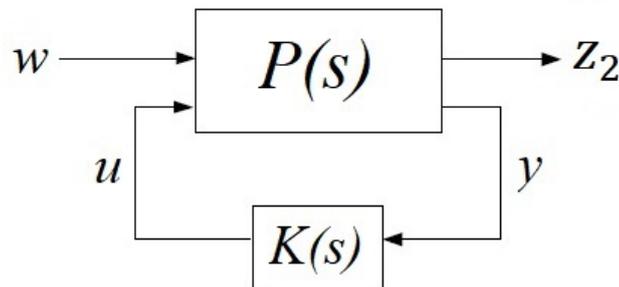


Figura 5 – Planta generalizada com um canal de saída para o controle pela norma H_2

Fonte: o autor

$$T_{z_2w} = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & 0 \end{array} \right] \quad (52)$$

A norma H_2 é definida no domínio da frequência para funções de variáveis complexas e analíticas no semiplano direito, ou seja, um caso particular o qual as funções de transferências são estáveis. Apesar de a definição da norma H_2 detém importantes interpretações, seu equivalente para norma de sistemas, pode ser utilizado para obter extensões importantes aplicadas aos conceitos de LMIs. Deste modo, a norma H_2 de $T_{z_2w}(s)$ pode ser calculada da seguinte forma (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1995):

$$\|T_{z_2w}\|_2 = \sqrt{\text{trace}(B_f^T L_o B_f)} = \sqrt{\text{trace}(C_f^T L_c C_f)} \quad (53)$$

onde, $L_o \geq 0$ e $L_c \geq 0$ são os gramianos de observabilidade e controlabilidade, respectivamente e satisfazem as seguintes condições para o caso contínuo.

$$\begin{aligned} A_f L_c + L_c A_f^T + B_f B_f^T &= 0 \\ A_f^T L_o + L_o A_f + C_f^T C_f &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

O cálculo da norma H_2 pode facilmente estender-se para os casos de tempo discreto, no entanto neste trabalho só abordaremos para o caso contínuo. Pode se observar que as formulações em (54) satisfazem o teorema de Lyapunov o qual garante que o sistema contínuo definido em (52) seja assintoticamente estável, se e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva ($P = P^T > 0$) satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$A^T P + P A < 0 \quad (55)$$

A teoria de Lyapunov quando associada a algumas ferramentas de LMIs tornam-se a base para a teoria de controle robusto, devido ao fato de poder garantir a estabilidade de um sistema dinâmico sujeito a incertezas. Considerando que o sistema em malha fechada $T_{z2w}(s)$ na Figura 5 seja de tempo contínuo e tenha a seguinte realização:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= C_y x(t) = I x(t) \end{aligned} \quad (56)$$

Podemos implementar uma lei de controle por realimentação de estados $u(t) = K_2 x(t)$. Onde os sinais envolvidos sejam de dimensão apropriada como: $x \in R^n, u \in R^m, w \in R^p, z \in R^q$ e $y \in R^r$. Portanto, as matrizes têm as dimensões apropriadas $A \in R^{(n \times n)}, B_u \in R^{(n \times m)}, B_w \in R^{(n \times p)}, C_z \in R^{(q \times n)}$ e $D_{zu} \in R^{(q \times m)}$. O sistema apresentado na Figura 5 de $w \rightarrow z$ é descrito pelas equações em espaços de estados (56) e na sua forma análoga por meio de (57) uma vez aplicada a lei de controle $u(t) = K_2 x(t)$.

$$T_{z2w} = \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K_2 & B_w \\ \hline C_z + D_{zu} K_2 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & 0 \end{array} \right] \quad (57)$$

Na Equação (57) é possível observar que a matriz de transferência em malha fechada $A_f = A + B_u K_2$ é obtida após aplicar a lei de controle $u(t) = K_2 x(t)$, o mesmo raciocínio aplica-se para C_f . Deste modo, pode-se reescrever o problema previamente apresentado como um problema de otimização linear, o qual tem como objetivo obter um ganho K_2 ótimo que minimize a norma H_2 do sistema em malha fechada $T_{z2w}(s)$, sendo escrito como um problema de otimização convexa com restrições do tipo LMIs (PALHARES; TAKAHASHI; PERES, 1997), conforme apresenta o seguinte problema de otimização:

$$\begin{cases} \min_{X_o > 0} & \text{trace}(B_w^T X_o B_w) = \|T_{z2w}\|_2^2 \\ \text{s.t.} & A_f^T L_o + L_o A_f + C_f^T C_f \leq 0 \end{cases} \quad (58)$$

O problema de otimização convexa escrito em (60) também pode ser escrito em função do gramiano de observabilidade, de modo que X_o mantenha uma estreita relação com L_o conforme (59). O mesmo procedimento pode ser estendido para o gramiano de controlabilidade.

$$\begin{aligned} A_f^T X_o + X_o A_f &\leq -C_f^T C_f = A_f^T L_o + L_o A_f \\ A_f^T (X_o - L_o) + (X_o - L_o) A_f &\leq 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Em vista do teorema de Lyapunov se A_f é estável então $X_o - L_o > 0$ ou $X_o > L_o$, de modo que o problema apresentado em (60) é convexo pode-se concluir que $X_o \rightarrow L_o$ fornece exatamente o mínimo valor da norma H_2 conforme definido na seguinte formulação:

$$\min_{X_o > 0} \text{trace}(B_w^T X_o B_w) = \text{trace}(B_w^T L_o B_w) = \|T_{z2w}\|_2^2 \quad (60)$$

Para calcular o ganho ótimo $K_2(s)$, que por sua vez minimiza a norma H_2 de um determinado sistema em malha fechada deve-se reformular a problemática fazendo uso de algumas manipulações matemáticas, como considerar a equivalência dada EM (57) para A_f e C_f e substituí-la na relação (60) podendo ser reescrita como segue.

$$\underbrace{(A + B_u K_2)^T X_o + X_o (A + B_u K_2)}_{M_1} + \underbrace{(C_z + D_{zu} K_2)^T}_{M_2} \underbrace{(C_z + D_{zu} K_2)}_{M_2^T} \leq 0 \quad (61)$$

Devido a não linearidade presente na desigualdade (61) em função das variáveis matriciais X_o e K_2 pode-se fazer uso do complemento de **Schur** o qual possibilita converter uma desigualdade convexa não-linear em uma LMIs ou vice-versa. Aplicando-se o complemento de Schur ao problema em (61) obtém-se a seguinte relação (JBILOU; MESSAOUDI; TABAË, 2004).

$$\begin{bmatrix} (A + B_u K_2)^T X_o + X_o (A + B_u K_2) & (C_z + D_{zu} K_2)^T \\ (C_z + D_{zu} K_2) & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (62)$$

Multiplicando ambos lados de (62) pela matriz $\text{diag}[X_o^{-1}; I]$ e reorganizando a desigualdade obtém-se uma nova desigualdade como apresentado em (63) como resultado pode-se obter a seguinte relação.

$$\begin{bmatrix} X_o^{-1} (A + B_u K_2)^T + (A + B_u K_2) X_o^{-1} & X_o^{-1} (C_z + D_{zu} K_2)^T \\ (C_z + D_{zu} K_2) X_o^{-1} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (63)$$

Vale ressaltar que na desigualdade (63) se faz necessário introduzir uma mudança de variáveis linearizantes devido ao fato de dita formulação ainda ser não-linear e o complemento de Schur não ser mais útil, para isso é preciso contornar o produto cartesiano das

variáveis K_2 e X_o^{-1} . Segundo os autores em (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989) podemos definir as mudanças de variáveis linearizantes, como segue:

$$\begin{aligned} X &\triangleq X_o^{-1} \\ Z &\triangleq K_2 X_o^{-1} = K_2 X \end{aligned} \quad (64)$$

aplicando tais modificações na desigualdade anterior obtém-se a seguinte LMIs

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & XC_z^T + Z^T D_{zu}^T \\ C_z X + D_{zu} Z & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (65)$$

Nota-se que a mudança de variáveis definidas em (64) introduzem não linearidade na função objetivo inicial apresentando a seguinte relação:

$$\text{trace}(B_w^T X_o B_w) = \text{trace}(B_w^T X_o^{-1} B_w) \quad (66)$$

Portanto, torna-se necessário alterar a função objetivo da relação acima com o intuito de obter um equivalente linear. Usando as propriedades do operador traço define-se uma variável matricial adicional $J = J^T \in R^{(p \times p)}$, definindo a função objetivo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{trace}(J) &= \text{trace}(B_w^T X_o^{-1} B_w) \\ J - B_w^T X_o^{-1} B_w &\geq 0 \end{aligned} \quad (67)$$

Em seguida empregamos a ferramenta do complemento de Schur em (67) para obter a seguinte desigualdade:

$$\begin{bmatrix} J & B_w^T \\ B_w & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (68)$$

Por fim, o problema de controle ótimo H_2 pode ser reescrito, como um problema de otimização semidefinido da seguinte forma.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{J=J^T, X=X^T, Z} \text{trace}(J) \\ \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} J & B_w^T \\ B_w & X \end{bmatrix} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & XC_z^T + Z^T D_{zu}^T \\ C_z X + D_{zu} Z & -I \end{bmatrix} \leq 0 \end{array} \right. \quad (69)$$

onde o ganho K_2 que satisfaz a desigualdade (69), é obtido diretamente da mudança de variáveis linearizantes (vide (64)) em função apenas das variáveis matriciais, ou seja, utiliza-se a seguinte relação.

$$K_2 = ZX^{-1} \quad (70)$$

Considerando que o problema de otimização é convexo o resultado da norma H_2 é definido de tal maneira que:

$$\|T_{z2w}\|_2 = \sqrt{\text{trace}(J)} \quad (71)$$

As formulações LMIs definidas em (69) facilitam a extensão de todos os resultados apresentados anteriormente para famílias de sistemas. Em termos de notação uma vez concebida a formulação da norma H_2 e objetivando adequá-la para um sistema com incertezas paramétricas torna-se necessário introduzir o subíndice (i), o qual represente todos os vértices do politopo decorrente das incertezas paramétricas, deste modo pode-se reescrever o problema de otimização como segue.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{J=J^T, X=X^T, Z} \text{trace}(J) \\ \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} J & B_{w_i}^T \\ B_{w_i} & X \end{bmatrix} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} A_i X + X A_i^T + B_{u_i} Z + Z^T B_{u_i}^T & X C_{z_i}^T + Z^T D_{z u_i}^T \\ C_{z_i} X + D_{z u_i} Z & -I \end{bmatrix} \leq 0 \end{array} \right. \quad (72)$$

onde $i = 1, \dots, N$ no qual $N = 2^n$, e n representa o número de parâmetros incertos, $A_i, B_{u_i}, B_{w_i}, C_{z_i}$ e $D_{z u_i}$ são matrizes constantes para cada vértice do politopo. As matrizes C_{z_i} e $D_{z u_i}$ poderiam ficar redundantes ou não, dependendo das condições de cada vértice do politopo. No caso de ficar redundantes bastaria que tivesse relacionado uma única vez na desigualdade (72). Para calcular a norma H_2 para uma família de sistemas, considerando a realimentação positiva dos estados dado pela lei de controle $u = K_2 x(t)$, emprega-se as LMIs definidas em (72) para maiores detalhes vide (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989).

3.3.2 Controle misto que relaciona as normas H_2 e H_∞ por realimentação de estados via LMIs

A principal vantagem do controle misto o qual relaciona as normas H_2 e H_∞ consiste em levar em consideração duas importantes características de qualquer projeto de controle, sendo elas otimizar o desempenho do sistema e garantir robustez. O projeto misto atende simultaneamente estas duas questões através das normas H_2 e H_∞ (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997). A Figura 6 ilustra a configuração utilizada neste trabalho da planta generalizada com múltiplos canais para o cálculo das normas. Os múltiplos sinais de entrada podem representar todas as entradas exógenas que incluem distúrbios, ruídos de sensor, e os múltiplos sinais de saída podem representar sinais a serem controlados com diferentes características (AGUIRRE, 2007).

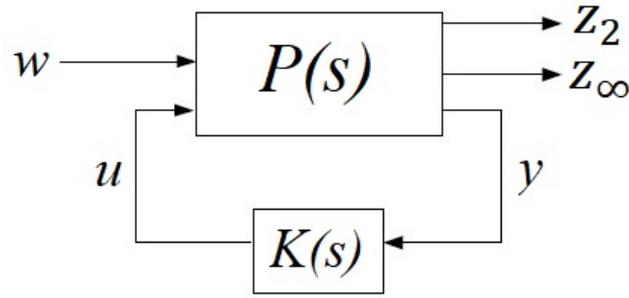


Figura 6 – Planta generalizada com múltiplos canais de saída para o controlador misto H_2/H_∞

Fonte: o autor

A Figura 6 mostra o controle misto onde se minimiza a norma H_2 do canal w para a saída z_2 e garante-se um nível de atenuação de distúrbios H_∞ do canal w para a saída z_∞ . Neste trabalho será empregado este esquema com o objetivo de controlar duas saídas que manifestem características particulares de cada uma das normas. Considerando o esquema apresentado na Figura 6 pode se escrever o seguinte modelo em espaços de estados definido pela seguinte relação.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\
 z_2(t) &= C_{z_2} x(t) + D_{z_u} u(t) \\
 z_\infty(t) &= C_{z_\infty} x(t) + D_{z_u} u(t) \\
 y(t) &= Ix(t)
 \end{aligned} \tag{73}$$

Sendo as dimensões dos sinais envolvidos de dimensões apropriadas e equivalentes aos do sistema apresentado na formulação de espaços de estados (56) e considerando o sistema em malha fechada, torna-se possível obter a função de transferência do sistema realimentado por meio do ganho ótimo K_{misto} , como apresentam as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 T_{z_2 w} &= \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K_{misto} & B_w \\ \hline C_{z_2} + D_{z_u} K_{misto} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_w \\ \hline C_{f_2} & 0 \end{array} \right] \\
 T_{z_\infty w} &= \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K_{misto} & B_w \\ \hline C_{z_\infty} + D_{z_u} K_{misto} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_w \\ \hline C_{f_\infty} & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{74}$$

O controle misto é também formulado de modo que possibilita minimizar a norma H_2 afim de obter um ganho ótimo K_{misto} que satisfaça o seguinte problema de otimização definido por

$$K^* = \arg \min_{K_{misto}} \left[\begin{array}{l} \|T_{z_2 w}\|_2 \\ \|T_{z_\infty w}\|_2 \end{array} \right] \tag{75}$$

O problema de otimização definido acima pode ser reescrito como um problema ϵ -restrito, isto é, obter um ganho K_{misto} que minimize a norma H_2 no canal $w \rightarrow z_2$ da Figura 6, enquanto se garante um determinado nível de atenuação ao distúrbio H_∞ no outro canal de saída $w \rightarrow z_\infty$. Levando em consideração essa situação, podemos apresentar o conjunto solução ótimo para o problema (75) reescrevendo tal problema conforme apresenta a seguinte relação

$$\begin{cases} \min_{K_{misto}} & \|T_{z_2 w}\|_2 \\ \text{s.t.} & \|z_\infty\|_2 < \gamma \|w\|_2 \end{cases} \quad (76)$$

Neste trabalho será utilizado o problema de otimização apresentado em (76), de modo que o controlador K_{misto} garante ao sistema em malha fechada um desempenho ótimo para um dado γ frente a distúrbios externos no canal $w \rightarrow z_2$ ao mesmo tempo que a robustez é garantida para todos os modelos incertos da forma $z_\infty = \Delta w$. Em seguida, podemos realizar algumas manipulações algébricas conforme apresentado na subseção 3.3.1 de modo que o problema (76) pode ser reescrito considerando $\gamma > 0$, conforme apresenta a seguinte relação.

$$\begin{cases} \min_{J=J^T, X=X^T, Z} & \text{trace}(J) \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} J & C_{z_2}X + D_{z_2 u_2}Z \\ XC_{z_2}^T + Z^T D_{z_2 u_2}^T & X \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_w & XC_{z_\infty}^T + Z^T D_{z_\infty u_\infty}^T \\ B_w^T & -I & 0 \\ C_{z_\infty}X + D_{z_\infty u_\infty}Z & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (77)$$

onde o ganho K_{misto} é calculado da seguinte maneira:

$$K_{misto} = ZX^{-1} \quad (78)$$

As normas H_2 e H_∞ do sistema em malha fechada são definidas como:

$$\|T_{z_2 w}\|_2 = \sqrt{\text{trace}(J)} \quad \text{e} \quad \|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma \quad (79)$$

Da mesma forma que estendemos a formulação LMIs para uma família de sistemas através do subíndice i no final da subseção 3.3.1. Podemos repetir os mesmos passos para estender o problema de otimização de controle misto H_2/H_∞ para uma família de sistemas, podendo ser reescrito por meio da seguinte relação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{J=J^T, X=X^T, Z} \text{trace}(J) \\ \text{s.t.} \end{array} \right. \left[\begin{array}{cc} J & C_{z_2}X + D_{zu_2}Z \\ XC_{z_2}^T + Z^T D_{zu_2}^T & X \end{array} \right] > 0 \quad (80)$$

$$\left[\begin{array}{ccc} A_i X + X A_i^T + B_{u_i} Z + Z^T B_{u_i}^T & B_{w_i} & X C_{z_\infty}^T + Z^T D_{zu_\infty}^T \\ B_{w_i}^T & -I & 0 \\ C_{z_\infty} X + D_{zu_\infty} Z & 0 & \gamma^2 I \end{array} \right] < 0$$

3.3.2.1 Controle misto H_2/H_∞ com restrições adicionais

Restrições adicionais sobre os sinais de entrada e saída podem também ser consideradas no contexto das LMIs. Neste trabalho foi considerado para o problema apresentado em (80) uma restrição adicional sobre a evolução no tempo da entrada de controle $u(t)$, quando as condições iniciais $x(0)$ são conhecidas da forma $\|u(t)\| \leq \mu$. Particularmente definimos a restrição sobre o sinal de entrada para $\mu = 7.5$. Se as LMIs apresentadas em (81) são factíveis e existe um $X > 0$ o qual satisfaz também a condição de estabilidade para sistemas de tempo contínuo a restrição adicional (81) pode ser agregada ao conjunto desigualdades formulado em (80) como uma restrição do sinal de controle.

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{array} \right] \geq 0, \quad \left[\begin{array}{cc} X & Z^T \\ Z & \mu^2 I \end{array} \right] \geq 0 \quad (81)$$

3.4 Metodologia de projeto de controlador em cascata que relaciona a variação paramétrica intervalar junto com as LMIs

Nesta seção discutiremos os fundamentos da construção da metodologia de controle sendo proposta. Basicamente apresentamos um método para projetar um controlador robusto de ordem fixa que fornece estabilidade e desempenho robustos para uma família de modelos incertos predeterminados com parâmetros limitados em uma região do tipo *hyperbox*. Neste trabalho consideraremos apenas as incertezas relacionadas à massa do IPS (consulte a Tabela 1) porque variações na massa do sistema causam instabilidade. Além disso, apenas a primeira linha da matriz C em (30) será regulada pelo controlador robusto sendo proposto. Nesse contexto, inicialmente utilizaremos a estrutura de controlador em cascata (ASTROM; HAGGLUND, 1995) apresentada no formato específico da Figura 7. Seguidamente, serão concebidos duas malhas de controle, podendo ser identificadas facilmente através da Figura 7 como malha de controle interna e malha de controle

externa. Deste modo, o primeiro controlador projetado na malha interna utiliza a estratégia de controle de realimentação de estados empregando as LMIs conforme discutido na seção 3.3. Para tal, serão desenvolvidos dois controladores de malha interna, sendo um controlador pela norma H_2 e um outro controlador misto que relaciona as normas H_2 e H_∞ . As duas estratégias de controle projetadas na malha interna como mostrado pela Figura 7, tem como objetivo garantir a estabilidade robusta do sistema assim como um desempenho robusto desejado frente incertezas paramétricas e uma entrada exógena $w(t)$.

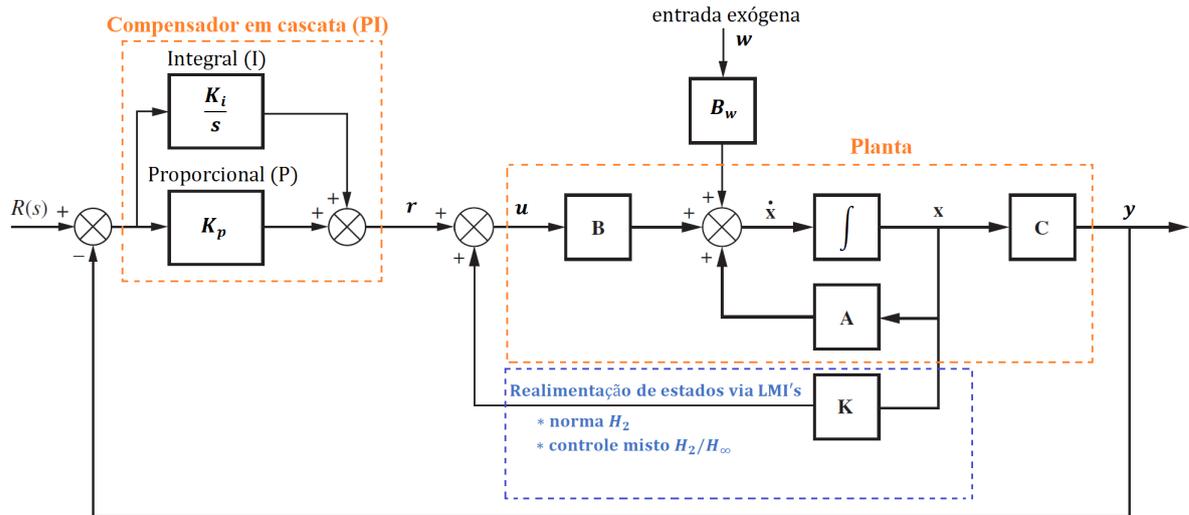


Figura 7 – Diagrama de blocos em cascata para a metodologia de controle proposta.

Fonte: o autor

Em sequência, de posse dos ganhos dos controladores projetados na malha interna deverá ser realizado o projeto de controlador de malha externa. O controlador de malha externa tem estrutura de controlador PI e esta fundamentado na Teoria de Controle Robusto Paramétrico (TCRP) (veja subseção 3.2.3), especificamente no Teorema de Kharitonov como apresentado na subseção 3.2.1. O principal objetivo da escolha do compensador PI é garantir erro nulo em regime permanente (para plantas do tipo -0 , ou seja, que não possuem integrador no caminho direto), manter a estabilidade robusta do sistema frente uma família de incertezas, bem como melhorar a rejeição ao distúrbio do tipo degrau.

Portanto, neste trabalho desenvolveu-se uma metodologia de projeto de controlador com estrutura de controle em cascata que tem por finalidade utilizar as principais propriedades das LMIs junto com a TCRP. Para isso, utilizar-se-á como acrônimos das metodologias propostas $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$, fazendo clara referência ao controlador projetado na malha interna pela norma H_2 e ao controlador misto H_2/H_∞ , respectivamente. Ambos controladores possuem uma malha externa projetada por meio de um compensador do tipo PI, o qual esta fundamentado de acordo com o polinômio característico de sua malha interna. Por fim, a Figura 7 apresenta maiores detalhes assim como um esquemático simplificado da utilização da metodologia proposta.

A continuação apresentamos o diagrama de fluxo na Figura 8 referente ao processo de desenho da metodologia proposta. O fluxograma apresentado na Figura 8 descreve os passos de forma genérica para aplicação da metodologia proposta. O passo 1 descreve a escolha do sistema a ser controlado. Neste trabalho como estudo do caso investigaremos o IPS o qual será tratado como um sistema do tipo SISO e as condições de operação são definidas na Tabela 1. No passo 2 inicia a etapa de definição dos parâmetros incertos δ e sua região de incertezas. Para o IPS selecionamos a massa do sistema como parâmetro incerto, especificamente optamos pelos parâmetros M_c e M_p , porque a mudança de massa produz instabilidade ao sistema. A continuação no passo 3, iniciamos o projeto do controlador de malha interna via realimentação de estados baseado em LMIs. Especificamente definimos o problema de otimização escolhendo a norma H_2 de acordo com a subseção 3.3.1 e o controle misto H_2/H_∞ , conforme apresentado na subseção 3.3.2. O principal objetivo neste passo é garantir estabilidade robusta na malha interna frente variações paramétricas. Seguidamente, no passo 4 após o cálculo dos ganhos de realimentação de estados K_2 e K_{misto} , é verificado se o mesmo atendeu as condições de desempenho previamente especificadas e alcançou estabilidade robusta. Caso o resultado não atenda as especificações de desempenho, deve-se retornar ao passo 2 e relaxar as condições de projeto e o desempenho desejado. Uma vez projetadas as malhas de controle internas e atingido a estabilidade robusta no passo 4 serão projetadas as funções de transferências intervalares (FTI) de malha fechada no passo 5. Basicamente teremos uma FTI para o ganho K_2 projetado mediante a norma H_2 identificada em (57) e outra FTI para o ganho K_{misto} projetado através do controlador misto H_2/H_∞ apresentada em (74).

A próxima etapa da metodologia de controle, consiste em projetar o controlador de malha externa com estrutura PI para cada um dos controladores de malha interna previamente projetados. Nesse contexto, o passo 6 descreve os parâmetros do controlador elegido, ratificando a escolha da estrutura de controlador PI por meio de (82).

$$C(s, X) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)} = \frac{k_p s + k_i}{s} \quad (82)$$

O propósito fundamental neste passo é agregar erro nulo em regime permanente assim como manter a estabilidade robusta frente incertezas paramétricas alcançada pela malha interna.

A continuação no passo 7 calculamos o polinômio característico intervalar do sistema (\mathcal{D}). Para isso precisamos das FTI encontradas no passo 5 e da estrutura do controlador elegido no passo 6, quedando representado \mathcal{D} de forma genérica da seguinte maneira:

$$\mathcal{D} = s^5 + \alpha_3 s^4 + (\alpha_2 + \beta_2 k_p) s^3 + (\alpha_1 + \beta_1 k_p + \beta_2 k_i) s^2 + (\alpha_0 + \beta_0 k_p + \beta_1 k_i) s + \beta_0 k_i \quad (83)$$

No passo 8, projetamos a região polinomial intervalar desejada $\Phi(s)$ de ordem m conforme apontado em (40). Para projetar os vértices de $\Phi(s)$ foi escolhido um tempo

máximo de assentamento inferior a 6,0 segundos e um fator de amortecimento superior a 0,15. Posteriormente, igualamos os coeficientes da mesma ordem de $\Phi(s)$ e \mathcal{D} constituindo assim o conjunto de desigualdades estabelecido em (50). Em sequência, no passo 9 e de posse de (50) é reescrito o problema de otimização através de uma formulação de LP baseado no Teorema de Kharitonov, tendo como função de custo a minimização da soma dos ganhos do controlador. O problema de otimização agora é reescrito em termos da matriz de Sylvester (A_S) conforme discutido na seção seção 3.2. O alvo essencial da formulação de A_S é encontrar uma solução factível que determine os elementos que conformam o vetor X .

Por fim, no passo 10 é realizado o teste de factibilidade. Nesse teste verificamos se a condição definida em (51) foi cumprida. Dita condição determina formalmente que dentre do espaço das raízes do polinômio intervalar desejado $\Phi(s)$ deve estar contido o espaço das raízes do polinômio característico intervalar \mathcal{D} . A condição definida em (51) é de vital importância para o sucesso da metodologia proposta e para a obtenção da região de factibilidade. Caso contrário, caso não fosse encontrada uma solução viável, voltava-se para o passo 2 e diminuía a variação dos parâmetros incertos contemplados ou podemos relaxar as condições de projeto desejadas com a expansão dos coeficientes do polinômio desejado $\Phi(s)$ visando cumprir a condição definida no passo 10. Seguidamente no passo 11, uma vez atingida a condição (51) é possível encontrar uma solução factível para determinar os elementos do vetor X e realizar o ajuste da estrutura de controle de malha externa definida no passo 6, finalizando dessa maneira a metodologia de controle proposta.

3.5 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foram propostas duas metodologias de controle robusto em cascata $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$, para o projeto de controle robusto paramétrico, objetivando garantir a estabilidade robusta, erro nulo em regime permanente e o desempenho desejado do sistema. Além disso, foram discutidos os conceitos fundamentais das LMIs e da TCRP. Também abordou-se os fundamentos da programação linear LP quando aplica-se nos sistemas de controle. Por fim, no próximo capítulo serão desenvolvidos os conceitos abordados no capítulo 3 em um IPS, além de propiciar os materiais e métodos deste trabalho de mestrado com o intuito de esclarecer o maior número de detalhes no processo de construção da metodologia de controle robusto paramétrico investigada.

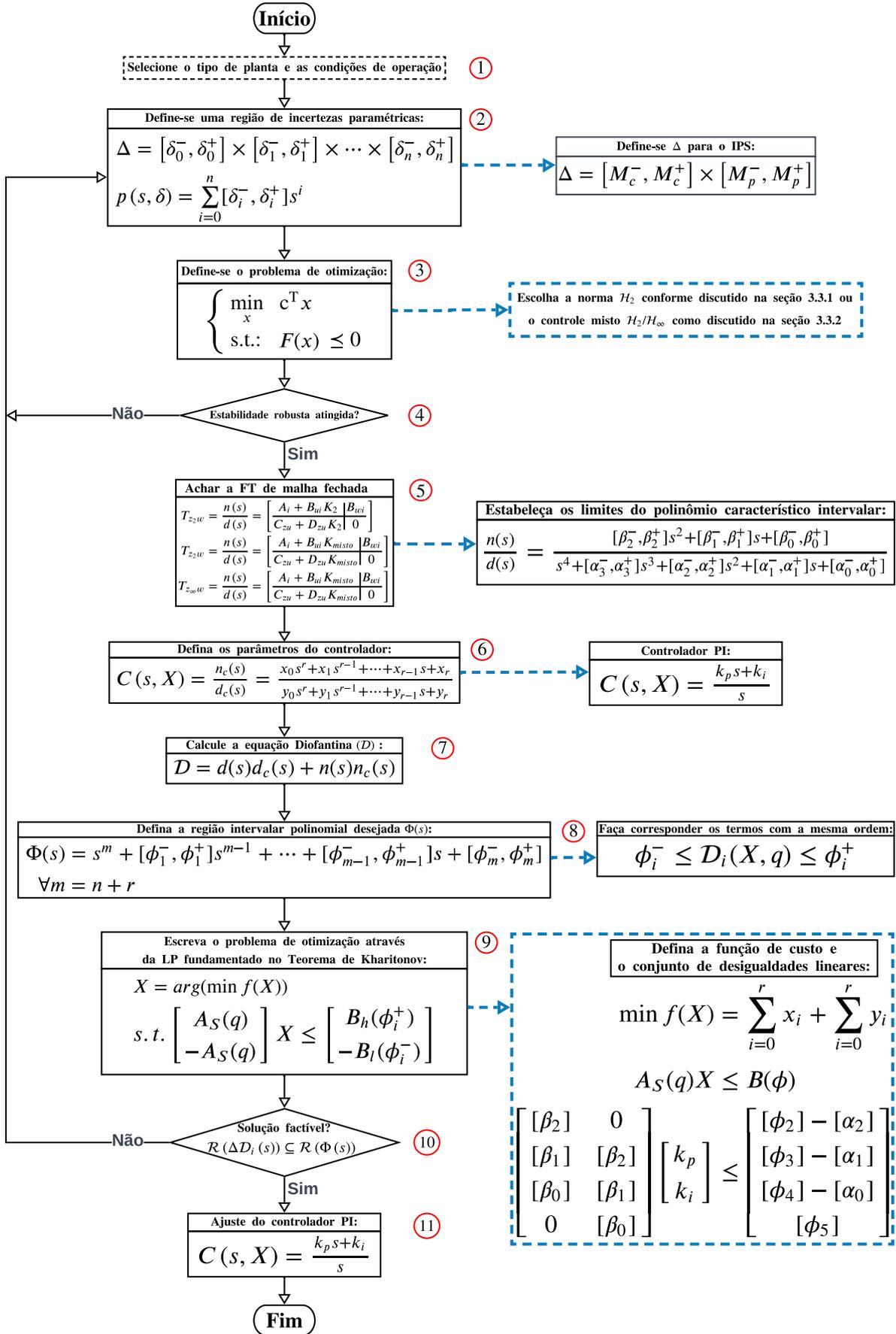


Figura 8 – Fluxograma do projeto de controlador robusto paramétrico proposto $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$.

Materiais e Métodos

Este capítulo tem como finalidade apresentar uma breve descrição acerca dos materiais e métodos utilizados para o desenvolvimento deste estudo. Além disso, descreve-se o ambiente experimental bem como a representação do modelo matemático que descreve o sistema de pêndulo invertido simples levando em consideração as variações paramétricas do sistema. Ademais são apresentados o cálculo dos ganhos das técnicas de controle investigadas, assim como a prova de exclusão da origem para cada um dos controladores propostos. Adicionalmente é constituída uma breve descrição dos 4 testes desenvolvidos para demonstrar a eficácia da metodologia proposta. Por fim, apresenta-se os ganhos de todos os controladores utilizados assim como as referências bibliográficas dos métodos de avaliação empregados.

4.1 Introdução

A Figura 9 exibe o modelo de pêndulo invertido adotado para o desenvolvimento deste estudo. De modo que, é apresentado uma base móvel linear que se pode deslocar no eixo horizontal com auxílio de um motor CC. Na parte superior da base móvel linear é acoplado uma haste. O objetivo de controle neste sistema eletromecânico é determinar uma lei de controle que possa gerar uma variável manipulada adequada de forma que o carrinho estabilize a haste na posição vertical. O próximo objetivo depois de equilibrar o pêndulo invertido é fazer com que o carrinho siga um sinal de referência enquanto mantém a haste na posição vertical. A importância deste sistema surge tanto de aplicações teóricas quanto práticas. O valor do análise teórico do IPS deriva do fato de ser um sistema não linear, o que significa que suas equações de movimento são equações diferenciais não lineares. Deste modo, o projeto de um controlador que seja adequado para atender as características de estabilidade e desempenho do sistema torna-se uma tarefa desafiante. Além disso, o modelo de pêndulo invertido pode ser linearizado entorno ao um determinado ponto de operação, facilitando o uso de ferramentas de sistemas lineares para o projeto de controladores (BOUBAKER, 2013).

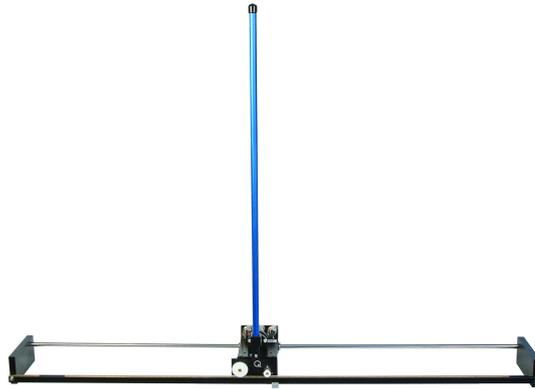


Figura 9 – Sistema de pêndulo invertido simples IPS

Fonte: o autor

4.2 Descrição do ambiente experimental

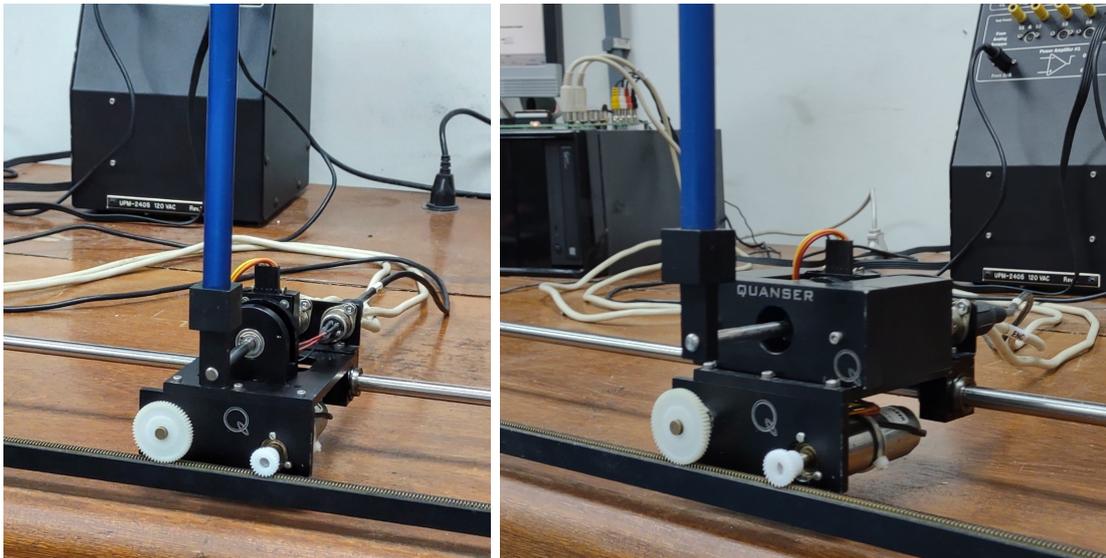
A Figura 10, apresenta o ambiente experimental de um sistema de pêndulo invertido desenvolvido pelo fabricante Quanser®, o qual será utilizado para a realização dos experimentos exibidos neste trabalho. O módulo de IPS encontram-se composto por dois subsistemas, sendo a base móvel linear (IP02) e o pêndulo invertido simples. A Figura 10a e Figura 10b constata as diferentes configurações existentes para os dois tamanhos de pêndulo concebidos junto com a variação de massa na base do sistema. Nesse contexto, realizamos uma ampliação na Figura 10 a fim de mostrar os detalhes da base móvel com diferentes configurações de peso. Sendo assim a Figura 10c e Figura 10d apresentam uma vista da base móvel sem pesos adicionais e com a inserção de pesos adicionais, respectivamente. Tais situações são relacionadas a inserção de incertezas paramétricas no sistema, conforme discutido na seção 3.4.

Por último, a Figura 11 apresenta um esquemático da ligação dos principais equipamentos utilizados para a realização dos experimentos. Nesta figura, é apresentado o terminal de comando Q_4 , utilizado para realizar a comunicação entre o computador e o IPS mediante a utilização do software QUARC®. Além disso, é mostrado o Módulo de Potência Universal da Quanser®, UPM-2405, outro dos componentes importantes no sistema de hardware. Este elemento é o amplificador de potência projetado para acionar os atuadores do sistema.



(a) IPS com massa mínima

(b) IPS com massa máxima



(c) Base móvel sem pesos adicionais

(d) Base móvel com pesos adicionais

Figura 10 – Pêndulo invertido linear da Quanser®

Fonte: o autor

4.3 Modelo matemático do IPS considerando variações paramétricas

Para a obtenção do modelo matemático intervalar que descreve o comportamento dinâmico do IPS, foi utilizado o modelo descrito na seção 2.3 por meio das equações de movimento lineares (22) e (23). O modelo matemático intervalar será reescrito em equações de espaços de estado conforme discutido na seção 2.4. As equações em espaços de estado vão descrever a dinâmica do IPS para as duas situações realizáveis reproduzidas na Figura 10. Basicamente, como a primeira situação teremos o IPS com massa mínima

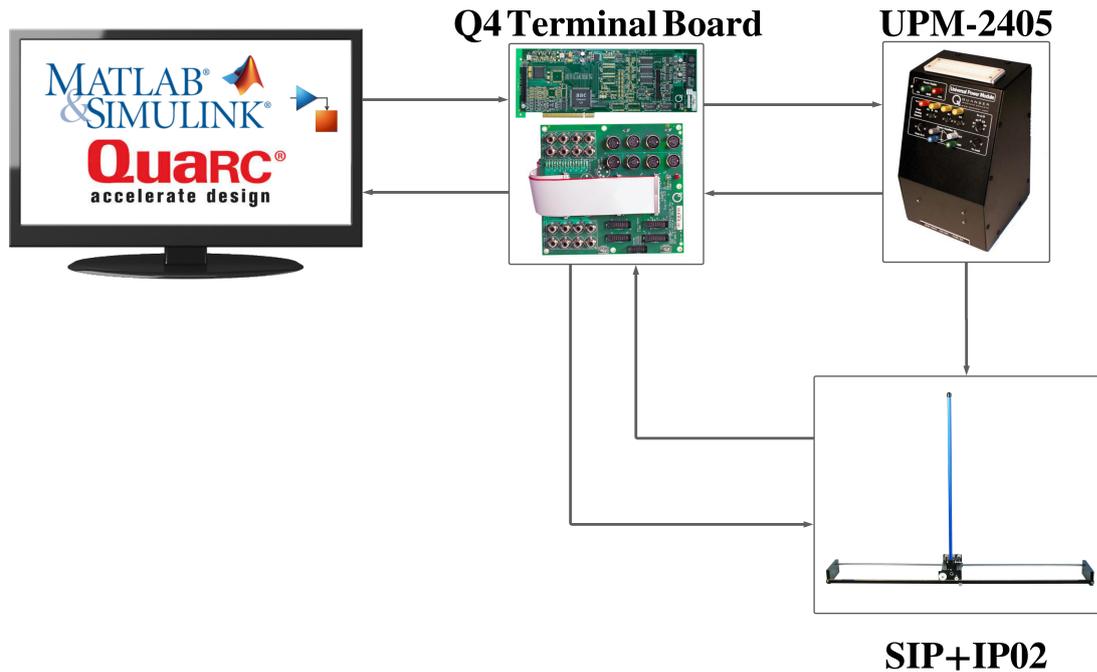


Figura 11 – Sistema de hardware da Quanser® para o IPS

Fonte: o autor

e menor comprimento da haste conforme apresentam a Figura 10a e Figura 10c. Imediatamente uma segunda situação evidenciando a variação paramétrica no IPS com massa máxima e maior comprimento do pêndulo é exibido na Figura 10b e Figura 10d.

Deste modo, considerando a dinâmica descrita pela Figura 10a e substituindo os valores dos parâmetros físicos do IPS apresentados na Tabela 1 nas matrizes do sistema definidas em (29) obtém-se o seguinte sistema dinâmico:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.310082 & -16.4466 & -0.01419 \\ 0 & 48.16249 & -71.2322 & -0.52181 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.3575 \\ 10.2106 \end{bmatrix} \quad (84)$$

De posse do modelo matemático em espaço de estados (84) e as matrizes de saída do sistema (30) torna-se possível obter a função de transferência $G_{1_{cart}}(s, \delta)$, conforme analisado pela relação (31) da seguinte maneira:

$$G_{1_{cart}}(s, \delta) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{2.3575s^2 + 1.0852s - 100.1657}{s^4 + 16.9684s^3 - 40.5915s^2 - 698.7879s} \quad (85)$$

Em seguida consideramos a segunda situação descrita acima para calcular o modelo matemático em espaço de estados. Posteriormente substituímos os parâmetros físicos da Tabela 1 referentes à segunda situação nas matrizes do sistema (29) para obter o seguinte modelo matemático em espaço de estados:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.5216 & -11.6513 & -0.0049 \\ 0 & 26.1093 & -26.8458 & -0.0841 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5304 \\ 3.5261 \end{bmatrix} \quad (86)$$

Logo após, torna-se possível obter a função de transferência $G_{2_{cart}}(s, \delta)$, que descreve o IPS quando submetido a maior variação de massa, conforme apresentado na seguinte relação:

$$G_{2_{cart}}(s, \delta) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{1.5304s^2 + 0.1114s - 34.5910}{s^4 + 11.7354s^3 - 25.2609s^2 - 263.3573s} \quad (87)$$

As funções de transferência (85) e (87) caracterizam a FTI genérica em (33). Finalmente as representações em espaços de estados (84) e (86) permitem realizar uma análise de estabilidade em malha aberta do IPS. Dessa maneira, verifica-se que o sistema em malha aberta apresenta instabilidade por ter raízes no semiplano direito do plano complexo. Tais resultados são confirmados mediante a Tabela 2 podendo assim, justificar a necessidade da implementação de controladores de malha interna focados na estabilização robusta do sistema.

Tabela 2 – Autovalores do IPS linearizado em malha aberta.

Sistema A_1	Sistema A_2
-16.9277	-12.0133
-6.4454	-4.5452
0.0000	0.0000
6.4047	4.8231

Fonte: o autor

4.4 Cálculo dos ganhos dos controladores

Nesta seção, serão apresentados os valores dos ganhos para cada um dos controladores projetados neste trabalho ($PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$) conforme a metodologia proposta no Capítulo 3. Deste modo, iniciar-se-á com o projeto do controlador de realimentação de estados via LMIs o qual representa os controladores projetados na malha interna. Além disso, foi demonstrado na seção 4.3 que o IPS inicialmente é instável de maneira que um dos objetivos do controlador de malha interna é promover a estabilização robusta do sistema frente variações paramétricas. Na sequência serão apresentados os controladores

de malha externa com estrutura PI baseados na TCRP especificamente na alocação de polos intervalar por meio da LP conforme discutido na seção 3.2.

4.4.1 Controladores de malha interna

De posse do modelo matemático, que representa o comportamento dinâmico do IPS, torna-se necessário calcular um controlador baseado em realimentação de estados via LMIs que possibilite estabilizar o sistema frente incertezas paramétricas. Para tal realização utilizou-se as normas H_2 e o controle misto H_2/H_∞ para o projeto dos controladores de malha interna. Para o cálculo da norma H_2 foi concebido o ganho ótimo K_2 mostrado em (88) como solução factível ao problema de otimização linear discutido na subseção 3.3.1, conseguindo estabilizar o IPS e minimizando a norma H_2 da matriz de transferência de malha fechada T_{z_2w} em relação a entrada exógena $w(t)$ (veja Figura 5).

$$K_2 = \begin{bmatrix} 57.15 & -78.64 & 34.54 & -14.41 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Seguidamente, para o projeto de controlador misto H_2/H_∞ foi calculado o ganho K_{misto} apresentado em (89) como solução ótima ao problema de otimização linear definido na subseção 3.3.2. Através do ganho K_{misto} foi possível estabilizar o IPS frente incertezas paramétricas além de atingir simultaneamente duas importantes especificações de projeto como são a minimização da norma H_2 pelo canal de saída z_2 e garantir determinado nível de atenuação ao distúrbio mediante o canal de saída z_∞ (veja Figura 6).

$$K_{misto} = \begin{bmatrix} 48.50 & -88.33 & 37.17 & -16.65 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Nesse cenário, deve-se obter uma família de funções de transferência (FTI) para o IPS, quando é considerado a presença de parâmetros incertos. A família de sistemas apresentadas em (90) e (91) são obtidas após aplicar o controle de malha interna via realimentação de estados conforme discutido na seção 3.4. Uma vez projetado o controle de malha interna podemos encontrar a FTI de malha fechada mediante uma lei de controle $u(t) = Kx(t)$ para os ganhos K_2 e K_{misto} mostrados em (88), (89) e as matrizes do sistema em malha aberta apresentadas em (84), (86) e (30). Basicamente substituiremos as matrizes do sistema (84), (86) e (30) junto com a lei de controle $u(t) = Kx(t)$ para cada um dos ganhos projetados (K_2 e K_{misto}) na formulação (26) e logo na relação (31). Uma vez realizadas todas as substituições pertinentes teremos para o controlador fundamentado na norma H_2 a família de sistemas $G_2(s, \delta)$ conforme apresenta (90).

$$G_2(s, \delta) = \frac{[1.5304, 2.3575]s^2 + [0.1114, 1.0852]s + [-34.5910, -100.1657]}{s^4 + [9.7, 82.7]s^3 + [160.7, 590.2]s^2 + [925.2, 2699.3]s + [1976.9, 5724.6]} \quad (90)$$

Por fim, para o controlador misto H_2/H_∞ é obtida a FTI $G_{misto}(s, \delta)$ conforme apresenta a seguinte relação:

$$G_{misto}(s, \delta) = \frac{[1.5304, 2.3575]s^2 + [0.1114, 1.0852]s + [-34.5910, -100.1657]}{s^4 + [13.6, 99.4]s^3 + [207.8, 706.6]s^2 + [1017.1, 2972]s + [1677.7, 4858.2]} \quad (91)$$

A seguir são apresentados na Tabela 3 os autovalores do sistema em malha fechada na presença dos controladores projetados na malha interna por meio da norma H_2 e do controle misto H_2/H_∞ . Ambos sistemas de controle projetados apresentam estabilidade robusta na presença de variações paramétricas (incertezas estruturadas) devido ao fato de que todas as raízes do polinômio característico de malha fechada em (90) e (91) estão localizadas no semiplano esquerdo do plano complexo.

Tabela 3 – Autovalores do IPS para controladores de malha interna.

Controlador H_2		Controlador H_2/H_∞	
Sistema A_1	Sistema A_2	Sistema A_1	Sistema A_2
$-75.3351 + j0.0000$	$-1.3492 + j11.1515$	$-92.0450 + j0.0000$	$-3.6891 + j11.7225$
$-1.8978 + j4.2009$	$-1.3492 - j11.1515$	$-2.2834 + j3.7247$	$-3.6891 - j11.7225$
$-1.8978 - j4.2009$	$-3.4987 + j1.8512$	$-2.2834 - j3.7247$	$-3.0959 + j1.2347$
$-3.5761 + j0.0000$	$-3.4987 - j1.8512$	$-2.7653 + j0.0000$	$-3.0959 - j1.2347$

Fonte: o autor

4.4.2 Controladores de malha externa

Após o projeto de controlador de malha interna, de modo a proporcionar estabilidade robusta no IPS frente a variações na massa do sistema, estamos preparados para a segunda parte da metodologia proposta, podendo assim projetar o controlador da malha externa com estrutura PI. Para isso, será utilizada a metodologia discutida na seção 3.2, especificamente na subseção 3.2.3 que apresenta a metodologia de alocação de polos intervalar para uma família de sistemas.

De posse da FTI o próximo passo para o projeto da malha de controle externa é selecionar a estrutura de controle PI como em (92) a fim de promover erro nulo em regime permanente, bem como proporcionar uma minimização de distúrbios do tipo degrau.

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (92)$$

Dessa maneira, seguindo os passos do procedimento apresentado na seção 3.4 torna-se possível calcular os polinômios característicos intervalares (\mathcal{D}) da forma apresentada em (83) para cada um dos controladores projetados (norma H_2 e controle misto H_2/H_∞).

O próximo passo é a definição de uma região intervalar de desempenho desejado $\Phi(s)$. Para definir $\Phi(s)$ foi levado em consideração algumas especificações de projeto como erro nulo em regime permanente, bem como manter a estabilidade robusta alcançada pelo controlador de malha interna previamente projetado. Além disso, $\Phi(s)$ para o controlador $PI - H_2$ é definida como $\Phi_{H_2}(s)$ e possui um tempo de acomodação de $t_s = 4.1497 \rightarrow 4.1359$ segundos assim como um fator de amortecimento de $\zeta = 0.1375 \rightarrow 0.4064$. Ademais, $\Phi(s)$ para o controlador $PI - H_2/H_\infty$ é definida como $\Phi_{H_2/H_\infty}(s)$ e possui um tempo de acomodação de $t_s = 5.3210 \rightarrow 5.3605$ segundos bem como um fator de amortecimento de $\zeta = 0.3122 \rightarrow 0.5519$. Dessa maneira foram selecionados os seguintes autovalores que delimitam $\Phi(s)$ conforme apresenta a Tabela 4.

Tabela 4 – Raízes do polinômio característico desejado para os controladores $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$.

Controlador $PI - H_2$		Controlador $PI - H_2/H_\infty$	
Vértice inferior A_1	Vértice superior A_2	Vértice inferior A_1	Vértice superior A_2
$-75.4010 + j0.0000$	$-1.5058 + j10.8483$	$-92.0847 + j0.0000$	$-3.8036 + j11.5745$
$-1.6827 + j3.7833$	$-1.5058 - j10.8483$	$-2.2647 + j3.4221$	$-3.8036 - j11.5745$
$-1.6827 - j3.7833$	$-2.8196 + j1.7391$	$-2.2647 - j3.4221$	$-2.5565 + j0.7065$
$-2.8646 + j0.0000$	$-2.8196 - j1.7391$	$-1.8829 + j0.00007$	$-2.5565 - j0.7065$
$-1.0757 + j0.0000$	$-1.0450 + j0.0000$	$-0.8800 + j0.0000$	$-0.8497 + j0.0000$

Fonte: o autor

De posse dos autovalores desejados, torna-se possível calcular $\Phi(s)$ com base em cada um dos controladores de malha interna previamente projetados. Nesse sentido $\Phi(s)$ para o controle mediante a norma H_2 é apresentado na seguinte relação:

$$\begin{aligned} \Phi_{H_2}(s) = s^5 + [9.7, 82.7]s^4 + [157.0, 584.3]s^3 + [864.1, 2602.9]s^2 + \dots \\ \dots + [2057.9, 5928.6]s + [1375.7, 3983.6] \end{aligned} \quad (93)$$

Seguidamente $\Phi(s)$ para o controle misto H_2/H_∞ é apresentado conforme a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \Phi_{H_2/H_\infty}(s) = s^5 + [13.6, 99.4]s^4 + [205.2, 702.5]s^3 + [977.6, 2909.7]s^2 + \dots \\ \dots + [1734.6, 5003.4]s + [887.3, 2569.4] \end{aligned} \quad (94)$$

Em sequência, conforme discutido na seção 3.4 devemos igualar os termos com a mesma ordem de $\Phi(s)$ junto com $\Delta\mathcal{D}(s, \delta)$. Dessa forma, podemos elaborar o seguinte conjunto de desigualdades para cada um dos controladores:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -5.82 \\ -5.82 \\ -96.44 \\ -96.44 \\ -96.44 \\ -96.44 \\ -555.12 \\ -555.12 \\ -555.12 \\ -555.12 \\ -1186.15 \\ -1186.15 \end{bmatrix}}_{\phi_l^-} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5304 & 0 \\ 2.3575 & 0 \\ 0.1114 & 1.5304 \\ 1.0852 & 1.5304 \\ 0.1114 & 2.3575 \\ 1.0852 & 2.3575 \\ -100.1657 & 0.1114 \\ -34.5910 & 0.1114 \\ -100.1657 & 1.0852 \\ -34.5910 & 1.0852 \\ 0 & -100.1657 \\ 0 & -34.5910 \end{bmatrix}}_{A_S} \underbrace{\begin{bmatrix} k_p \\ k_i \end{bmatrix}}_{X_{PI-H_2}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 330.83 \\ 330.83 \\ 2360.66 \\ 2360.66 \\ 2360.66 \\ 2360.66 \\ 10797.33 \\ 10797.33 \\ 10797.33 \\ 10797.33 \\ 22898.41 \\ 22898.41 \end{bmatrix}}_{\phi_h^+} \quad (95)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4.07 \\ -4.07 \\ -62.35 \\ -62.35 \\ -62.35 \\ -62.35 \\ -305.13 \\ -305.13 \\ -305.13 \\ -305.13 \\ -503.32 \\ -503.32 \end{bmatrix}}_{\phi_l^-} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5304 & 0 \\ 2.3575 & 0 \\ 0.1114 & 1.5304 \\ 1.0852 & 1.5304 \\ 0.1114 & 2.3575 \\ 1.0852 & 2.3575 \\ -100.1657 & 0.1114 \\ -34.5910 & 0.1114 \\ -100.1657 & 1.0852 \\ -34.5910 & 1.0852 \\ 0 & -100.1657 \\ 0 & -34.5910 \end{bmatrix}}_{A_S} \underbrace{\begin{bmatrix} k_p \\ k_i \end{bmatrix}}_{X_{PI-H_2/H_\infty}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 397.51 \\ 397.51 \\ 2826.36 \\ 2826.36 \\ 2826.36 \\ 2826.36 \\ 11888.09 \\ 11888.09 \\ 11888.09 \\ 11888.09 \\ 19432.950 \\ 19432.95 \end{bmatrix}}_{\phi_h^+} \quad (96)$$

Uma vez escrito o problema de otimização através da LP baseado no Teorema de Kharitonov como indicam as desigualdades acima, precisamos comprovar se o conjunto solução para os ganhos dos controladores X_{PI-H_2} e X_{PI-H_2/H_∞} é factível. Nesse sentido, o ponto essencial são os polinômios desejados Φ_{H_2} e Φ_{H_2/H_∞} de ordem $m = 5$ e se eles estão fundamentados na condição de projeto definida em (51). Objetivando realizar uma avaliação gráfica junto com a comprovação teórica da condição de projeto definida em (51) constituiu-se o mapa de polos dos sistemas de controle propostos (veja o passo 10 na seção 3.4). Desta forma, o mapa de polos para a metodologia Φ_{H_2} é apresentado na

Figura 12 e o mapa de polos para a técnica proposta Φ_{H_2/H_∞} é mostrado na Figura 13. É importante entender que controladores ótimos e robustos, projetados mediante as formulações H_2 e H_2/H_∞ podem produzir controladores extremamente frágeis, no sentido de que pequenas perturbações nos coeficientes do controlador projetado podem desestabilizar o sistema de controle de malha fechada. Para uma melhor compreensão da problemática apresentada na Figura 12 e na Figura 13 recomendamos a leitura do trabalho apresentado em (KEEL; BHATTACHARYYA, 1997b). Podemos agregar que existem outros elementos a ter em consideração como os erros de aproximação do software MATLAB referentes ao modelo matemático incerto do IPS. Consequentemente, com a condição de projeto (51) cumprida, uma solução factível dos controladores projetados é encontrada através das norma H_2 e o controle misto H_2/H_∞ e apresentada nas seguintes relações.

$$C_{PI-H_2}(s) = -2.4677 - \frac{39.7704}{s} \quad (97)$$

$$C_{PI-H_2/H_\infty}(s) = -1.7268 - \frac{25.6511}{s} \quad (98)$$

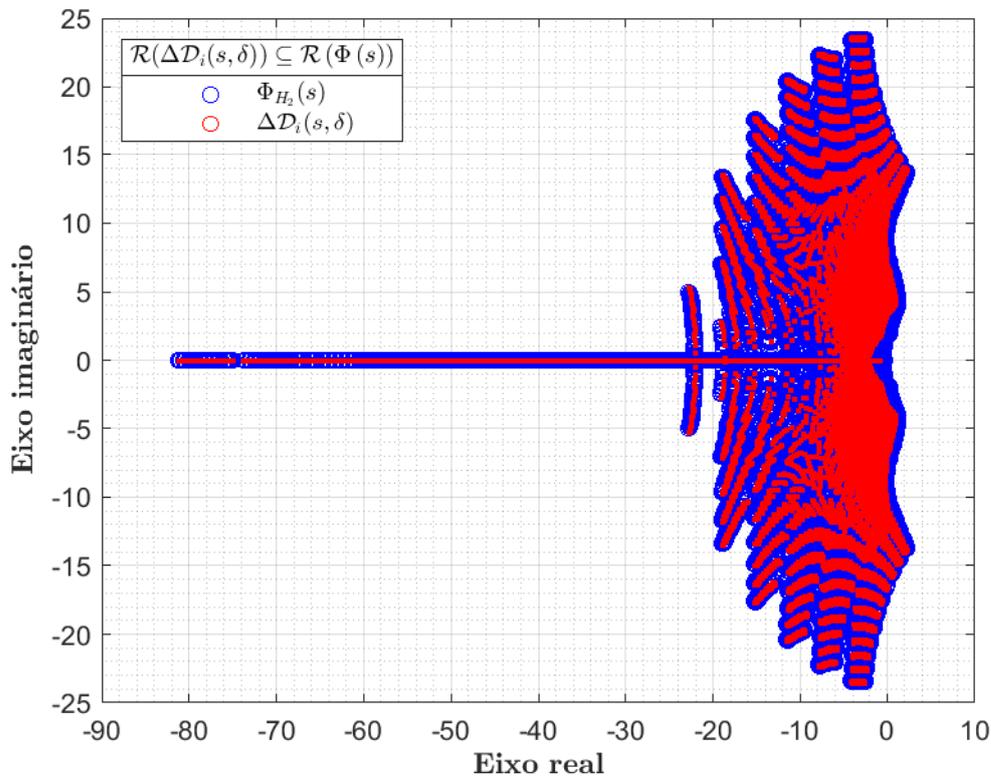


Figura 12 – Espaço das raízes para a região de desempenho desejado do controlador $PI-H_2$.

Fonte: o autor

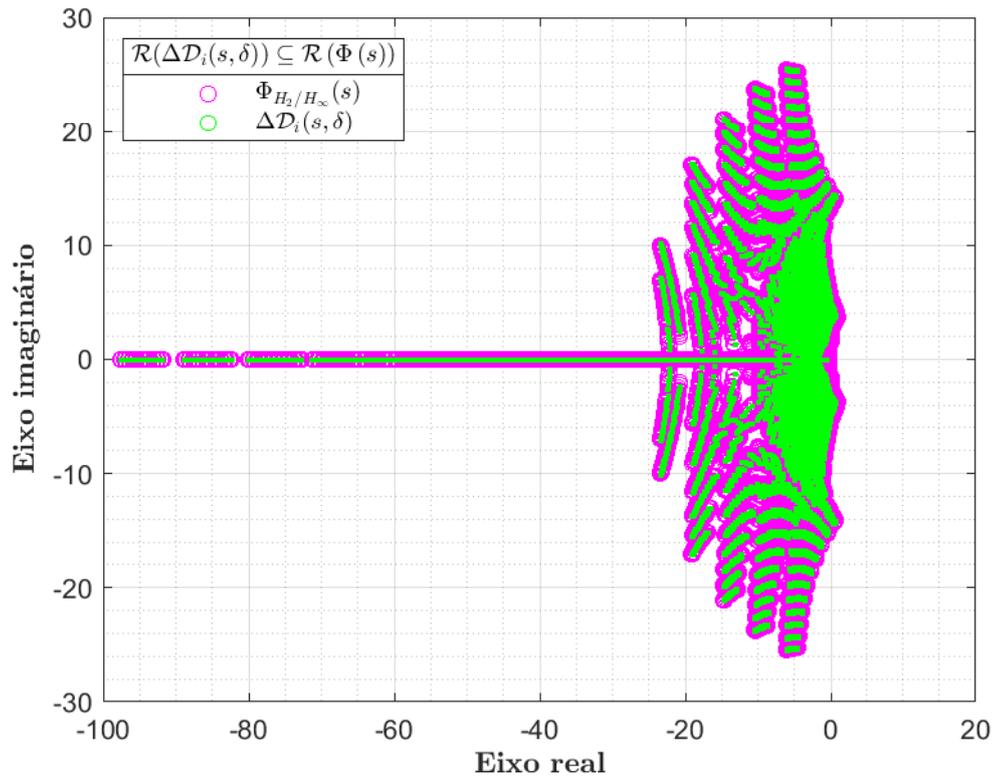


Figura 13 – Espaço das raízes para a região de desempenho desejado do controlador $PI - H_2/H_\infty$.

Fonte: o autor

4.5 Prova de Exclusão da Origem

Nesta seção apresentamos brevemente os fundamentos teóricos do Teorema de Kharitonov. Basicamente realizamos a prova de exclusão da origem (BARMISH, 1989), (BARMISH, 1994) para cada um dos controladores propostos $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$. Nesse sentido é demonstrado o cumprimento do Teorema de Kharitonov, por meio das avaliações gráficas apresentadas na Figura 14 e Figura 15. Nessas duas figuras é possível apreciar como a origem não está incluso dentre os diversos retângulos de Kharitonov (consequentes das incertezas paramétricas) avaliados em uma determinada faixa de frequência.

4.6 Descrição dos Testes realizados

A continuação são descritos os quatro testes realizados neste trabalho com o intuito de avaliar a metodologia de controle proposta.

1. O primeiro teste consiste em analisar a resposta do sistema de controle proposto em um IPS. Para isso, foi gerado um sinal de referência de posição, de modo a

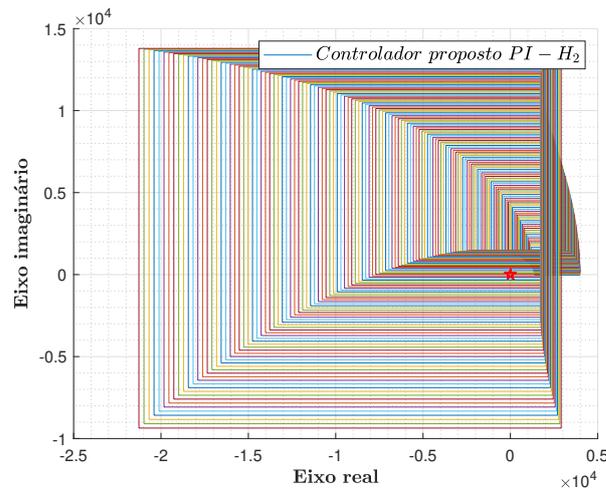


Figura 14 – Teste da exclusão da origem para o controlador $PI - H_2$.

Fonte: o autor

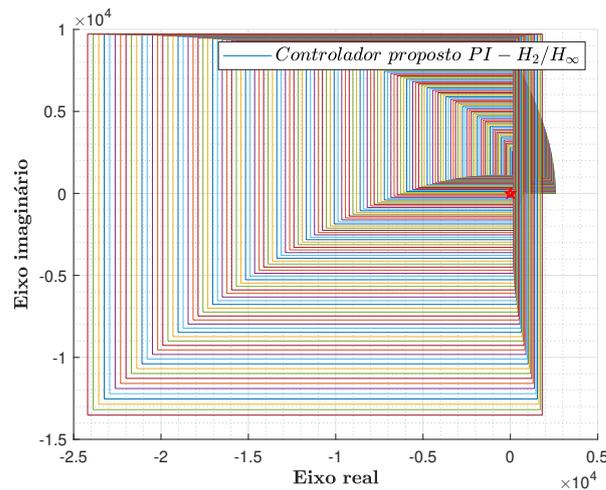


Figura 15 – Teste da exclusão da origem para o controlador $PI - H_2/H_\infty$.

Fonte: o autor

examinar o rastreamento do sinal de referência da base móvel, a variação angular da haste do sistema e o comportamento do sinal de controle. O sinal de referência gerado tem formato de onda quadrada possuindo um período de 100 segundos e oscilando entre os valores de $\pm 10.0\text{ mm}$. Para o Teste 1 foi considerado a menor variação de massa possível no IPS, fisicamente representada mediante a Figura 10a e Figura 10c onde o sistema encontra-se sem os pesos adicionais e com o pêndulo de menor comprimento de haste. As matrizes em espaço de estado que representam a dinâmica da planta para este caso em específico foram apresentadas em (84).

2. No segundo teste avaliamos a metodologia de controle proposta quando o IPS é submetido a uma variação paramétrica. Neste caso o sistema tem a maior variação

de massa possível, tanto na base móvel com a adição de pesos adicionais quanto no pêndulo invertido com um maior comprimento. Fisicamente representado mediante a Figura 10b e Figura 10d. As matrizes em espaço de estado que representam a dinâmica da planta para este caso foram apresentadas em (86). Ao igual que no primeiro teste, aplicou-se um sinal de referência de posição para a base móvel, no formato de onda quadrada possuindo um período de 100 segundos, oscilando entre os valores de $\pm 10.0\text{ mm}$ de modo a examinar o rastreamento do sinal de referência da base móvel, a variação angular da haste do sistema e o comportamento do sinal de controle.

3. O terceiro teste consiste em avaliar a capacidade de rejeição ao distúrbio dos sistemas de controle investigados. Desta maneira foi adicionado um sinal constante do tipo degrau $d(t)$ na entrada do sistema como apresenta a Figura 16. Para a realização do terceiro teste foi considerado um sinal de perturbação do tipo degrau na entrada da planta com intensidade de 45 mm aos 80 segundos do tempo de simulação, mantendo o mesmo sinal de referência empregado nos testes anteriores. A ideia por trás é tentar emular um toque na haste do sistema ou uma força de oposição ao deslocamento da base móvel, pretendendo avaliar a influência deste distúrbio no rastreamento do deslocamento linear, na variação angular da haste do sistema e no sinal de controle. Para a realização do teste 3 foi considerado o sistema com pesos adicionais como no Teste 2, com a intenção de poder avaliar as técnicas de controle propostas para o “pior caso”.

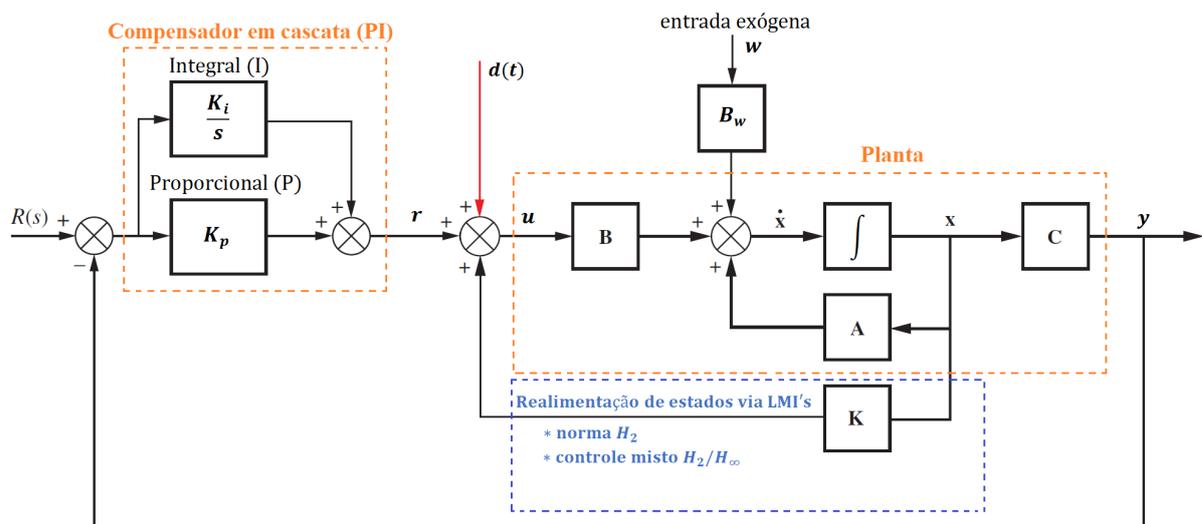


Figura 16 – Diagrama de blocos genérico para a inserção do distúrbio $d(t)$ no sistema.

Fonte: o autor

4. O quarto teste constitui-se em calcular e avaliar os índices integrais de desempenho relativos aos testes 1, 2 e 3 a fim de realizar uma análise quantitativa do desempenho

de cada metodologia de controle investigada. Diversos índices serão avaliados como o critério da Integral Absoluta do Erro (IAE, do inglês *Integral Absolute Error Criterion*), o critério da Integral Quadrática do Erro (ISE, do inglês *Integral square-error*), o critério da Integral do Erro Absoluto vezes o tempo (ITAE, do inglês *Integral of time multiplied Absolute Error Criterion*), o critério da Integral do Erro Quadrático vezes o tempo (ITSE, do inglês *Integral of time multiplied square-error Criterion*) e por último o critério da Integral Quadrática do Sinal de Controle (IQSC, do inglês *Integral of Quadratic Signal Control*) de acordo com as definições em (99).

$$\begin{aligned}
 \text{IAE} &= \int_0^{\infty} |e(t)| dt \\
 \text{ISE} &= \int_0^{\infty} e^2(t) dt \\
 \text{ITAE} &= \int_0^{\infty} t|e(t)| dt \\
 \text{ITSE} &= \int_0^{\infty} te^2(t) dt \\
 \text{IQSC} &= \int_0^{\infty} u^2(t) dt
 \end{aligned} \tag{99}$$

4.7 Método de Avaliação

Por fim a Tabela 5 relaciona todos os controladores projetados assim como cada um dos ganhos calculados para a malha de controle externa (ganhos k_p, k_i) e a malha de controle interna (ganhos $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}$). Além disso, são apresentadas três técnicas de controle a mais para fins de comparação e avaliação da metodologia proposta. Neste trabalho de mestrado a primeira técnica adicional é identificada como RTDR do inglês, *Robust Tracking and Disturbance Rejection* proposta em (CHEN, 1999). Nesta técnica de controle basicamente temos um controlador em cascata o qual incorpora um integrador na malha externa a fim de obter um rastreamento robusto do sinal de referência em presença de incertezas. Por outro lado, contamos com o método LQR bem conhecido e abordado por diversas literaturas como apresentado em (WASZAK; LANGOWSKI, 2020) e (Vinodh Kumar; JEROME, 2013). Por fim uma técnica de controle desenvolvida pelo autor identificada como $H_2 - RT$ emprega a estrutura de RTDR citada anteriormente. Nesse contexto, são obtidas as matrizes de transferência do sistema facilitando assim a rescrição do problema como um problema de otimização no formato de LMIs fundamentado na norma H_2 . A técnica $H_2 - RT$ foi desenvolvida a fim de ter uma metodologia de controle a mais no mesmo formato da metodologia proposta com o intuito de realizar as avaliações pertinentes.

Tabela 5 – Controladores projetados para as malhas de controle externa e interna.

	$H_2 - RT$	$PI - \mathcal{H}_2$	$PI - \mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	$RTDR$	LQR
k_{11}	61.2289	57.1513	48.5020	-39.8190	-11.9024
k_{12}	-92.7551	-78.6419	-88.3267	56.9908	51.1796
k_{13}	38.5063	34.5442	37.1729	-24.8252	-20.0568
k_{14}	-16.7446	-14.4141	-16.6536	10.0939	8.9808
k_p	–	-2.4677	-1.7268	–	–
k_i	-49.3156	-39.7704	-25.6511	47.4509	–

Fonte: o autor

4.8 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foi apresentado o ambiente experimental para o desenvolvimento deste trabalho de mestrado assim como o modelo matemático do sistema de pêndulo invertido contendo incertezas paramétricas. Ademais, foram calculados os ganhos dos controladores projetados na malha interna via realimentação de estados bem como os ganhos dos controladores pertencentes a malha externa baseados na TCRP. Além disso, desenvolvemos a prova de exclusão da origem para os controladores propostos. Finalmente, descrevemos todos os testes a serem avaliados no Capítulo 5, e foram apresentados os controladores para a realização do método de avaliação.

Experimentos e Análise dos Resultados

Este capítulo tem como objetivo apresentar e discutir os resultados de simulação assim como os resultados experimentais obtidos no desenvolvimento deste trabalho de mestrado. Para isso, utilizamos o ambiente computacional do software MATLAB® & SIMULINK® e empregamos o modelo linear do sistema a fim de realizar os cálculos dos ganhos. Em seguida, usamos o modelo não linear do IPS para desenvolver as provas via simulação, com o intuito de obter a maior precisão possível dentre o modelo da planta e o sistema real. Posteriormente, para o desenvolvimento experimental deste projeto de pesquisa utilizou-se uma plataforma de pêndulo invertido fisicamente presente na Universidade Federal do Amazonas (UFAM), com o intuito de examinar as técnicas de controle investigadas sobre um estudo de caso para um IPS. Dita avaliação esta fundamentada em três experimentos ou provas, realizadas via simulação e desenvolvidas também de maneira experimental. Por fim, o Capítulo 5 esta dividido em três seções sendo avaliação dos resultados de simulação, avaliação dos resultados experimentais e as conclusões do capítulo.

5.1 Avaliação dos Resultados de Simulação

Nesta seção serão abordados os resultados obtidos via simulação para cada um dos testes descritos na seção 4.6 com relação aos controladores abordados na seção 4.7. Seguidamente, maiores detalhes são oferecidos no análise quantitativo realizado na subseção 5.1.4.

5.1.1 Teste 1. Variação do sinal de referência considerando o sistema com massa mínima.

Esta seção aborda a prova número 1, objetivando avaliar o desempenho e a estabilidade dos sistemas de controle projetados, considerando os menores valores de massa da base móvel e do comprimento da haste conforme apresentados na seção 4.2. Para esse fim será gerado um sinal de referência de onda quadrada (com período igual a 100s), deslocando

linearmente a posição da base do IPS para direita quando o sinal tem magnitude positiva e para a esquerda quando o sinal seja negativo.

Nesse contexto, a Figura 17 apresenta o deslocamento linear $x_c(t)$ experimentado por todas as técnicas de controle abordadas neste trabalho em relação ao rastreamento do sinal de referência exercido pela base móvel. Na Figura 17a é possível apreciar que todas as técnicas de controle estudadas conseguiram rastrear perfeitamente a variação do sinal de referência com relação a $x_c(t)$. Além disso, as técnicas de controle sendo avaliadas apresentaram estabilidade assim como atenderam as condições de desempenho projetadas, entenda-se erro nulo em regime permanente $e(\infty) \cong 0$ e um $t_s \leq 5.6s$. Seguidamente, a Figura 17b apresenta uma ampliação da Figura 17a numa faixa de 12s. Especificamente é apresentada a partir do tempo de simulação de 50s pretendendo obter um maior nível de detalhes das respostas obtidas por cada técnica de controle sendo avaliada. Particularmente, a metodologia $H_2 - RT$ apresentou o menor tempo de acomodação com $t_s = 2.5493s$ quando utilizado o critério do 5% em comparação com as outras técnicas de controle. Maiores detalhes dos resultados desta prova são oferecidos na subseção 5.1.4.

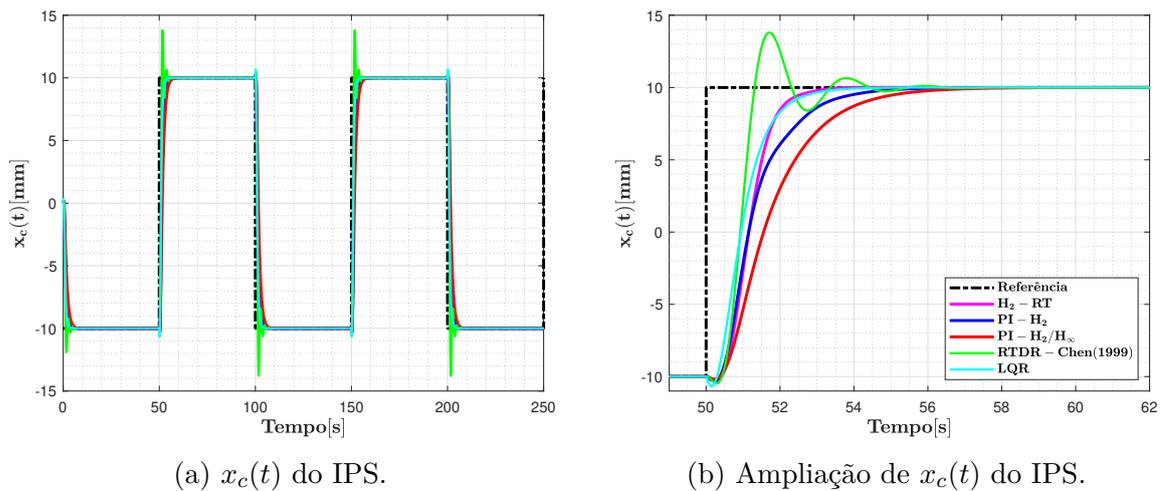


Figura 17 – Deslocamento linear $x_c(t)$ do sistema com massa mínima.

Fonte: o autor

Seguidamente, a Figura 18 apresenta o comportamento dinâmico do pêndulo invertido $\theta(t)$. A continuação, apresenta-se uma expansão da Figura 18a através da Figura 18b, para detalhar o comportamento da variação angular $\theta(t)$ exibida pelas metodologias de controle investigadas nesta prova. Melhorando dessa maneira o nível de análise no Teste de simulação 1. Especificamente foi detalhado o comportamento de $\theta(t)$ numa faixa de 12s a partir do tempo de simulação de 50s. Por fim, a metodologia de controle proposta $PI - H_2/H_\infty$ apresentou a menor variação angular com $\theta(t) = \pm 0.0898^\circ$ em comparação com as outras técnicas sendo avaliadas. No entanto, todas as metodologias de controle atingiram um desempenho adequado, o qual é considerado para uma variação angular de $\theta(t) \leq \pm 0.55^\circ$.

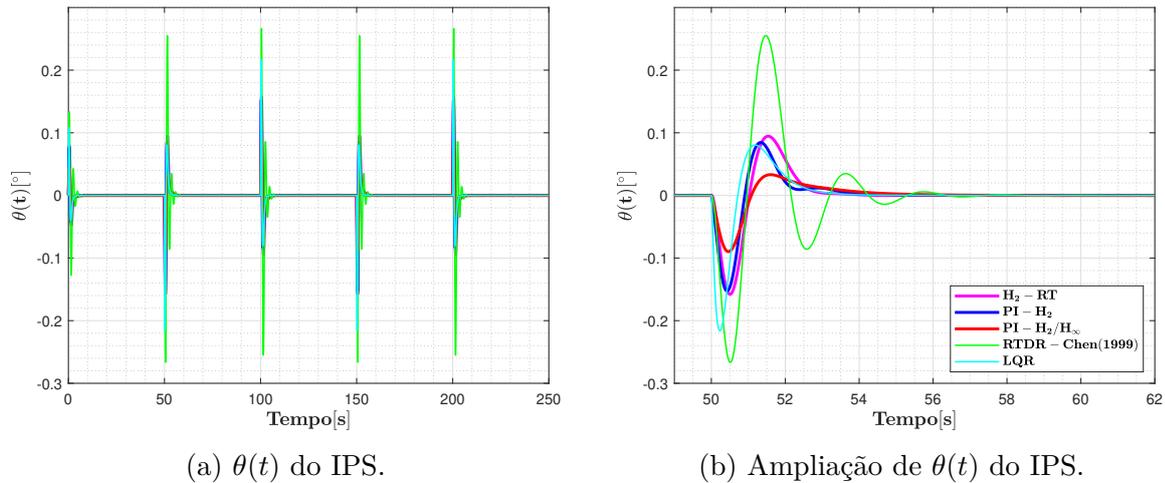


Figura 18 – Posição angular $\theta(t)$ do sistema com massa mínima.

Fonte: o autor

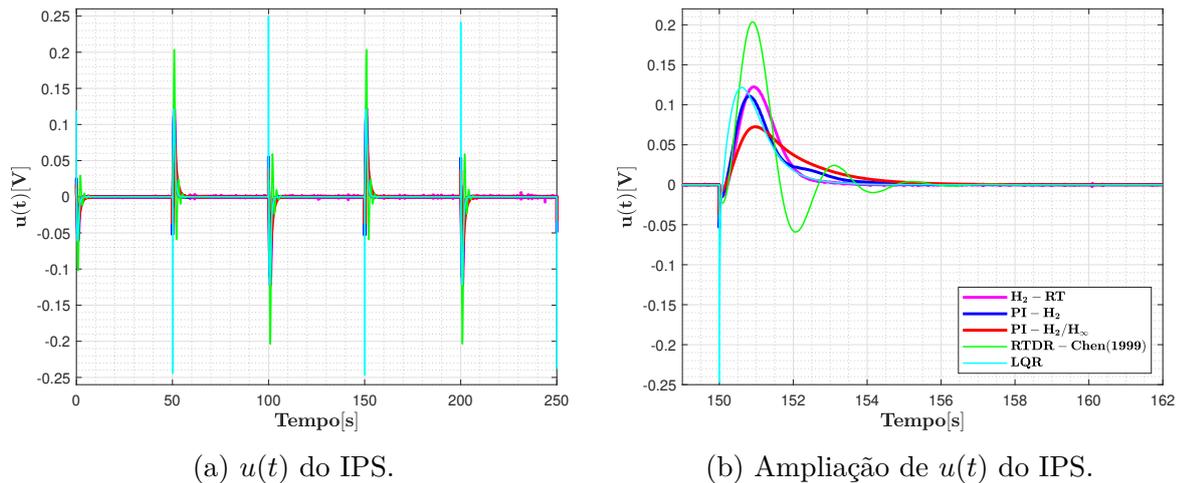


Figura 19 – Esforço de controle $u(t)$ do sistema com massa mínima.

Fonte: o autor

Finalmente é apresentado o esforço de controle $u(t)$ através da Figura 19. O sinal de controle é aplicado por meio do motor CC para deslocar linearmente a base móvel do sistema modificando assim sua posição e conseguindo rastrear o sinal de referência. A medição de $u(t)$ é realizada em *Volts* [V]. Conseqüentemente na Figura 19b verifica-se mediante uma expansão da Figura 19a entorno ao tempo de simulação de 150s, que o menor esforço de controle foi exibido pela metodologia proposta $PI - H_2/H_\infty$, com $u(t) = \pm 0.0724V$. Em seguida, as outras duas metodologias implementadas $PI - H_2$ e $H_2 - RT$ apresentaram um similar gasto energético de aproximadamente $u(t) = \pm 0.1108V$ e $u(t) = \pm 0.1223V$ respectivamente. Por fim, na Figura 19b verifica-se que os maiores esforços de controle foram manifestados pelas técnicas de controle moderno $RTDR$ e LQR com $u(t) = \pm 0.2501V$ e $u(t) = \pm 0.2036V$, na devida ordem.

5.1.2 Teste 2. Variação do sinal de referência considerando o sistema com massa máxima.

Nesta seção são apresentadas as respostas dos sistemas de controle investigados em relação ao desempenho e estabilidade no Teste 2. Particularmente nesta prova são considerados os maiores valores de massa da base móvel linear e da haste conforme descrito na seção 4.2. Nesse cenário, a Figura 20 apresenta o deslocamento linear $x_c(t)$ do IPS quando este encontra-se com a massa máxima do sistema, definido como o vértice superior da dinâmica do IPS.

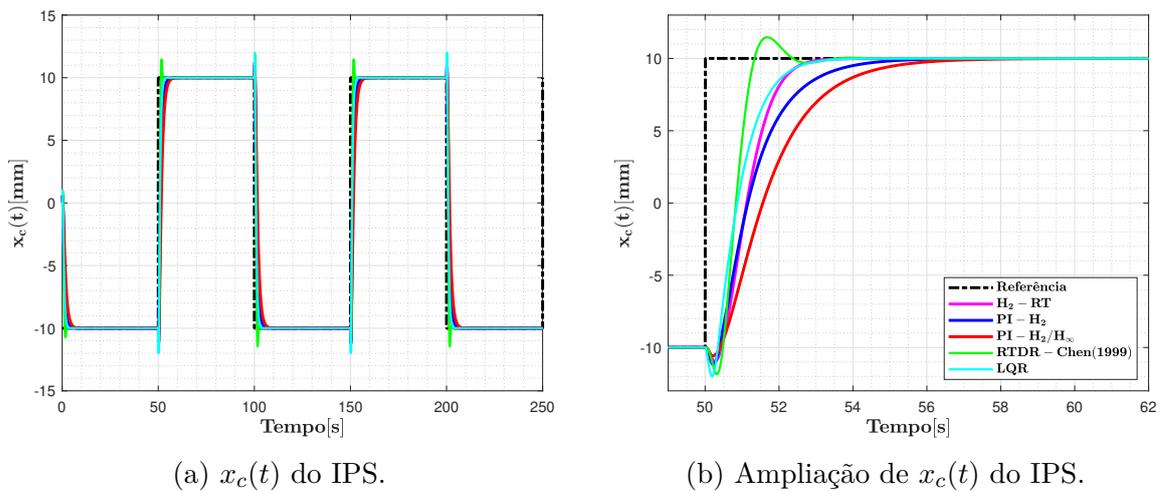


Figura 20 – Deslocamento linear $x_c(t)$ do sistema com massa máxima.

Fonte: o autor

O sinal de referência gerado possui o mesmo formato de onda quadrada que no Teste anterior, o qual modifica a posição da base móvel. Na Figura 20a verifica-se que todas as metodologias conseguiram rastrear a variação do sinal de referência, apresentando estabilidade robusta frente incertezas paramétricas no IPS. Ressalta-se que todos os controladores atenderam as condições de desempenho desejado, no entanto o controlador RTDR obteve o menor tempo de acomodação para $t_s = 2.23s$. Na Figura 20b é possível realizar uma melhor avaliação gráfica dos resultados obtidos nesta prova, devido ao aumento realizado nas respostas simuladas. Especificamente foi apresentada uma faixa de amostragem de 12s a partir do tempo de simulação de 50s.

Seguidamente, a Figura 21 apresenta a posição angular $\theta(t)$ da haste do sistema, decorrente do sinal de onda quadrada gerado como sinal referência. Desta forma o sistema é obrigado a se deslocar horizontalmente mantendo o pêndulo perfeitamente equilibrado na posição vertical, ao mesmo tempo são consideradas incertezas paramétricas na massa do IPS. Nesta Figura verifica-se que o controlador $PI - H_2/H_\infty$ apresentou a menor variação angular em relação às demais metodologias de controle com $\theta(t) = \pm 0.0943^\circ$. Além disso na Figura 21b aplicou-se um aumento dos resultados obtidos na Figura 21a e deste modo

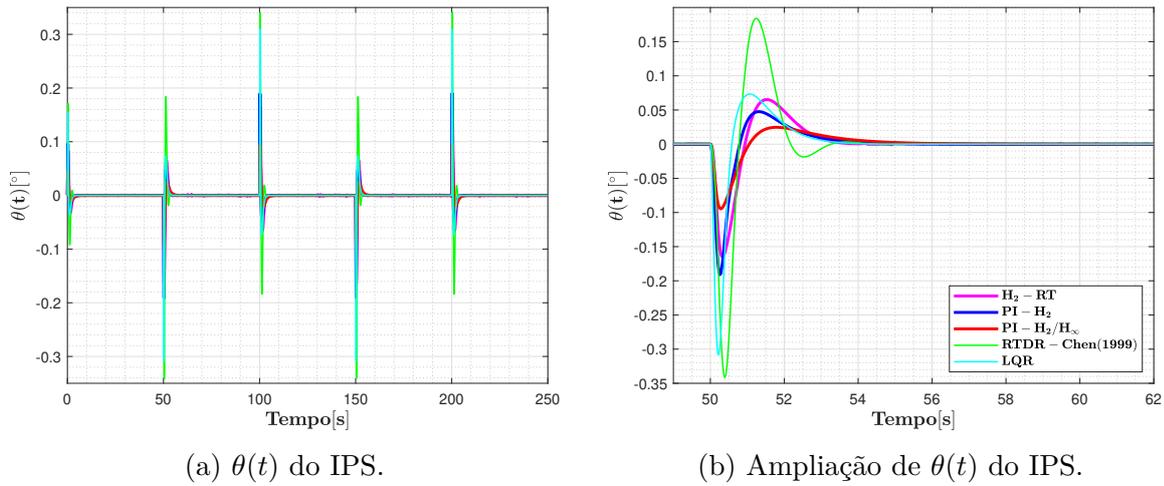


Figura 21 – Posição angular $\theta(t)$ do sistema com massa máxima.

Fonte: o autor

percebe-se que o controlador RTDR apresentou a maior oscilação angular, em torno de $\theta(t) = \pm 0.34^\circ$. Por último, todas as variações angulares nesta prova estão dentro da faixa de variação angular considerada como “boa” para $\theta(t) \leq \pm 0.55^\circ$, determinando um excelente comportamento dos projetos de controle abordados em relação a este parâmetro avaliado no modo simulação.

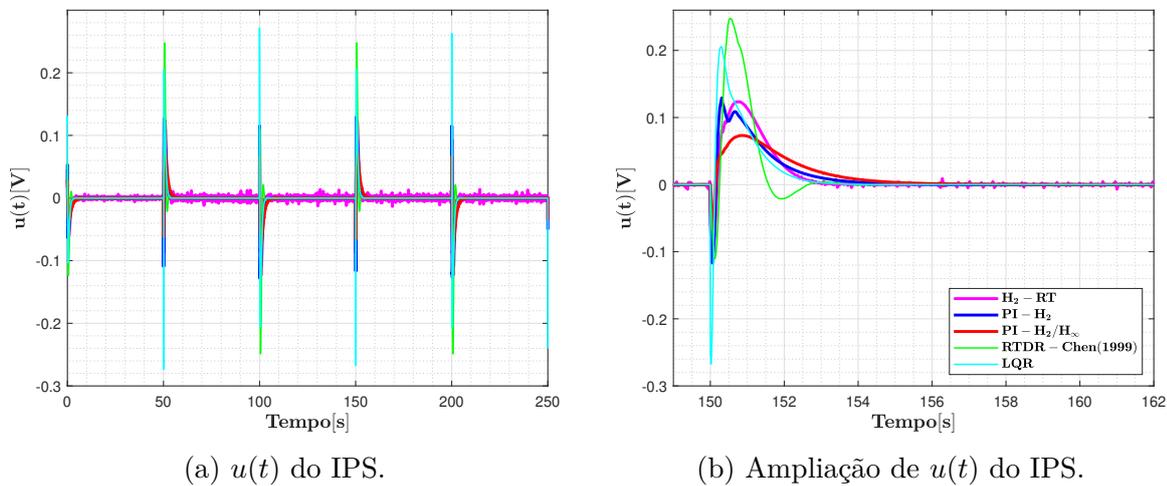


Figura 22 – Esforço de controle $u(t)$ do sistema com massa máxima.

Fonte: o autor

Por fim, a Figura 22 apresenta o comportamento do sinal de controle $u(t)$ para cada uma das técnicas desenvolvidas em relação ao segundo teste. O sinal de controle $u(t)$ é produzido por cada um dos controladores como a entrada ao sistema através do atuador da planta (motor CC, vide Capítulo 2). Dessa maneira, é possível realizar o rastreamento do sinal de referência e conseqüentemente manter o pêndulo invertido perfeitamente equilibrado frente a variações na massa do IPS. Na Figura 22b é apresentado uma ampliação

da Figura 22a onde é possível verificar que o controlador $PI - H_2/H_\infty$ apresentou o menor esforço de controle com $u(t) = \pm 0.07V$. Enquanto a metodologia LQR apresentou o maior esforço de controle. Por último, observa-se que todas as técnicas de controle nesta prova apresentaram estabilidade robusta. O fato de submeter o IPS a uma variação de massa de 60% não gerou instabilidade ao sistema nos resultados de simulação.

5.1.3 Teste 3. Resposta ao distúrbio do tipo degrau para o sistema com massa máxima.

Para a realização do teste de rejeição ao distúrbio foi considerado o sistema com massa máxima e um distúrbio como um sinal constante do tipo degrau $d(t)$, conforme apresentado no diagrama de blocos da Figura 16. O distúrbio $d(t)$ foi programado para ser executado no tempo de simulação igual aos 80 segundos. A finalidade desta prova é enriquecer a análise comparativa das metodologias de controle propostas neste estudo, avaliando o comportamento dinâmico de cada uma delas. Para isso, foi analisado a resposta dinâmica de todas as técnicas implementadas para o “pior caso” (IPS com massa máxima e haste de maior comprimento). Nesse cenário, a Figura 23 apresenta as respostas do deslocamento linear $x_c(t)$ das técnicas de controles projetadas na ocorrência do distúrbio $d(t)$. Em seguida, a Figura 23b apresenta uma ampliação da Figura 23a no instante preciso em que ocorre $d(t)$, mostrando maiores detalhes do deslocamento linear experimentado por cada uma das metodologias investigadas. Nos resultados apresentados na Figura 23b concluiu-se que todas as técnicas apresentaram um excelente rastreamento na ocorrência de $d(t)$ com exceção da metodologia LQR a qual apresentou um ineficaz rastreamento do sinal de referência. Maiores detalhes sobre os resultados obtidos são oferecidos na próxima seção.

Posteriormente, na Figura 24 verifica-se o comportamento da posição angular $\theta(t)$, na presença de $d(t)$ no tempo de simulação de 80s para o IPS com massa máxima. Nesta figura constata-se que as técnicas de controle sendo propostas $PI - H_2$, $PI - H_2/H_\infty$ junto com a técnica para uso comparativo $H_2 - RT$ apresentaram um excelente desempenho em relação a uma pequena variação da posição angular $\theta(t)$. Especificamente a técnica proposta $PI - H_2/H_\infty$ apresentou a menor variação angular entorno de $\theta(t) = \pm 0.036^\circ$. Por outro lado, as técnicas $H_2 - RT$ e $PI - H_2$ apresentaram também uma variação angular muito pequena ao redor de $\theta(t) = \pm 0.04^\circ$ e $\theta(t) = \pm 0.05^\circ$, respectivamente.

Por fim, a Figura 25b apresenta uma expansão da Figura 25a, onde é possível apreciar minuciosamente o esforço de controle $u(t)$ realizado por cada uma das técnicas de controle abordadas. As técnicas de controle propostas ($PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$) assim como a técnica empregada para uso comparativo $H_2 - RT$ apresentaram um esforço de controle pequeno e similar durante a ocorrência do distúrbio $d(t)$, entorno de $u(t) = \pm 0.06V$. Finalmente, é válido afirmar que nenhuma das metodologias sendo propostas apresentaram

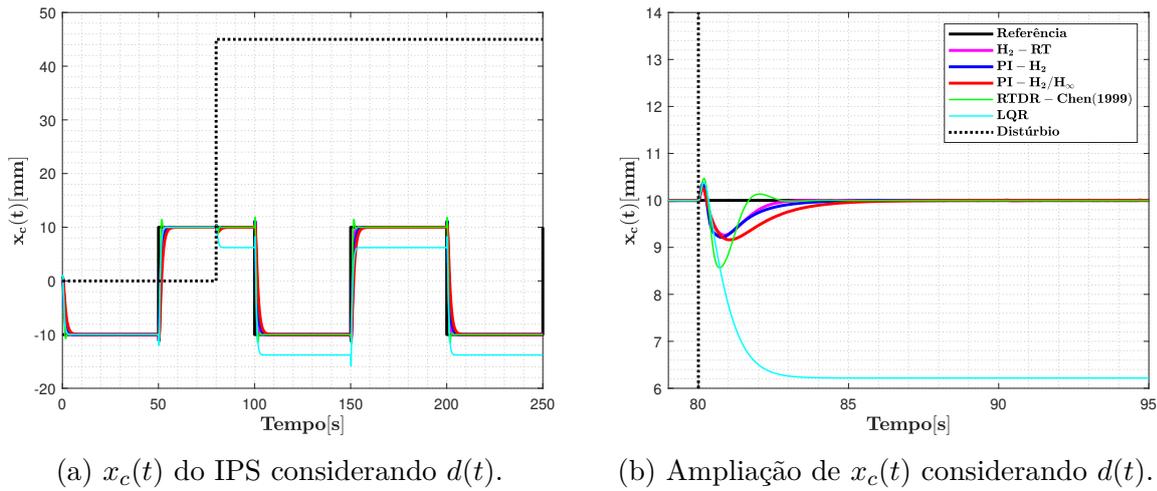


Figura 23 – Deslocamento linear $x_c(t)$ considerando a inserção do distúrbio $d(t)$ na entrada do sistema com massa máxima.

Fonte: o autor

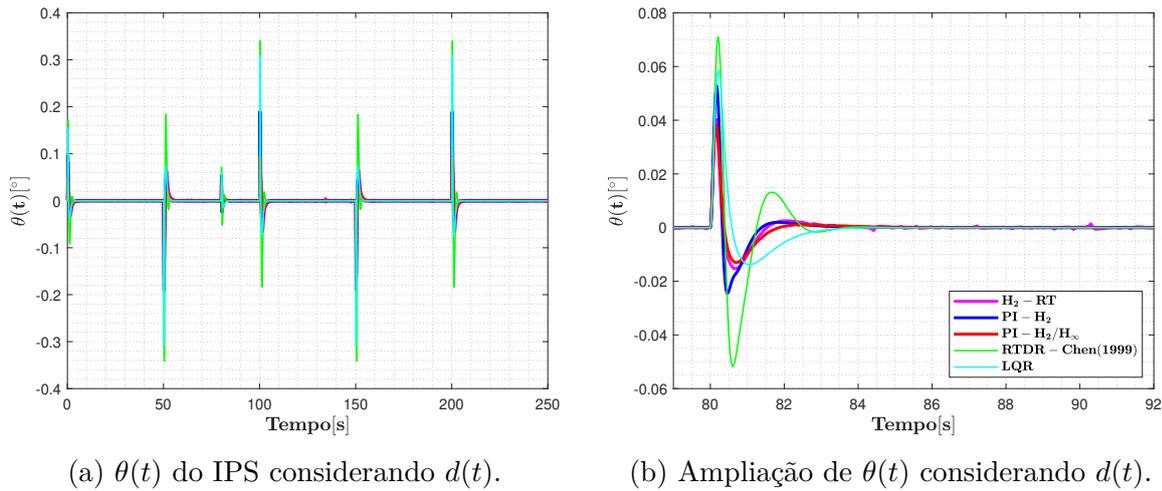


Figura 24 – Posição angular $\theta(t)$ considerando a inserção do distúrbio $d(t)$ na entrada do sistema com massa máxima.

Fonte: o autor

instabilidade ou saturação no sinal de controle para o teste de inserção do distúrbio $d(t)$ na entrada do sistema.

5.1.4 Teste 4. Avaliação dos índices de desempenho integrais (IAE's) para os resultados de simulação.

Nesta seção serão avaliados os índices de desempenho (IAE's) em relação aos testes anteriormente apresentados. Um índice de desempenho é uma medida quantitativa do desempenho de um sistema de controle e é escolhido de forma a enfatizar as especificações importantes do sistema. Em outras palavras, esse índice é um número que nos diz

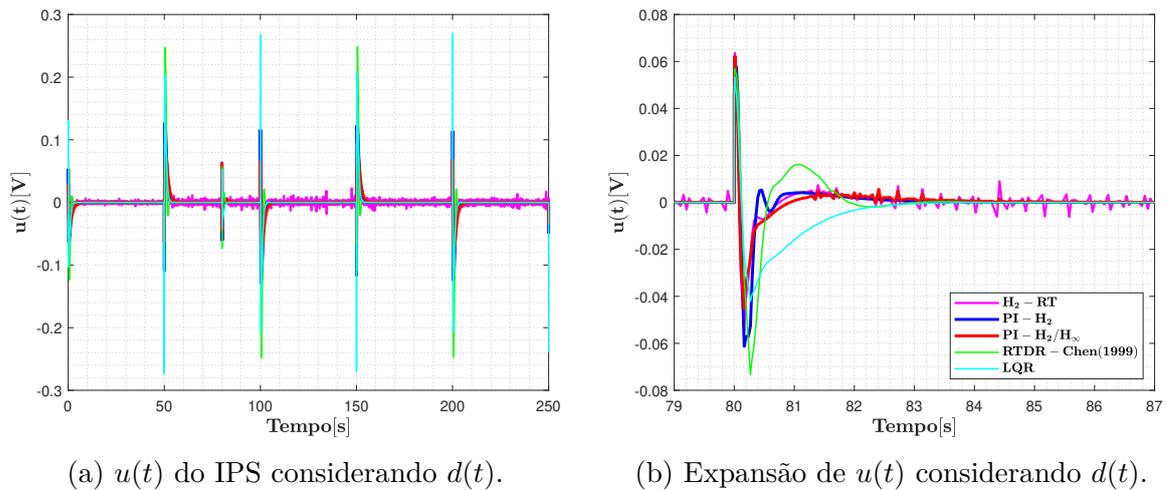


Figura 25 – Esforço de controle $u(t)$ considerando a inserção do distúrbio $d(t)$ na entrada do sistema com massa máxima.

Fonte: o autor

quão “bom” é o desempenho do sistema de controle. Um sistema de controle é considerado ótimo se os parâmetros são escolhidos de forma que minimizem ou maximizem (dependendo da situação) esses índices de desempenho. Neste trabalho, são escolhidos os parâmetros que minimizam os índices de desempenho. Diferentes critérios de erro têm sido definidos na literatura correspondentes aos índices de desempenho baseados na integral do erro (GRAHAM; LATHROP, 1953), (SCHULTZ; RIDEOUT, 1961), (DORF; BISHOP, 2011b) e (SARI; KOKER; BOZ, 2014). Aqui abordaremos os seguintes critérios de desempenho: IAE, ISE, ITAE, ITSE e IQSC em relação ao rastreamento experimental por cada uma das técnicas de controle entre o deslocamento linear $x_c(t)$ e o sinal de referência, conforme discutido na seção 4.6.

A Tabela 6 apresenta os índices de desempenho calculados em relação ao Teste 1. Observa-se na mesma que o desempenho da metodologia de controle LQR apresentou os menores índices de desempenho (IAE, ISE, ITAE, ITSE) sobre a variação do sinal de referência do sistema quando comparado com as demais metodologias. Entretanto, a metodologia proposta $PI - H_2/H_\infty$ apresentou o menor índice IQSC e os menores valores de $\theta(t)$ e $u(t)$. A continuação, na parte inferior da Tabela 6 é realizado uma análise quantitativa, em relação ao desempenho dos controladores projetados para o primeiro teste. Neste análise quantitativo se têm como principal referência a medição dos parâmetros de tempo de acomodação t_s , máximo sobressinal M_φ , variação angular $\theta(t)$ e a variação do sinal de controle $u(t)$. Nesse sentido, confirma-se que a técnica $H_2 - RT$ apresentou o menor t_s . Seguidamente, o menor M_φ foi apresentado pelas técnicas $PI - H_2$, $PI - H_2/H_\infty$ e LQR com um $M_\varphi = 0\%$. Em sentido geral, todas as metodologias abordadas nesta prova apresentaram erro nulo em estado estacionário $e(\infty) = 0$ e os IAEs obtidos na Tabela 6 confirmaram as avaliações gráficas realizadas na subseção 5.1.1.

Tabela 6 – Índices de desempenho calculados para o Teste de simulação 1.

Controladores	$H_2 - RT$	$PI - H_2$	$PI - H_2/H_\infty$	RTDR	LQR
IAE	24.8802	28.7568	37.8330	22.5657	22.0331
ISE	386.3592	391.8238	507.5053	327.4925	311.2943
ITAE	1264.2	1468.6	1943.7	1149.1	1119.3
ITSE	19555.0	19854.0	25812.0	16555.0	15739.0
IQSC	0.0123	0.0097	0.0064	0.0287	0.0127
$t_s[s]$	2.5493s	3.9577s	5.0798s	4.0345s	2.7626s
$M_\varphi[\%]$	0.0741%	0.0014%	0.0011%	37.9751%	0.0065%
$\theta(t)[^\circ]$	$\pm 0.1579^\circ$	$\pm 0.1525^\circ$	$\pm 0.0898^\circ$	$\pm 0.2665^\circ$	$\pm 0.2165^\circ$
$u(t)[V]$	$\pm 0.1223V$	$\pm 0.1108V$	$\pm 0.0724V$	$\pm 0.2036V$	$\pm 0.2501V$

Fonte: o autor

Por outra parte, a Tabela 7 apresenta os índices de desempenho calculados para o Teste 2. Nesta tabela verifica-se que o controlador projetado pela metodologia RTDR apresentou os menores valores para os critérios de desempenho IAE e ITAE, bem como o menor tempo de acomodação para $t_s = 2.1462s$. A continuação a técnica LQR obteve os menores índices de desempenho para os critérios ISE e ITSE. No entanto a técnica de controle proposta $PI - H_2/H_\infty$ apresentou o menor valor para o índice IQSC, assim como os menores valores para variação angular com $\theta(t) = \pm 0.0943^\circ$ e o esforço de controle com $u(t) = \pm 0.0732V$. Por último, nesta prova três das cinco metodologias de controle abordadas apresentaram um $M_\varphi = 0\%$, salvo as técnicas $H_2 - RT$ e RTDR.

Tabela 7 – Índices de desempenho calculados para o Teste de simulação 2.

Controladores	$H_2 - RT$	$PI - H_2$	$PI - H_2/H_\infty$	RTDR	LQR
IAE	24.9070	28.7464	37.8223	18.6540	20.9705
ISE	380.4708	387.2130	503.4638	309.1686	302.2518
ITAE	3756.2	4341.5	5724.3	2808.3	3159.8
ITSE	57270.0	58310.0	75921.0	46493.0	45465.0
IQSC	0.0154	0.0133	0.0080	0.0351	0.0244
$t_s[s]$	2.5470s	3.9933s	5.1385s	2.1462s	2.5854s
$M_\varphi[\%]$	0.1162%	0%	0%	14.6037%	0%
$\theta(t)[^\circ]$	$\pm 0.1638^\circ$	$\pm 0.1901^\circ$	$\pm 0.0943^\circ$	$\pm 0.3408^\circ$	$\pm 0.3086^\circ$
$u(t)[V]$	$\pm 0.1235V$	$\pm 0.1292V$	$\pm 0.0732V$	$\pm 0.2479V$	$\pm 0.2673V$

Fonte: o autor

Finalmente, na Tabela 8 apresentamos os valores calculados dos IAEs referentes ao Teste 3. Particularmente foram calculados os índices de desempenho no exato momento da ocorrência do distúrbio $d(t)$ (tempo de simulação 80s) e nos 10s posteriores, a fim de avaliar o comportamento das respostas para cada uma das técnicas de controle abordadas. Especificamente tentamos avaliar a influência exercida de $d(t)$ sobre o rastreamento de $x_c(t)$, sobre a variação angular $\theta(t)$ e por fim o esforço de controle $u(t)$, exercido para rejeitar $d(t)$. Além disso, calculamos o t_s que demorou cada técnica em atingir novamente o sinal de referência assim como o M_φ experimentado. Para realizar o cálculo de t_s foi necessário utilizar um critério de desempenho do 1%. Essa particularidade é devido ao fato de $d(t)$ ser quase imperceptível no modo simulação para um critério do 5% e da intenção de obter uma métrica quantificável para realizar as comparações pertinentes. O critério do 1% só foi empregado no Teste 3 do modo simulação, nos outros testes realizados empregamos o critério do 5%.

Nesse contexto, na Tabela 8 é possível confirmar o rastreamento robusto apresentado por meio de todas as técnicas de controle investigadas, salvo a metodologia LQR (vide Figura 23b). Em sentido geral a técnica $H_2 - RT$ apresentou os melhores indicadores dinâmicos para os critérios IAE, ISE, ITAE e ITSE, bem como a melhor rejeição ao distúrbio $d(t)$. Em seguida o menor valor para o critério IQSC junto com os menores valores de M_φ e $\theta(t)$ foram evidenciados pela metodologia proposta $PI - H_2/H_\infty$. O menor t_s foi exibido pela técnica $RTDR$ e o menor valor de $u(t)$ foi obtido pela técnica LQR . Por fim conclui-se que todas as metodologias investigadas nesta prova apresentaram uma excelente rejeição ao distúrbio $d(t)$ tornando-se praticamente imperceptível a influência do mesmo sobre os sistemas de controle projetados, salvo a técnica LQR a qual apresentou um sinal de rastreamento muito ruim.

Tabela 8 – Índices de desempenho calculados para o Teste de simulação 3.

Controladores	$H_2 - RT$	$PI - H_2$	$PI - H_2/H_\infty$	$RTDR$	LQR
IAE	1.0077	1.2455	1.8384	1.2999	34.0029
ISE	0.5127	0.6247	1.0003	1.2527	123.7978
ITAE	81.8303	101.3573	150.5245	105.2141	2906.6
ITSE	41.5432	50.6186	81.4554	101.2252	10603.0
IQSC	5.2890×10^{-4}	7.5560×10^{-4}	4.1138×10^{-4}	0.0012	8.7510×10^{-4}
t_s [s]	2.3333s	2.8862s	4.0426	2.2922s	–
M_φ [%]	2.8895%	3.6363%	2.6743%	4.6905%	3.8097%
$\theta(t)$ [°]	$\pm 0.0402^\circ$	$\pm 0.0529^\circ$	$\pm 0.0380^\circ$	$\pm 0.0710^\circ$	$\pm 0.0585^\circ$
$u(t)$ [V]	$\pm 0.0636V$	$\pm 0.0622V$	$\pm 0.0622V$	$\pm 0.0734V$	$\pm 0.0531V$

Fonte: o autor

Em sentido geral, constata-se que nas três provas realizadas no modo simulação as técnicas de controle propostas neste trabalho $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$ assim como a técnica para uso comparativo $H_2 - RT$, apresentaram estabilidade robusta junto com as técnicas de controle moderno RTDR e LQR. Especificamente no Teste 3 a técnica LQR apresentou um desempenho irregular. Dessa maneira todas as metodologias abordadas apresentaram erro nulo em estado estacionário e um tempo de acomodação de $t_s \leq 5.6s$.

5.2 Avaliação dos Resultados Experimentais

A fim de avaliar experimentalmente as metodologias de controle investigadas neste trabalho foram realizadas os testes descritos na seção 4.6 em um IPS. Nesta seção apresentamos os resultados obtidos de maneira experimental para cada uma das metodologias de controle investigadas. Além disso, na subseção 5.2.4 será mostrado uma análise detalhada dos resultados alcançados.

5.2.1 Teste 1. Variação do sinal de referência considerando o sistema com massa mínima.

A fim de melhorar a análise comparativa dos resultados, cada uma das respostas experimentais obtidas neste estudo por meio das metodologias de controle abordadas foram plotadas individualmente. Particularmente, será possível avaliar os sinais de deslocamento linear $x_c(t)$, posição angular $\theta(t)$ e o sinal de controle $u(t)$ de forma individual. Os resultados conseguidos em relação a $x_c(t)$ para o primeiro teste experimental são apresentados através da Figura 26.

Com o propósito de melhorar a qualidade do análise da investigação a Figura 26 apresenta o comportamento do deslocamento linear $x_c(t)$ para cada um dos controladores discutidos na seção 4.7 em uma faixa de amostragem de 50s, conseguindo assim aprimorar o nível de detalhes dos resultados. Ao igual que na subseção 5.1.1 o sinal de referência envolvido nesta prova é de onda quadrada e gerado com um período de 100s. Posteriormente, na Figura 26 é possível verificar que a metodologia proposta $PI - H_2$, apresentou o melhor desempenho em relação ao rastreamento de $x_c(t)$ expondo os menores índices para os critérios IAE, ISE como mostra a Tabela 9 na subseção 5.2.4. Além disso, a metodologia proposta $PI - H_2/H_\infty$ também apresentou um excelente rastreamento com o menor valor para o critério ITAE bem como o menor tempo de acomodação $t_s = 5,2873s$. Nesse sentido as duas técnicas sendo propostas neste trabalho ($PI - H_2, PI - H_2/H_\infty$) atenderam o critério de desempenho previamente estabelecido para $t_s \leq 5,6s$, assim como erro nulo em regime permanente, $e(\infty) \cong 0$. Além disso, na Figura 26 é possível apreciar que a metodologia desenvolvida para uso comparativo $H_2 - RT$ apresentou um bom rastreamento do sinal de referência, contudo não atingiu o critério do 5% estabelecido para

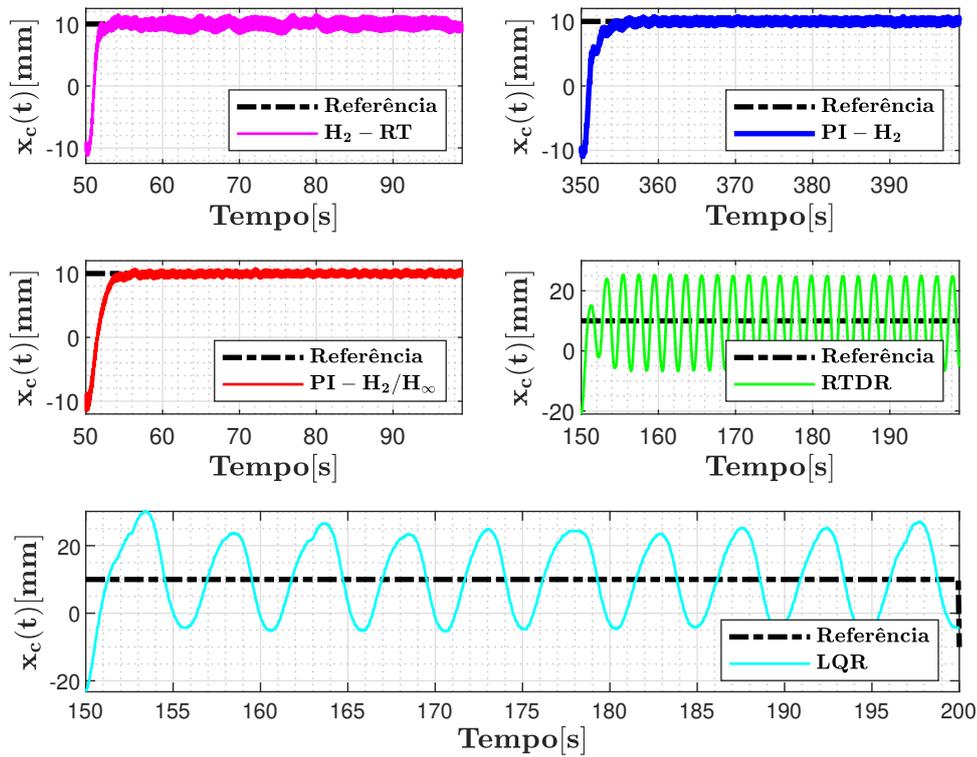


Figura 26 – Deslocamento linear $x_c(t)$ do sistema com massa mínima.

Fonte: o autor

o cálculo de t_s . A técnica $H_2 - RT$ só poderia ser recomendada para o Teste 1 se os critérios de desempenho fossem relaxados, isto é, estabelecer um critério de t_s para um 10% – 15%. Por fim, as metodologias RTDR e LQR, apresentam-se ineficaz no quesito de rastreamento do sinal de referência, apresentando ambas técnicas um rastreamento muito ruim, por meio de uma resposta transitória oscilatória. Característico de um sistema de segunda ordem não amortecido (O IPS é um sistema de ordem $n = 4$). Nesse contexto as técnicas de controle moderno RTDR e LQR não cumpriram os critérios de desempenho desejado.

Em sequência é exibida a Figura 27 com a finalidade de avaliar a posição angular $\theta(t)$ experimentada por cada uma das técnicas investigadas. Nesta Figura verifica-se que as duas técnicas de controle propostas $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$ junto com a técnica $H_2 - RT$ apresentaram pequenas e semelhantes variações angulares, entorno de $\pm 0.5273^\circ$. Não obstante a menor variação angular foi obtida pela técnica LQR com $\theta(t) = \pm 0.3516^\circ$.

Por fim, na Figura 28 são apresentados os sinais de controle empregados por cada uma das metodologias sendo avaliadas no Teste experimental 1. Inicialmente é verificado que a metodologia LQR apresentou o menor esforço de controle com $u(t) = \pm 0.8698V$. No entanto, dentre as restantes técnicas de controle que conseguirem apresentar um bom rastreamento ($PI - H_2$, $PI - H_2/H_\infty$ e $H_2 - RT$) a metodologia proposta $PI - H_2$

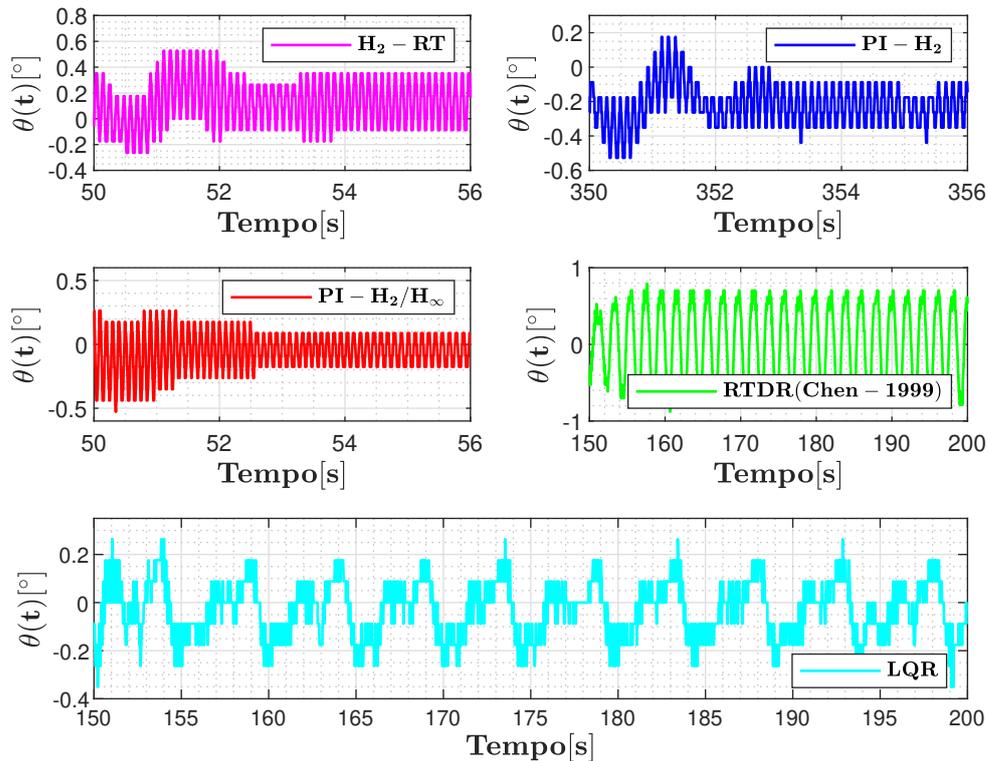


Figura 27 – Variação angular $\theta(t)$ do sistema com massa mínima.

Fonte: o autor

apresentou o menor valor de esforço de controle, em torno de $u(t) = \pm 1.4773V$. As outras duas metodologias investigadas $H_2 - RT$ e $PI - H_2/H_\infty$ evidenciaram um esforço de controle com $u(t) = \pm 2.3750V$ e $u(t) = \pm 2.7253V$, respectivamente.

Finalmente, nesta prova todas as metodologias de controle sendo propostas ($PI - H_2$, $PI - H_2/H_\infty$) obtiverem um desempenho satisfatório para o IPS com massa mínima. Notadamente a metodologia proposta $PI - H_2$ obtive o melhor rastreamento do sinal de referência por meio dos critérios IAE, ISE calculados. Além disso, a técnica de controle proposta $PI - H_2/H_\infty$ apresentou o menor valor do índice ITAE e o menor tempo de acomodação (vide Tabela 9 na subseção 5.2.4).

5.2.2 Teste 2. Variação do sinal de referência considerando o sistema com massa máxima.

Para a realização do segundo teste experimental foi levado em consideração o IPS com incertezas paramétricas conforme descrito na seção 4.6. O sistema foi submetido a uma variação na massa de aproximadamente 60% do valor nominal como apresentado na subseção 5.1.2 o que torna o experimento extremamente exigente para as metodologias de controle sendo investigadas. Em seguida, na Figura 29 são apresentados os resultados

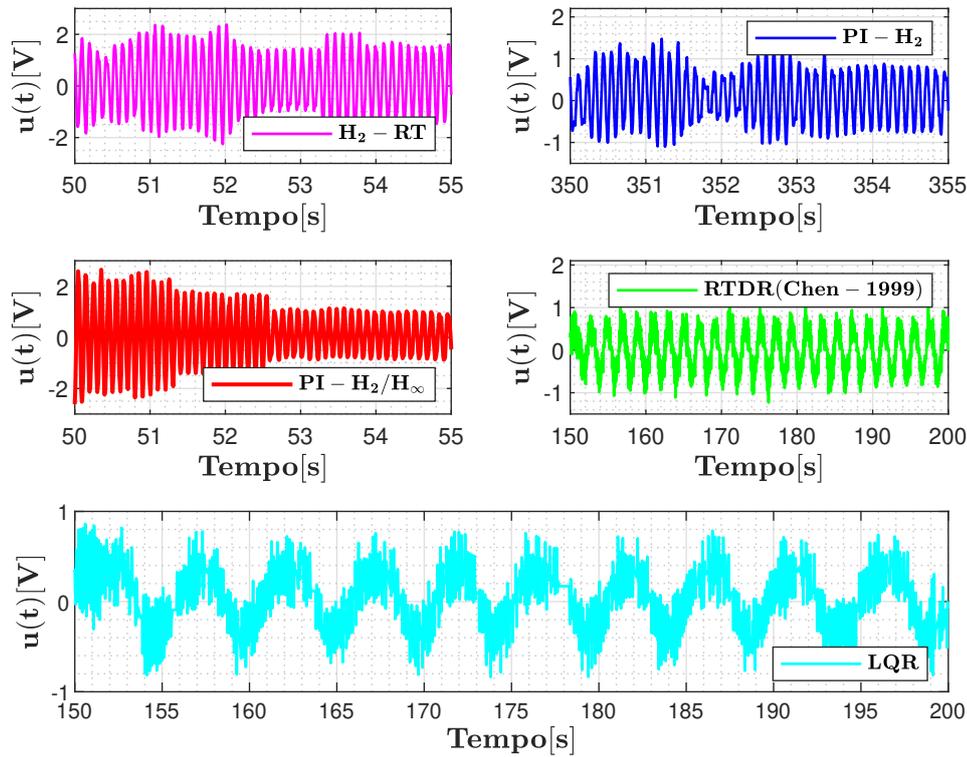


Figura 28 – Esforço de controle $u(t)$ do sistema com massa mínima.

Fonte: o autor

obtidos nesta prova para todas as respostas das metodologias de controle abordadas, em relação ao rastreamento do deslocamento linear $x_c(t)$. Na Figura 29 observa-se que todas as técnicas de controle apresentam degradação da sua resposta dinâmica no rastreamento do sinal de referência, como consequência da grande variação da massa no IPS. No entanto, todas as metodologias de controle sendo propostas ($PI - H_2$, $PI - H_2/H_\infty$) junto com a técnica $H_2 - RT$ apresentaram estabilidade robusta e as menores oscilações na sua resposta dinâmica, mantendo o IPS perfeitamente equilibrado através de uma variação angular mínima. Particularmente a metodologia de controle proposta $PI - H_2$ apresentou o melhor rastreamento do sinal de referência com os menores valores calculados para os critérios de desempenho (IAE, ISE, ITAE, ITSE e IQSC) conforme apresentado na Tabela 10.

A continuação são apresentadas as variações angulares $\theta(t)$, exibidas por meio da Figura 30 em relação a cada uma das metodologias de controle investigadas no segundo Teste experimental. Nesta prova a metodologia de controle proposta $PI - H_2$ evidenciou a menor variação angular quando comparada às outras técnicas abordadas, entorno de $\theta(t) = \pm 0.2637^\circ$. Nesse cenário, as outras duas metodologias $PI - H_2/H_\infty$ e $H_2 - RT$ também tiveram uma pequena variação angular com $\theta(t) = \pm 0.3516^\circ$ e $\theta(t) = \pm 0.4395^\circ$ respectivamente.

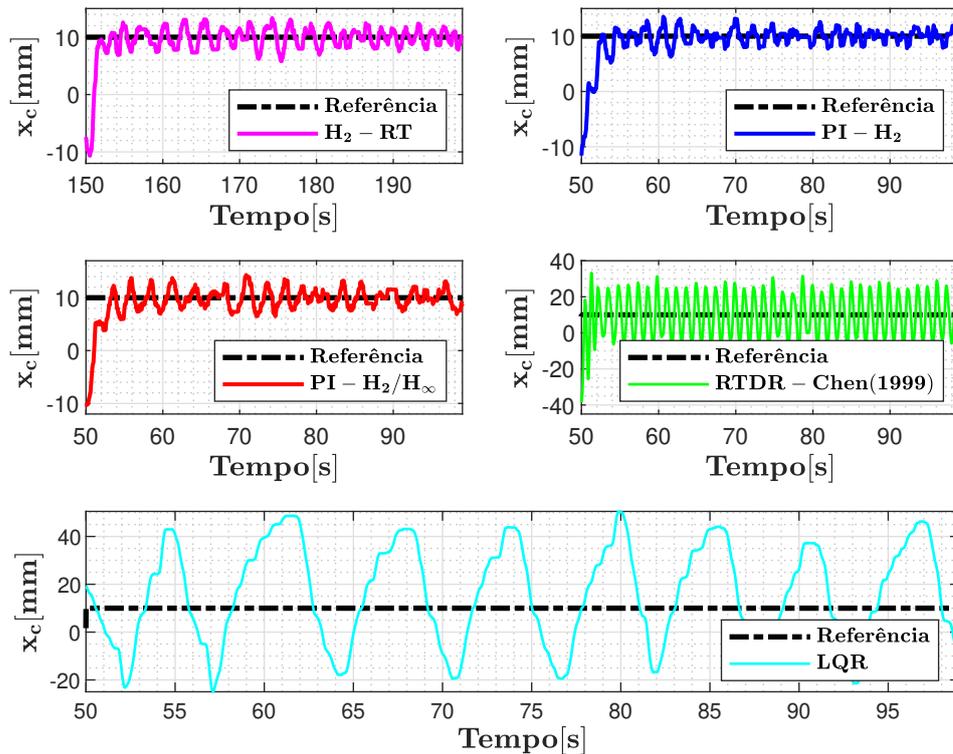


Figura 29 – Deslocamento linear $x_c(t)$ do sistema com massa máxima.

Fonte: o autor

Em seguida, na Figura 31 é avaliado o esforço de controle $u(t)$ experimentado na prova 2 por meio de todas as técnicas de controle investigadas. Nesta Figura apresentamos o comportamento de $u(t)$ em uma faixa de 50s no tempo de realização do experimento, objetivando visualizar graficamente o instante em que o maior $u(t)$ é atingido. A continuação na Figura 31, verifica-se que o menor esforço de controle é apresentado pela metodologia proposta $PI - H_2$, alcançando a menor variação com $u(t) = \pm 0.8496V$, conforme corroborado pela Tabela 10. Além disso, a metodologia para uso comparativo $H_2 - RT$ e a técnica proposta $PI - H_2/H_\infty$ apresentaram também um “pequeno” esforço de controle de $u(t) = \pm 0.9658V$ e $u(t) = \pm 1.1551V$ respectivamente. Por último, os esforços de controle experimentados na prova 2 pelas técnicas de controle propostas são considerados com “bons” ou “pequenos” quando comparados com a tensão de saturação do motor CC (atuador da planta) que é de 6V.

Finalmente, na prova experimental 2, todas as metodologias de controle sendo propostas ($PI - H_2, PI - H_2/H_\infty$) obtiverem estabilidade robusta, no entanto as técnicas de controle moderno RTDR e LQR mantiveram-se extremamente oscilantes típico do comportamento de sistemas não amortecidos, não sendo recomendado seu uso para esta prova em IPS. Por outro lado, a técnica de controle proposta $PI - H_2$ apresentou o melhor desempenho em quanto ao rastreamento do sinal de referência $x_c(t)$. Esta afirmação é

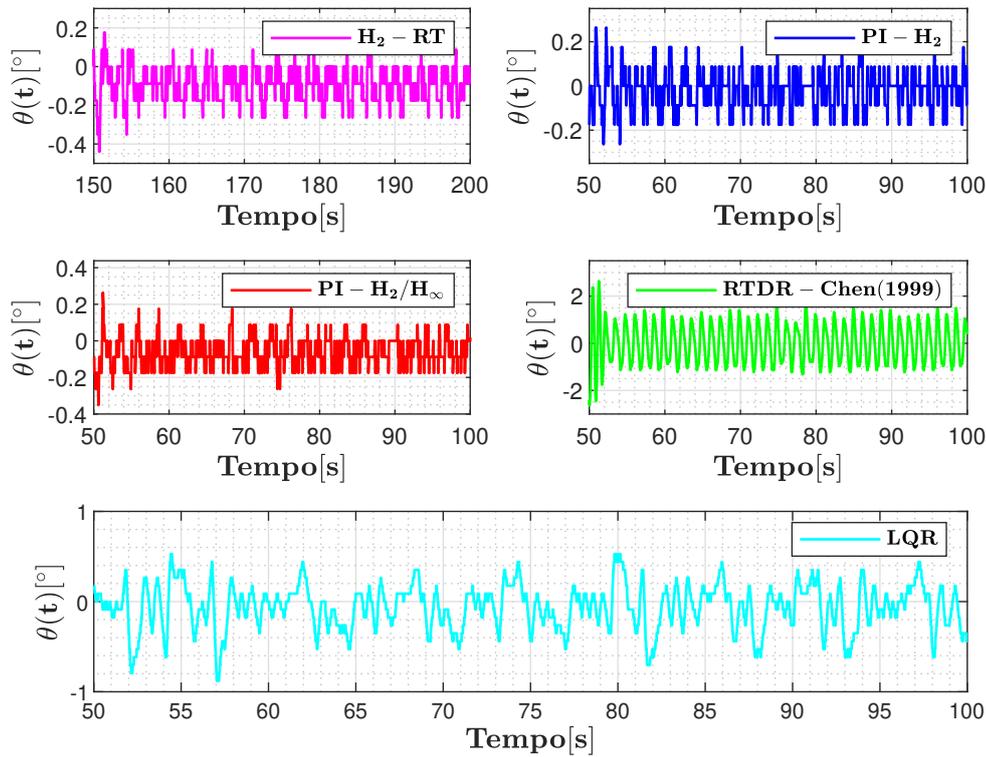


Figura 30 – Variação angular $\theta(t)$ do sistema com massa máxima.

Fonte: o autor

confirmada por meio dos critérios IAE, ISE, ITAE e ITSE calculados na Tabela 10. Nesse sentido, mesmo sem atingir o critério do 5% para o cálculo do t_s , a técnica $PI - H_2$ apresentou estabilidade robusta, manteve o pêndulo invertido perfeitamente equilibrado na posição vertical com a menor variação angular ($\theta(t) = \pm 0.2637$) dentre todas as técnicas avaliadas e obteve o menor esforço de controle $u(t) = \pm 0.8496V$.

5.2.3 Teste 3. Variação do sinal de referência considerando o distúrbio $d(t)$ e o sistema com massa máxima.

Com relação ao Teste 3, anteriormente desenvolvido via simulação na subseção 5.1.3 não obtivemos resultados diferentes aos apresentados na segunda prova da subseção 5.2.2. Nesse sentido apresentamos a Figura 32 e o deslocamento linear $x_c(t)$ para cada uma das técnicas de controle investigadas com massa máxima e em presença do distúrbio $d(t)$. Neste teste as respostas obtidas são similares aos apresentados no Teste 2, por isso não serão apresentados as variações angulares $\theta(t)$, nem o esforço de controle $u(t)$ nem os critérios de desempenho (IAE, ISE, ITAE, ITSE e IQSC) obtidos nesta prova. Os resultados apresentados na Figura 32 onde o distúrbio não exerce efeito sobre os sistemas de controle são em razão de diversos fatos como:

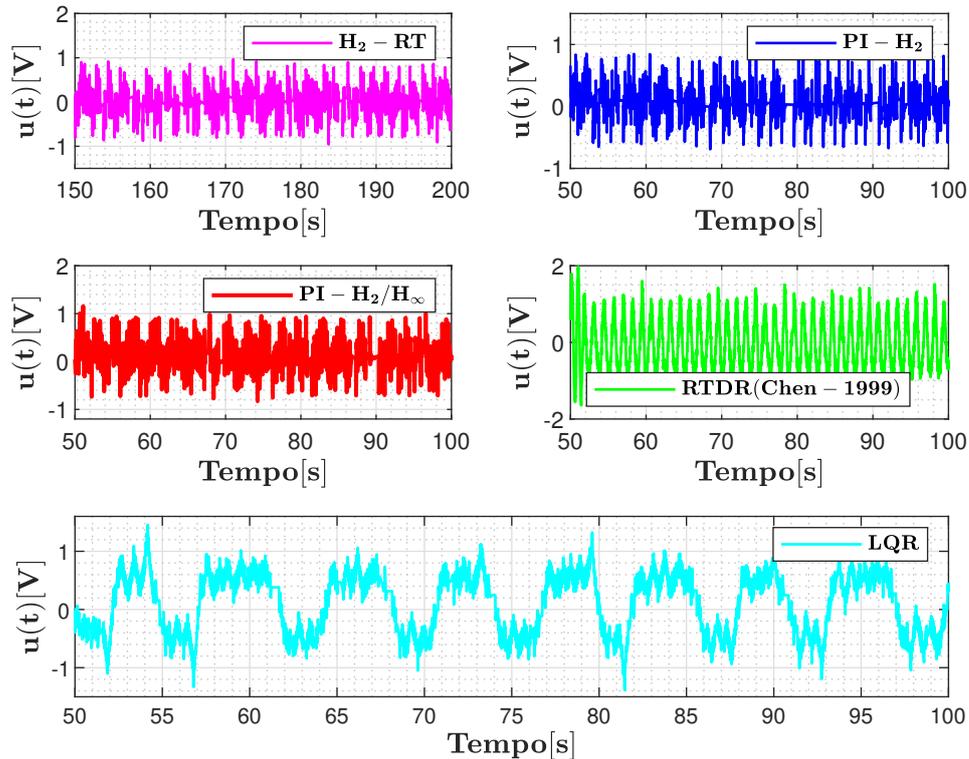


Figura 31 – Esforço de controle $u(t)$ do sistema com massa máxima.

Fonte: o autor

1. A dinâmica que dispõe a configuração do distúrbio $d(t)$ já está inserida na realização física da dinâmica do sistema de pêndulo invertido real. Uma forma de contornar essa problemática é propiciar um leve toque na haste do sistema uma vez esteja perfeitamente equilibrado ou uma força de oposição há trajetória da base móvel linear.
2. Outra maneira de reproduzir o distúrbio $d(t)$ seria por meio de uma tensão de alimentação diferente de $u(t)$ na entrada do sistema, como indicado na matriz B_w do diagrama de blocos da Figura 16.
3. Por último, poderíamos aumentar a intensidade do distúrbio $d(t)$ do tipo degrau, localizado na entrada da planta.

Nesse cenário não temos o equipamento necessário para atingir os itens mencionados acima, como são o uso de outro amplificador operacional para atingir o item(2), uma quantidade importante de fusíveis que permita realizar grandes e diversas variações na intensidade de $d(t)$ a fim de acertar qual magnitude do distúrbio seria a correta em termos da intensidade não levando o sistema à saturação (veja item(3)), evitando assim danificar o sistema. Por fim, não temos como garantir que a força do toque aplicado (veja o

item(1)) seja equivalente para todas as técnicas de controle sendo avaliadas, podendo quedar viciado em grande desvantagens ou incluso comprometido os resultados das técnicas de controle implementadas nesta prova. Diversos estudos tem sido desenvolvido afim de trabalhar com esta problemática, especialmente temos os trabalhos que empregam uma função de saturação não linear (GRIMM et al., 2003), (WEN et al., 2011) e (HE; DONG; SUN, 2016) conseguindo lidar com esta questão.

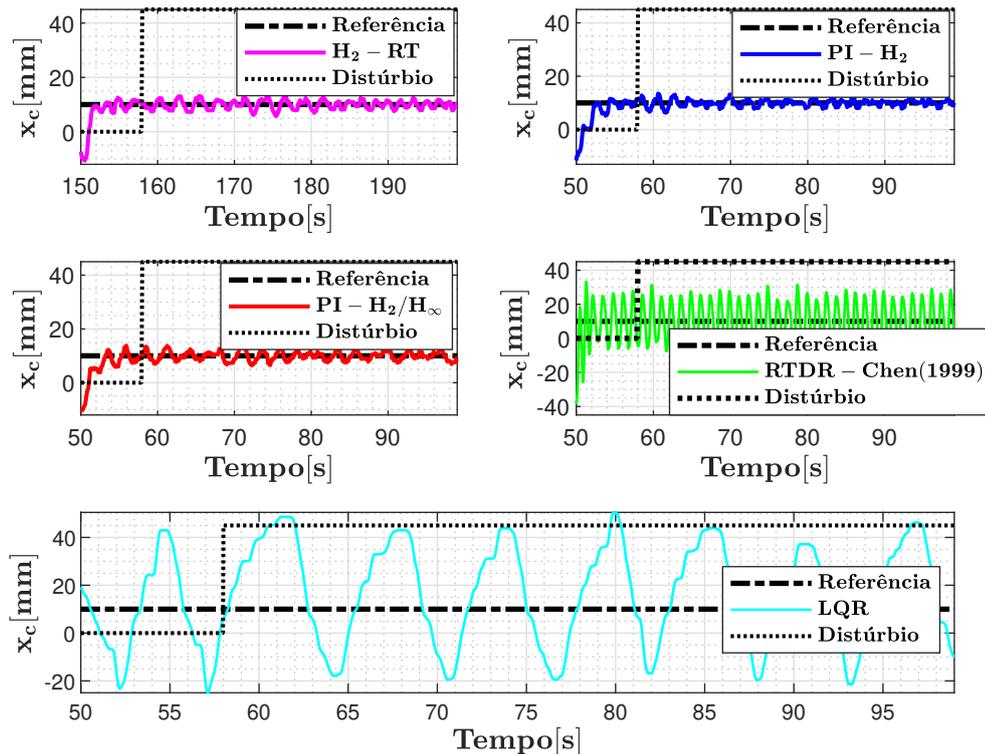


Figura 32 – Deslocamento linear $x_c(t)$ do sistema com massa máxima.

Fonte: o autor

5.2.4 Teste 4. Avaliação dos índices de desempenho integrais (IAE's) para os resultados experimentais.

Nesta seção são avaliados os índices de desempenho em relação aos Testes experimentais 1 e 2, apresentados acima. Os critérios de desempenho são descritos na seção 4.6 e foram calculados conforme apresentados na subseção 5.1.4. Particularmente, os índices de desempenhos calculados para o Teste 1 são sumarizados na Tabela 9.

Na Tabela 9 são mostrados os valores dos índices de desempenho obtidos para os critérios IAE, ISE, ITAE, ITSE e IQSC por cada uma das técnicas de controle sendo implementadas em um IPS. Nesta tabela são comprovados os resultados obtidos no experimento 1. Podendo corroborar que a técnica de controle proposta $PI - H_2$, apresentou

Tabela 9 – Índices de desempenho calculados para o Teste experimental 1.

Controladores	$H_2 - RT$	$PI - H_2$	$PI - H_2/H_\infty$	RTDR	LQR
IAE	54.3881	43.1756	50.7782	512.2436	504.6540
ISE	399.8711	379.8037	499.2879	6528.2	6360.9
ITAE	3546.5	15546.0	3000.9	89654.0	88048.0
ITSE	20896.0	133330.0	25540.0	1139600.0	1102600.0
IQSC	73.9514	16.2030	25.9295	9.4857	5.3693
$t_s[s]$	-	5.6013s	5.2873s	-	-
$M_\phi[\%]$	15.3351%	7.3731%	10.5579%	153.8738%	201.4182%
$\theta(t)[^\circ]$	$\pm 0.5273^\circ$	$\pm 0.5273^\circ$	$\pm 0.5273^\circ$	$\pm 0.8789^\circ$	$\pm 0.3516^\circ$
$u(t)[V]$	$\pm 2.3750V$	$\pm 1.4773V$	$\pm 2.7253V$	$\pm 1.2314V$	$\pm 0.8698V$

Fonte: o autor

os menores valores para os critérios IAE e ISE, assim como os menores valores de M_ϕ e $\theta(t)$, ratificando a precisão e eficácia da metodologia proposta em relação ao rastreamento do sinal de referência e uma pequena variação angular. Além disso a metodologia $PI - H_2$ apresentou o menor $u(t)$ dentre todas as técnicas que obtiveram um bom rastreamento nesta prova ($H_2 - RT$, $PI - H_2/H_\infty$). Em seguida, observa-se que a técnica proposta $PI - H_2/H_\infty$ apresentou o menor valor para o critério ITAE, bem como o menor t_s junto com a menor variação angular $\theta(t)$. Além disso, a técnica para uso comparativo $H_2 - RT$ experimentou o menor valor para o critério ITSE bem como o menor $\theta(t)$. Por fim, a metodologia de RTDR e LQR não apresentaram um desempenho satisfatório, mostrando uma resposta oscilatória nesta prova.

A continuação, é apresentada a Tabela 10 a qual é relacionada ao cálculo dos índices de desempenho para o Teste 2. Nesse contexto, na segunda coluna da Tabela 10 são ilustrados os menores valores dos índices de desempenho calculados, correspondentes à técnica de controle proposta $PI - H_2$, assim como o menor esforço de controle $u(t)$ e a menor variação angular $\theta(t)$, ratificando a eficácia e robustez da metodologia proposta neste estudo e corroborando os resultados apresentados na subseção 5.2.2. Em seguida, a metodologia $H_2 - RT$ obteve o menor M_ϕ , e junto com a técnica de controle proposta $PI - H_2/H_\infty$ atingiram um bom desempenho em relação aos parâmetros de variação angular $\theta(t)$ e esforço de controle $u(t)$. Conseguindo dessa maneira garantir a estabilidade robusta do sistema na presença de incertezas paramétricas. Finalmente, verifica-se na Tabela 10 que os controladores projetados pelas metodologias de controle moderno RTDR e LQR apresentaram uma resposta extremamente oscilatória, comprovando a análise dos resultados obtidos para o Teste 2 na subseção 5.2.2.

Tabela 10 – Índices de desempenho calculados para o Teste experimental 2.

Controladores	$H_2 - RT$	$PI - H_2$	$PI - H_2/H_\infty$	$RTDR$	LQR
IAE	87.5473	78.2666	95.3617	523.0451	946.4356
ISE	500.7419	461.9709	508.9175	7127.3	23825.0
ITAE	14726.0	5121.5	6467.4	38879.0	71243.0
ITSE	78117.0	25152.0	28949.0	517780.0	1791500
IQSC	3.4324	2.6709	4.2505	22.8021	13.8306
$t_s[s]$	-	-	-	-	-
$M_\varphi[\%]$	33.3065%	35.1264%	43.0883%	232.8112%	404.7902%
$\theta(t)[^\circ]$	$\pm 0.4395^\circ$	$\pm 0.2637^\circ$	$\pm 0.3516^\circ$	$\pm 2.6367^\circ$	$\pm 0.8789^\circ$
$u(t)[V]$	$\pm 0.9658V$	$\pm 0.8496V$	$\pm 1.1551V$	$\pm 1.9709V$	$\pm 1.4566V$

Fonte: o autor

5.3 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foram exibidos e discutidos detalhadamente os resultados obtidos neste trabalho de mestrado tanto via simulação como de maneira experimental. Para isso, foi empregado o software MATLAB® & SIMULINK®, o modelo linear e o modelo não linear do IPS. Inicialmente, foram avaliadas todas as metodologias de controle sendo investigadas para três possíveis situações, com o principal objetivo de analisar e comparar os resultados obtidos nas simulações e nos experimento sobre um IPS. Em sequência, foram calculados e discutidos os critérios de desempenho IAE, ISE, ITAE, ITSE e IQSC para cada técnica de controle abordada, em total correspondência com as provas realizadas a fim de poder avaliar quantitativamente o desempenho de cada metodologia de controle.

Conclusão

Neste trabalho é investigado experimentalmente uma metodologia de controle robusto utilizando uma estrutura de controle em cascata o qual leva em consideração conceitos de realimentação de estados e LMIs na malha interna do controlador proposto. Na malha externa de dito controlador, é levado em consideração a teoria de controle robusto paramétrico TCRP tendo como base o Teorema de Kharitonov. Como estudo de caso selecionou-se um sistema de pêndulo invertido simples com base móvel linear. Deste modo, uma série de testes foram conduzidos a fim de demonstrar que a metodologia proposta apresenta melhor desempenho dinâmico bem como garante a estabilidade robusta do sistema frente incertezas paramétricas. Além disso, foram desenvolvidos testes para averiguar a capacidade do sistema de rejeição de distúrbios do tipo degrau. Objetivando efetuar uma análise comparativa entre as estratégias de controle foram investigados um total de cinco técnicas de controle sendo duas estratégias fundamentadas na metodologia proposta identificadas como $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$, duas estratégias baseadas nas metodologias controle moderno com são RTDR proposto por (CHEN, 1999) e a técnica LQR (Vinodh Kumar; JEROME, 2013). Por fim, uma técnica de controle projetada via LMIs que combina a norma H_2 com o controlador moderno de RTDR é desenvolvida para uso comparativo, e identificada como $H_2 - RT$.

Nesta situação, a metodologia proposta é composta levando em consideração duas malhas de controle, sendo uma malha de controle interna e uma malha de controle externa. A malha de controle interna é elaborada mediante um projeto de controlador via realimentação de estados, fundamentado na teoria de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) de modo a garantir a estabilidade robusta do sistema frente incertezas paramétricas. Seguidamente, o controlador projetado para a malha externa é definido como um controlador com estrutura proporcional-integral (PI), de realimentação de saída com a finalidade de garantir erro nulo em regime permanente, bem como manter a estabilidade robusta previamente garantida pelo controlador da malha interna. Uma das principais contribuições deste estudo é a interligação das propriedades da metodologia de projeto de controle baseado em LMIs junto com as propriedades da metodologia de controle robusto

paramétrico (fundamentadas no Teorema de Kharitonov) as quais levam em consideração incertezas paramétricas e fazem uso das ferramentas de programação linear para resolver o problema de otimização como um problema de minimização.

Dessa maneira, observou-se através dos resultados conseguidos via simulação que quando um sistema de pêndulo invertido simples é submetido a incertezas paramétricas as cinco metodologias de controle investigadas geram um excelente comportamento da resposta dinâmica do sistema. Salvo na presença de distúrbios onde a técnica de controle moderno LQR não é recomendado seu uso para o caso de estudo. Entretanto, os controladores projetados pela metodologia proposta $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$, apresentaram um excelente desempenho dinâmico além de um alto grau de robustez junto com as técnicas de controle $H_2 - RT$ e RTDR conseguindo assim garantir a estabilidade do sistema mesmo na presença de incertezas paramétricas e distúrbios do tipo degrau inseridos no sistema. Os resultados de simulação mostram que a metodologia proposta obteve êxito em todos os testes realizados, apresentando um excelente desempenho frente incertezas paramétricas e na prova de rejeição ao distúrbio, cumprindo dessa forma com todos os objetivos de projeto previamente definidos nesta dissertação.

Por outra parte, nos resultados experimentais obtidos, verificou-se que as metodologias de controle sendo propostas $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$ apresentaram uma excelente resposta dinâmica em relação ao desempenho robusto exibido através do rastreamento do deslocamento linear experimentado. Garantindo dessa forma a estabilidade robusta do sistema frente a variações paramétricas e rejeição ao distúrbio ao qual o sistema foi submetido. Particularmente as técnicas propostas $PI - H_2$ e $PI - H_2/H_\infty$ conseguiram um excelente rastreamento no primeiro teste experimental através dos menores valores obtidos nos índices de desempenho IAE, ISE, ITAE. Nesse contexto, ambas técnicas atingiram todos os critérios de projeto previamente especificados conseguindo atingir erro nulo em regime permanente e obtendo um $t_s \leq 5.6s$. Ademais apresentaram uma variação angular mínima de $\theta(t) \leq 0.55^\circ$, assim como um $u(t)$ relativamente pequeno. Na sequência, no segundo teste experimental a metodologia de controle proposta $PI - H_2$ obteve os melhores índices de desempenho para todos os critérios sendo avaliados (IAE, ISE e ITAE, ITSE, IQSC). Além de que, apresentou os menores valores de variação angular $\theta(t)$ e o menor esforço de controle $u(t)$ dentre todas as técnicas de controle. Por fim, ambas técnicas de controle são altamente recomendadas para sua aplicação em um IPS fundamentado nos resultados obtidos neste trabalho de mestrado.

É oportuno ressaltar que algumas diferenças entre os testes experimentais e simulados, podem ser observadas, estas diferenças são fundamentalmente provenientes de ruídos, e desconsideração de diversas não linearidades (não modeladas) presentes no sistema real. Alguns dos possíveis motivos para explicar essas discrepâncias incluem:

1. Ruído introduzido pela diferenciação entre o ângulo do pêndulo e o sinal de posição da base móvel;

2. Atraso introduzido pela filtragem passa-baixa da velocidade angular do pêndulo e o sinal de velocidade da base móvel;
3. Aproximações na modelagem e incertezas nos valores dos parâmetros do modelo matemático;
4. Efeito da fricção de Coulomb na base móvel;
5. Efeito de fixação;
6. Efeitos mecânicos na cremalheira e folga da engrenagem;
7. Base móvel não nivelada corretamente

Em vista disso, afirmou-se que o objetivo geral deste trabalho foi atingido de forma satisfatória considerando que os resultados via simulação empregando o modelo não linear do IPS, e os resultados experimentais, ratificaram que a metodologia de controle robusto desenvolvida neste trabalho demonstrou um melhor desempenho dinâmico, quando comparado com as outras metodologias, mesmo na presença de incertezas paramétricas na massa do sistema. Deste modo, conclui-se que os objetivos gerais e específicos para esta pesquisa foram alcançados de maneira exitosa.

6.1 Trabalhos Futuros

Nesta seção são apresentadas algumas recomendações para a continuação da pesquisa relacionada ao tema desenvolvida neste estudo:

1. Avaliação da implementação da metodologia de controle proposta aplicado a um sistema real estável e rápido, objetivando avaliar a margem de estabilidade alcançada nesta condição;
2. Projetar um controlador de estrutura PI na malha externa, levando em consideração erros na medição dos sensores;
3. Aplicação de metodologias de projeto de controladores baseado em dados aplicado ao problema de rastreamento do sistema de pêndulo invertido;
4. Extensão do emprego da metodologia de controle proposta para casos multivariáveis;

6.2 Contribuições em Produção Bibliográfica

1. C. C. das N. das Neves, R. L. P. de Medeiros, W. B. J. Barra Junior, F. A. de C. A. J. Ayres Junior, F. K. Y. Yoshino, y A. E. Gonzalez Barreda, “**Evaluación experimental del rendimiento de los controladores Fuzzy aplicados en un sistema fotovoltaico autónomo**”, DYNA, vol. 86, n.º 211, pp. 354–362, oct. 2019.

Referências

- AGUIRRE, L. A. Desigualdades matriciais lineares em controle,. In: _____. **Enciclopédia de Automática: controle e automação volume 1**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2007. cap. 7, p. 155–195.
- AKHTARUZZAMAN, M.; SHAFIE, A. A. Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods, comparative assessment and result analysis. In: **2010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1342–1347.
- ANDERSON, C. Learning to control an inverted pendulum using neural networks. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 9, n. 3, p. 31–37, 1989.
- APKARIAN, J.; LACHERAY, H.; MARTIN, P. **IP02 INVERTED PENDULUM Workbook - Student Version**. Markham, Ontario, Canada, 2012. Disponível em: <<https://www.quanser.com/products/linear-servo-base-unit-inverted-pendulum/>>.
- ASTROM, K. J.; HAGGLUND, T. Control paradigms. In: _____. **PID Controllers: Theory, Design, and Tuning**. 2. ed. NC, USA: Instrument Society of America, 1995. cap. 7.2, p. 273–322.
- BARMISH, B. A generalization of kharitonov’s four-polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations. **IEEE Trans. Autom. Control**, v. 34, n. 2, p. 157–165, 1989.
- BARMISH, B. R. The spark: Kharitonov’s theorem. In: _____. **New Tools for Robustness of Liner Systems**. 1. ed. New York, NY, USA: Macmillan, 1994. cap. 5.2, p. 65–85.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P.; GEROMEL, J. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems Control Letters**, v. 13, n. 1, p. 65–72, 1989.
- BHATTACHARYYA, S. P.; DATTA, A.; KEEL, L. H. **Linear Control Theory: structure, robustness, and optimization**. 1. ed. New York, NY, USA: CRC Press Taylor & Francis Group, 2009.
- BOUBAKER, O. The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: A survey. **International Journal of Advanced Robotic Systems**, v. 10, n. 5, p. 233, 2013.

- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory**. 1. ed. Philadelphia: SIAM, 1994.
- CHAPELLAT, H.; BHATTACHARYYA, S. A generalization of kharitonov's theorem; robust stability of interval plants. **IEEE Trans. Autom. Control**, v. 34, n. 3, p. 306–311, 1989.
- CHEN, C. T. **Linear System Theory and Design**. 3. ed. New York, NY, USA: Oxford University Press, 1999.
- DELIBASI, A.; KUCUKDEMIRAL, I. B.; CANSEVER, G. A robust pid like state-feedback control via lmi approach: An application on a double inverted pendulum system. In: **2007 International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 374–379.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern Control Systems**. 12. ed. New Jersey, NJ, USA: Pearson, 2011.
- _____. The performance of feedback control systems. In: _____. **Modern Control Systems**. 12. ed. New Jersey, NJ, USA: Pearson, 2011. cap. 5.7, p. 330–339.
- FANTONI, I.; LOZANO, R. The cart-pole system. In: _____. **Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems**. 1. ed. London, England: Springer-Verlag, 2002. cap. 3.2, p. 23–27.
- GRAHAM, D.; LATHROP, R. C. The synthesis of "optimum" transient response: Criteria and standard forms. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry**, v. 72, n. 5, p. 273–288, 1953.
- GRIMM, G. et al. Antiwindup for stable linear systems with input saturation: an lmi-based synthesis. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 48, n. 9, p. 1509–1525, 2003.
- HASAN, N. et al. Modeling and simulation of the inverted pendulum control system. In: **The 27th Chinese Control and Decision Conference (2015 CCDC)**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 548–552.
- HE, W.; DONG, Y.; SUN, C. Adaptive neural impedance control of a robotic manipulator with input saturation. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems**, v. 46, n. 3, p. 334–344, 2016.
- JADLOVSKÁ, S.; SARNOVSKÝ, J. Classical double inverted pendulum — a complex overview of a system. In: **2012 IEEE 10th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMII)**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 103–108.
- JADLOVSKÝ, S.; SARNOVSKÝ, J. Modelling of classical and rotary inverted pendulum systems – a generalized approach. **Journal of Electrical Engineering**, v. 64, n. 1, p. 12–19, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.2478/jee-2013-0002>>.
- JBILOU, K.; MESSAOUDI, A.; TABAÛ, K. Some schur complement identities and applications to matrix extrapolation methods. **Linear Algebra and its Applications**, v. 392, p. 195–210, 2004.

- KANADA, T.; WATANABE, Y.; CHEN, G. Robust h_2 control for two-wheeled inverted pendulum using lego mindstorms. In: **2011 Australian Control Conference**. [S.l.: s.n.], 2011. p. 136–141.
- KEEL, L.; BHATTACHARYYA, S. A linear programming approach to controller design. In: **Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.: s.n.], 1997. v. 3, p. 2139–2148 vol.3.
- _____. Robust, fragile, or optimal? **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 42, n. 8, p. 1098–1105, 1997.
- _____. Robust stability and performance with fixed-order controllers. **Automatica**, v. 35, n. 10, p. 1717–1724, 1999.
- LUCAS-MARCILLO, K. E. et al. Novel robust methodology for controller design aiming to ensure dc microgrid stability under cpl power variation. **IEEE Access**, v. 7, p. 64206–64222, 2019.
- LUNDBERG, K.; ROBERGE, J. Classical dual-inverted-pendulum control. In: **42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475)**. [S.l.: s.n.], 2003. v. 5, p. 4399–4404 Vol.5.
- MEDEIROS, R. L. P. de et al. Robust decentralized controller for minimizing coupling effect in single inductor multiple output dc-dc converter operating in continuous conduction mode. **ISA Transactions**, v. 73, p. 112–129, 2018.
- MINOUCHEHR, N. et al. Lmi-based robust constrained model predictive control of two-wheeled inverted pendulum. In: **2015 International Congress on Technology, Communication and Knowledge (ICTCK)**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 130–136.
- OGATA, K. Mathematical modeling of mechanical systems and electrical systems. In: _____. **Modern Control Engineering**. 5. ed. NY, USA: Prentice Hall, 2010. cap. 3.2, p. 68–70.
- PALHARES, R.; TAKAHASHI, R.; PERES, P. \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 guaranteed costs computation for uncertain linear systems. **Int. J. Syst. Sci.**, v. 28, p. 183–188, 02 1997.
- PATHAK, K.; FRANCH, J.; AGRAWAL, S. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 21, n. 3, p. 505–513, 2005.
- QIAN, Q. et al. Stabilization of the double inverted pendulum based on discrete-time model predictive control. In: **2011 IEEE International Conference on Automation and Logistics (ICAL)**. [S.l.: s.n.], 2011. p. 243–247.
- SARI, Y.; KOKER, R.; BOZ, A. F. Improved optimal controller designs for all pole systems and standard forms with one/two variable zeroes. **Elektronika ir Elektrotechnika**, v. 20, n. 2, p. 3–10, Jan. 2014. Disponível em: <<https://eejournal.ktu.lt/index.php/elt/article/view/4135>>.
- SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 42, n. 7, p. 896–911, 1997.

- SCHULTZ, W. C.; RIDEOUT, V. C. Control system performance measures: Past, present, and future. **IRE Transactions on Automatic Control**, AC-6, n. 1, p. 22–35, 1961.
- SUGIHARA, T.; NAKAMURA, Y.; INOUE, H. Real-time humanoid motion generation through zmp manipulation based on inverted pendulum control. In: **Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.02CH37292)**. [S.l.: s.n.], 2002. v. 2, p. 1404–1409 vol.2.
- TANAKA, R. et al. Controller design approach based on linear programming. **ISA Transactions**, v. 52, n. 6, p. 744–751, 2013.
- Vinodh Kumar, E.; JEROME, J. Robust lqr controller design for stabilizing and trajectory tracking of inverted pendulum. **Procedia Engineering**, v. 64, p. 169–178, 2013.
- WASZAK, M.; LANGOWSKI, R. An automatic self-tuning control system design for an inverted pendulum. **IEEE Access**, v. 8, p. 26726–26738, 2020.
- WEN, C. et al. Robust adaptive control of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation and external disturbance. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 56, n. 7, p. 1672–1678, 2011.
- YOULA, D.; BONGIORNO, J.; JABR, H. Modern wiener-hopf design of optimal controllers part i: The single-input-output case. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 21, n. 1, p. 3–13, 1976.
- YOULA, D.; JABR, H.; BONGIORNO, J. Modern wiener-hopf design of optimal controllers—part ii: The multivariable case. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 21, n. 3, p. 319–338, 1976.
- ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 26, n. 2, p. 301–320, 1981.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. 1. ed. New Jersey, NJ, USA: Prentice Hall, 1995.