

Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

*Estimativas de autovalores para o operador de Cheng-Yau
deformado sobre domínios limitados em variedades
Cartan-Hadamard pinçadas.*

Júlio César Marinho da Fonseca

Manaus-AM
Maio/2022

*Estimativas de autovalores para o operador de Cheng-Yau
deformado sobre domínios limitados em variedades
Cartan-Hadamard pinçadas.*

por
Júlio César Marinho da Fonseca

sob orientação do
Professor Dr. José Nazareno Vieira Gomes

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em
Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM,
como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Manaus-AM
Maio/2022

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

F676e Fonseca, Júlio César Marinho da
Estimativas de autovalores para o operador de Cheng-Yau
deformado sobre domínios limitados em variedades Cartan-
Hadamard pinçadas. / Júlio César Marinho da Fonseca . 2022
52 f.: il.; 31 cm.

Orientador: José Nazareno Vieira Gomes
Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do
Amazonas.

1. Estimativas de autovalores. 2. Operadores elípticos. 3. Gap
fundamental. 4. Laplaciano. I. Gomes, José Nazareno Vieira. II.
Universidade Federal do Amazonas III. Título

Estimativas de autovalores para o operador de Cheng-Yau deformado sobre domínios limitados em variedades Cartan-Hadamard pinçadas.

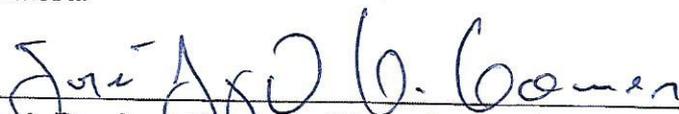
Júlio César Marinho da Fonseca

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

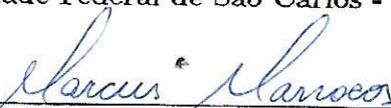
Área de concentração: Geometria.

Manaus, 05 de maio de 2022.

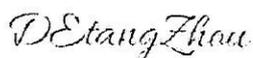
Banca Examinadora:



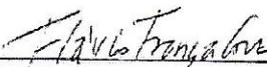
Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (Orientador)
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar



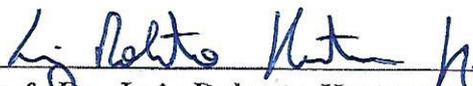
Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos (Membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM



Prof. Dr. Detang Zhou (Membro Externo)
Universidade Federal Fluminense - UFF



Prof. Dr. Flávio França Cruz (Membro Externo)
Universidade Regional do Cariri - URCA



Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior (Membro Externo)
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida, por nos ter concedido saúde e ter dado livramento nesse período de pandemia que estamos atravessando;

Agradeço aos meus pais Rocilda Marinho da Fonseca e Belmiro Cidade da Fonseca, in memoriam, pela minha criação e formação como pessoa e apesar das dificuldades ter me mantido no caminho da educação.

Aos meus filhos Beatriz e Gustavo e minha esposa Angela de Albuquerque Nunes, pelo apoio e compreensão durante esses anos de Doutorado os quais as viagens até Manaus foram constantes, agradeço pelo apoio e encorajamento para concluir mais essa etapa.

À meus irmãos pelo carinho, incentivo e apoio, em especial a minha irmã Elaine Cristina, que me abrigou em Manaus durante o doutorado.

A todos meus colegas e amigos de doutorado. Em especial a Andrea, Abraão, Adrian, Claudeilson, Clebes, Cristiano, Edson, João Felipe, Mario Campo Verde, Leonardo da Silva Brito e Mateus, pela grande generosidade e parceria e apoio, principalmente nos estudos. Aprendi muito com vocês.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes, por sua orientação e suas sugestões e correções sempre precisas, por ter acreditado neste trabalho e por todo encorajamento mesmo nos tempos difíceis da pandemia.

Ao Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos por suas importantes observações e sugestões.

Aos professores da Pós-Graduação em matemática da UFAM que, direta ou indiretamente, foram importantes no decorrer dos excelentes cursos que fiz no doutorado.

Aos Departamento de Matemática do Centro de Estudos Superiores de Parintins, pelo valioso apoio durante essa jornada acadêmica;

Aos membros da banca pela disponibilidade e sugestões para versão final desta Tese.

Resumo

Nesta tese, mostramos como uma fórmula tipo Bochner pode ser usada para estabelecer desigualdades universais para os autovalores de um operador de Cheng-Yau deformado em um domínio limitado com a condição de fronteira de Dirichlet em uma variedade de Cartan-Hadamard pinçada. No primeiro teorema, o caso do espaço hiperbólico é tratado de forma independente. Para uma configuração mais geral, primeiro estabelecemos um teorema de comparação de Rauch para o operador de Cheng-Yau e duas estimativas associadas à fórmula tipo Bochner para esse operador. Em seguida, obtemos algumas estimativas integrais de interesse independente. Como aplicação, calculamos nossas desigualdades universais. Em particular, obtemos as desigualdades correspondentes tanto para o caso do operador de Cheng-Yau quanto para o caso do Laplaciano deformado, e recuperamos as desigualdades conhecidas para o Laplaciano. Também obtemos um resultado de rigidez para um operador de Cheng-Yau em uma classe de domínios anulares limitados de uma variedade de Cartan-Hadamard pinçada. Em particular, podemos usar, por exemplo, a função potencial do soliton Gaussiano shrinking para obter tal rigidez para o caso do espaço Euclidiano. Além disso, calculamos uma estimativa para o gap fundamental de uma classe de operadores diferenciais elípticos de segunda ordem definidos sobre uma família de domínios convexos no espaço Hiperbólico bidimensional.

Palavras-chave: Estimativas de autovalores; Operadores elípticos; Gap fundamental; Laplaciano.

Abstract

In this thesis, we show how a Bochner type formula can be used to establish universal inequalities for the eigenvalues of the special case drifted Cheng-Yau operator on a bounded domain in a pinched Cartan-Hadamard manifold with the Dirichlet boundary condition. In the first theorem, the hyperbolic space case is treated in an independent way. For the more general setting, we first establish a Rauch comparison theorem for the Cheng-Yau operator and two estimates associated with the Bochner type formula for this operator. Next, we get some integral estimates of independent interest. As an application, we compute our universal inequalities. In particular, we obtain the corresponding inequalities for both Cheng-Yau operator and drifted Laplacian cases, and we recover the known inequalities for the Laplacian case. We also obtain a rigidity result for a Cheng-Yau operator on a class of bounded annular domains in a pinched Cartan-Hadamard manifold. In particular, we can use, e.g., the potential function of the Gaussian shrinking soliton to obtain such a rigidity for the Euclidean space case. Moreover, we compute the fundamental gap of a class of second-order elliptical differential operators defined on a family of convex domains in the hyperbolic plane.

Keywords: Eigenvalue estimates; Elliptic Operators; Fundamental gap; Laplacian.

Conteúdo

1	Preliminares	7
1.1	Operadores Diferenciais	7
1.2	Alguns conceitos sobre Tensores	8
1.3	Tensores e os Operadores Diferenciais	9
1.4	Operador elíptico de segunda ordem na forma divergente	11
1.5	Conceitos básicos sobre uma equação diferencial parcial elíptica na forma divergente	12
1.6	Caracterização variacional dos autovalores	13
1.7	Tensores livres de divergência	16
1.8	Geodésicas e a aplicação exponencial	17
1.9	Campos de Jacobi	18
1.10	Teorema da comparação de Sturm	19
1.11	Variedades Cartan-Hadamard	19
1.12	Função distância	20
2	Estimativas de autovalores para o operador de Cheng-Yau deformado sobre domínios limitados em variedades Cartan-Hadamard pinçadas.	22
2.1	Resultados Auxiliares	22
2.2	Prova dos Teoremas 2.1 e 2.2	28
2.3	Aplicações do Teorema 2.1	31
3	O gap fundamental para uma família especial de operadores de segunda ordem na forma divergente em um domínio convexo no espaço hiperbólico	34
3.1	A identificação dos primeiros dois autovalores.	37
3.2	Estimativas sobre o primeiro e segundo autovalores.	37
3.3	Estimativa do diâmetro por Bourni et al.	39
3.4	Estimativa do gap fundamental.	39
4	Considerações finais	44

Introdução

Nesta tese M^n , $n \geq 2$, é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e com curvaturas seccionais satisfazendo $-\kappa_1^2 \leq K \leq -\kappa_2^2$, tal que $0 \leq \kappa_2 \leq \kappa_1$ são constantes. Essa variedade ficou conhecida como variedade Cartan-Hadamard pinçada após o teorema de Cartan-Hadamard. O teorema afirma que uma variedade Riemanniana completa simplesmente conexa com curvatura seccional não positiva é difeomorfa um espaço Euclidiano. As duas principais propriedades nas variedades Cartan-Hadamard são que quaisquer dois pontos em M^n estão em uma única geodésica, e que as funções distâncias são suaves em quase todo ponto e são convexas, ver, por exemplo, Bishop e O'Neill [9] ou o livro de Petersen [48]. Vamos considerar $\Omega \subset M^n$ um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$. Seja T um $(1, 1)$ -tensor simétrico positivo definido em M^n , e η uma função suave em M^n . Segue da limitação de Ω que existem duas constantes positivas ε e δ tal que $\varepsilon \leq \langle TX, X \rangle \leq \delta$ para qualquer campo de vetores unitários X sobre Ω .

Nesta tese, estudaremos o problema de autovalor com a condição de fronteira de Dirichlet, ou seja,

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

em que

$$\mathcal{L}u = \operatorname{div}(T(\nabla u)) - \langle \nabla \eta, T(\nabla u) \rangle. \quad (2)$$

Aqui, os operadores termos div e ∇ representam, respectivamente a divergência de campos vetoriais suaves e o gradiente de funções suaves.

Esta tese está dividida em três partes: Na primeira parte estabeleceremos as notações utilizadas ao longo do texto e recordaremos conceitos, funções e propriedades das variedades Cartan-Hadamard, além disso, discutiremos alguns conceitos Tensoriais associados ao operador \mathcal{L} e que embasam os resultados da tese.

Em 1977, Cheng e Yau [21] introduziram o seguinte operador

$$\square f := \operatorname{tr}(\nabla^2 f \circ T) = \langle \nabla^2 f, T \rangle, \quad (3)$$

em que $\nabla^2 f$ é a Hessiana da função suave f sobre M^n . Posteriormente, Gomes e Miranda [27] mostraram que a equação (2) pode ser decomposta na η -divergência de T e no operador de Cheng-Yau:

$$\mathcal{L}f = \square f + \langle \operatorname{div}_\eta T, \nabla f \rangle, \quad (4)$$

em que $\operatorname{div}_\eta T := \operatorname{div}T - \langle \nabla \eta, T(\cdot) \rangle$ e $\operatorname{div}T$ denota o tensor divergência de T .

Para variedades Riemannianas compactas orientáveis, Cheng e Yau [21], provaram que o operador \square é auto-adjunto se, e somente se, T é livre de divergência, ou seja, $\operatorname{div}T = 0$. Neste caso, a equação (4) torna-se

$$\mathcal{L}f = \square f - \langle \nabla \eta, T(\nabla f) \rangle, \quad (5)$$

que é uma perturbação de primeira ordem do *operador de Cheng-Yau*. Nós vamos nos referir à equação (5) como um operador de Cheng-Yau deformado com função deformadora η . Em particular, se η é constante, então $\square f$ é um operador de Cheng-Yau com $\operatorname{div} T = 0$.

Por exemplo, se Ricci denota o tensor de Ricci de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $R = \operatorname{tr}(\operatorname{Ric})$, sabemos que $\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{dR}{2}$ e $\operatorname{div}(RI) = dR$, então o tensor de Einstein $G := \operatorname{Ric} - \frac{R}{2}I$ é livre de divergência, portanto $\square f = \langle \nabla^2 f, G \rangle$ é auto-adjunto sobre variedades Riemannianas compactas, e o operador de Cheng-Yau deformado, $\mathcal{L}f = \langle \nabla^2 f, G \rangle - \langle \nabla \eta, G(\nabla f) \rangle$ é esperado para ter aplicações em física, ver, e.g., Serre [53]. Destacamos que o trabalho de Serre lida com tensores simétricos positivos definidos livres de divergência e dinâmica de fluidos, onde o leitor pode encontrar exemplos e saber onde ocorrem esses tensores.

Ainda no Capítulo 1, listamos alguns exemplos geométricos de tais tensores. Indicamos ao leitor a Proposição 5.1 em [2] ou Navarro [45] para mais discussões relacionadas.

Alencar, Neto e Zhou [2] mostraram uma fórmula tipo Bochner para o operador de Cheng-Yau, que posteriormente foi estendida para a expressão mais geral do operador \mathcal{L} por Gomes e Miranda em [27]. Eles observaram que \mathcal{L} é auto-adjunto no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_0^1(\Omega, e^{-\eta} \operatorname{dvol}_\Omega)$. É sabido que a técnica de Bochner exhibe muitos limites ótimos na topologia das variedades Riemannianas compactas com curvatura não negativa. Em contraste, mostramos como uma fórmula tipo Bochner pode ser utilizada para estabelecer desigualdades universais para os autovalores do operador de Cheng-Yau deformado em domínios limitados de uma variedade Cartan-Hadamard pinçada. Esta é uma abordagem simples que ainda não foi usada para este operador.

No Capítulo 2, primeiramente estabelecemos um teorema da comparação de Rauch para o operador de Cheng-Yau e duas desigualdades associadas à fórmula tipo Bochner para este operador, veja a Proposição 2.1. Em seguida, obtemos algumas estimativas integrais de interesse independente, consulte as Proposições 2.2 e 2.3. Como uma aplicação, calculamos nossas desigualdades principais.

Ainda no Capítulo 2, apresentamos as demonstrações e aplicações para os principais teoremas da tese, para tanto iniciamos considerando $\mathbb{H}^n(-1)$ o espaço hiperbólico com curvatura constante -1 , a saber, o semi-espaço aberto $x_n > 0$ com sua métrica padrão $g_{ij} = x_n^{-2} \delta_{ij}$. Observamos que $r(x_1, \dots, x_n) = \ln x_n$ trabalha como uma função distância em $\mathbb{H}^n(-1)$. Esse fato motivou o primeiro teorema da tese no qual provamos uma desigualdade quadrática universal para os autovalores de \mathcal{L} em um domínio limitado qualquer do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ com curvatura constante $-\kappa^2$ no modelo do semi-espaço superior.

No que se segue, uma função suave f é chamada radialmente constante se a derivada radial é nula: $\partial_r f = 0$, onde r é uma função distância.

Teorema 1. *Seja λ_i o i -ésimo autovalor de \mathcal{L} em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ com a condição de fronteira de Dirichlet. Se a função deformadora η é radialmente constante e $T(\nabla \ln x_n) = \psi \nabla \ln x_n$, para alguma função radialmente constante ψ . Então, para qualquer número inteiro positivo k , temos*

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - (n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa^2 \right).$$

Além disso, o primeiro autovalor satisfaz $\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\varepsilon}{4\delta^2} (n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa^2$.

Tomando T para ser o operador identidade I sobre $\mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$ no Teorema 1 obtemos as inequações universais para os casos do Laplaciano e Laplaciano deformado. Em particular,

o Teorema 1 generaliza o resultado de Cheng e Yang [20, Teorema 1.2] obtido para o Laplaciano sobre um domínio limitado no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$.

Agora, observamos que se $T\partial_r = \psi\partial_r$, então $(\nabla_{\partial_r}T)\partial_r = \nabla_{\partial_r}T\partial_r = \partial_r\psi\partial_r$, pois $\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0$. Portanto, ψ é radialmente constante se, e somente se, $\nabla_{\partial_r}T\partial_r = 0$, ou seja, $T\partial_r$ é um campo paralelo para uma função distância suave r .

Para o nosso segundo resultado, é conveniente considerar a seguinte constante, que depende da dimensão da variedade e de como o tensor T é limitado no domínio:

$$a(n, \varepsilon, \delta) := -(n-1)^2\varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2.$$

Note que para o caso de $T = I$, temos $\varepsilon = \delta = 1$, então $a(n, \varepsilon, \delta) > 0$ para $n = 2$ e $a(n, \varepsilon, \delta) \leq 0$ para $n \geq 3$.

Teorema 2. *Seja λ_i o i -ésimo autovalor do operador de Cheng-Yau deformado com função deformadora η sobre um domínio limitado $\Omega \subset M^n$ com a condição de fronteira de Dirichlet. Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \overline{\Omega}$, e considere $r(x)$ uma função distância a partir de o . Se T é radialmente paralelo e tem ∂_r como um autovetor, então, para qualquer número inteiro positivo k , temos:*

1. Para $a(n, \varepsilon, \delta) \leq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - (n-1)^2\varepsilon^2\kappa_2^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(n-1)(\delta^2\kappa_1^2 - \varepsilon^2\kappa_2^2) + 2C_0(n-1)\left(\kappa_1 + \frac{1}{d}\right) + C_1 \right). \end{aligned}$$

2. Para $a(n, \varepsilon, \delta) > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - (n-1)^2\varepsilon^2\kappa_2^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(n-1)(\delta^2\kappa_1^2 - \varepsilon^2\kappa_2^2) + 2C_0(n-1)\left(\kappa_1 + \frac{1}{d}\right) + C_1 + \frac{a(n, \varepsilon, \delta)}{d^2} \right). \end{aligned}$$

Em que $d = \text{dist}(\Omega, o)$, $C_0 = \delta^2 \max_{\overline{\Omega}} |\dot{\eta}|$ e $C_1 = \delta^2 \max_{\overline{\Omega}} (2\ddot{\eta} - \dot{\eta}^2)$, enquanto que $\dot{\eta}$ e $\ddot{\eta}$ representam, respectivamente, a primeira e a segunda derivada radial de $\eta(x)$.

Além disso, podemos tomar $C_0 = \delta^2 \max_{\overline{\Omega}} |\nabla\eta|$ e $C_1 = \delta^2 \max_{\overline{\Omega}} (2|\nabla^2\eta| + |\nabla\eta|^2)$, que não dependem da função distância. Neste contexto, podemos tomar $T = I$ no Teorema 2 para obter o próximo resultado.

Corolário 1. *Seja λ_i o i -ésimo autovalor do Laplaciano deformado com uma função deformadora η sobre um domínio limitado $\Omega \subset M^n$ com a condição de fronteira de Dirichlet. Para qualquer inteiro positivo k , temos*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(4\lambda_i - (n-1)^2\kappa_2^2 + 2(n-1)(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \right. \\ &\quad \left. + 2C_0(n-1)\kappa_1 + C_1 \right), \end{aligned}$$

em que $C_0 = \max_{\overline{\Omega}} |\nabla\eta|$ e $C_1 = \max_{\overline{\Omega}} (2|\nabla^2\eta| + |\nabla\eta|^2)$. Além disso, o primeiro autovalor satisfaz

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{1}{4} \left((n-1)^2\kappa_2^2 - 2(n-1)(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) - 2C_0(n-1)\kappa_1 - C_1 \right).$$

No Corolário 4.1 provaremos o caso mais geral do corolário anterior que podemos obter a partir do Teorema 2.

Tomando η constante na primeira parte do Corolário 1 recuperamos o resultado de Chen, Zheng e Lu [15, Teorema 1.1] obtido para o Laplaciano sobre domínios limitados em uma variedade de Cartan-Hadamard pinçada M^n , para $n \geq 3$. Observe que a dimensão 2 não representa obstrução para o nosso resultado. A segunda consequência do corolário anterior, novamente para o Laplaciano, escrevemos no Corolário 2 por conveniência.

Observação 1. *Para o caso do operador de Cheng-Yau, as inequações do Teorema 2 não dependem das constantes C_0 e C_1 , pois neste caso podemos utilizar η constante. Para o caso do operador de Cheng-Yau deformado com a função deformadora radial dada por $\eta(x) = -2 \ln(r(x))$, essas desigualdades não dependem da constante C_1 , uma vez que $\eta(x)$ satisfaz $2\ddot{\eta} - \dot{\eta}^2 = 0$. Além disso, $-\eta$ é um exemplo simples de função deformadora que podemos tomar no Corolário 1 tal que as estimativas obtidas não dependam de C_1 .*

McKean [41] provou que para uma variedade Cartan-Hadamard M^n com curvatura seccional satisfazendo $K \leq -\kappa^2$, para alguma constante positiva κ^2 , o espectro do Laplaciano em M^n está em $[(n-1)^2\kappa^2/4, +\infty)$, e este limite inferior é atingido no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2(-\kappa^2)$, ver também Cheng [17]. Em Pinsk [49], encontramos limites mais precisos para este limite inferior no caso de superfícies. Como uma aplicação do nosso Teorema 1, obtemos imediatamente que o primeiro autovalor do Laplaciano sobre $\Omega \subset \mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ com condição de fronteira de Dirichlet, satisfaz $\lambda_1(\Omega) \geq (n-1)^2\frac{\kappa^2}{4}$. Para o caso de domínios limitados em variedades Cartan-Hadamard pinçadas, fazemos o seguinte questionamento: Quão preciso é esse limite inferior? Como uma aplicação do Corolário 1, obtemos imediatamente um limite inferior universal para o primeiro autovalor do Laplaciano em domínios limitados em uma variedade Cartan-Hadamard pinçada. Mais precisamente:

Corolário 2. *O primeiro autovalor λ_1 do Laplaciano em um domínio limitado $\Omega \subset M^n$, $n \geq 3$, com a condição de fronteira de Dirichlet, satisfaz*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{(n-1)^2}{4}\kappa_2^2 - \frac{n-1}{2}(\kappa_1^2 - \kappa_2^2).$$

Além disso, esta limitação inferior é positiva para $0 < \kappa_2 \leq \kappa_1$ e $\sqrt{n+1}\kappa_2 \geq \sqrt{2}\kappa_1$.

Agora, consideramos cada autovalor $\lambda_i(\Omega)$ do Laplaciano sobre domínios limitados de $\mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ como uma função desses domínios com a condição de fronteira de Dirichlet. Neste contexto, mostramos que $\lambda_i(\Omega) \rightarrow (n-1)^2\frac{\kappa^2}{4}$ quando $\Omega \rightarrow \mathbb{H}^n(-\kappa^2)$. Isso significa que Ω contém um n -disco de raio $a > 0$ e que podemos fazer o raio $a \rightarrow +\infty$, o que é possível visto que $\mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ é uma variedade Riemanniana completa. Observamos que este fato foi provado por Cheng e Yang [20] para o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$. Aqui, damos uma prova completa combinando nosso Teorema 1 com uma abordagem apropriada utilizada por Gomes e Marrocos [40] no cenário do espectro em métricas deformadas.

Corolário 3. *O i -ésimo autovalor λ_i do Laplaciano em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{H}^n(-\kappa^2)$, com a condição de fronteira de Dirichlet, satisfaz*

$$\lim_{\Omega \rightarrow \mathbb{H}^n(-\kappa^2)} \lambda_i(\Omega) = \frac{(n-1)^2}{4}\kappa^2.$$

Identificamos as desigualdades no Teorema 2 como as ferramentas mais adequadas para as aplicações de nossos resultados. Observamos que as constantes C_0 e C_1 são naturais e nos motivam a fazer a seguinte pergunta:

Questão 1. *Sob quais condições as estimativas para os autovalores obtidas a partir do Teorema 2 não dependem das constantes C_0 e C_1 para alguma função deformadora não trivial η ?*

Respondemos esta questão considerando uma função deformadora radialmente constante em um domínio limitado $\Omega \subset M^n$. Em outras palavras, o próximo resultado mostra que o comportamento das estimativas dos autovalores do operador de Cheng-Yau permanece invariante por uma perturbação de primeira ordem desse operador. Portanto, temos um resultado de rigidez para um operador de Cheng-Yau na classe das funções deformadoras radialmente constante definidas em quaisquer domínios limitados em M^n . Mais precisamente, temos:

Corolário 4. *Seja λ_i o i -ésimo autovalor do operador de Cheng-Yau deformado em um domínio limitado $\Omega \subset M^n$ com a condição de fronteira de Dirichlet, e uma função deformadora radialmente constante. Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \bar{\Omega}$, e considere $r(x)$ a função distância a partir de o . Se T é radialmente paralelo e tem ∂_r como um autovetor, então, todas as estimativas para a sequência de autovalores (λ_i) que podemos obter a partir do Teorema 2 não dependem desta função deformadora.*

No caso de funções deformadoras radiais, novamente fixamos uma origem $o \in M^n$ para definir uma função distância $r(x)$ a partir de o , e consideramos o domínio anular limitado

$$\Omega = \left\{ x \in M^n; \frac{2(n-1)(\kappa_1 + \alpha)R + 2}{c} < r(x)^2 < R^2 \right\}, \quad (6)$$

em que $\alpha = 1/d$ e $cR > (n-1)(\kappa_1 + \alpha) + \sqrt{(n-1)^2(\kappa_1 + \alpha)^2 + 2c}$ e c são constantes positivas. Para obter tal constante R , é suficiente considerar o polinômio quadrático $\mathcal{P}(x) = cx^2 - 2(n-1)(\kappa_1 + \alpha)x - 2$. Então, para a função deformadora radial $\eta(x) = \frac{c}{2}r(x)^2$, sobre Ω . Temos $C_0 = \delta^2 cR$ e

$$\max_{\Omega} (2c - c^2 r(x)^2) = 2c - c^2 \min_{\Omega} r(x)^2 = 2c - (2c(n-1)(\kappa_1 + \alpha)R + 2c).$$

Assim, é nula a expressão $2C_0(n-1)(\kappa_1 + 1/d) + C_1$ no Teorema 2. Portanto, assim como no Corolário 4, obtemos um resultado de rigidez para um operador de Cheng-Yau na classe de domínios anulares limitados de acordo com o acima exposto. Mais precisamente,

Corolário 5. *Seja λ_i o i -ésimo autovalor do operador de Cheng-Yau deformado com função deformadora $\eta(x) = \frac{c}{2}r(x)^2$ sobre um domínio anular limitado definido como na equação (6) com a condição de fronteira de Dirichlet. Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \bar{\Omega}$, e considere $r(x)$ a função distância a partir de o . Se T é radialmente paralelo e tem ∂_r como um autovetor, então, todas as estimativas para a sequência de autovalores (λ_i) que podemos obter a partir do Teorema 2 não dependem das constantes C_0 e C_1 .*

Para obter uma aplicação do Corolário 5, o leitor pode considerar o operador de Cheng-Yau deformado com a função deformadora $\eta(x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2$ definido em domínios anulares limitados no soliton Gaussiano shrinking $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij}, \frac{\lambda}{2}|x|^2)$.

No Capítulo 3, estimamos o gap fundamental para o operador \mathcal{L} definido em (2), no caso em que $T = \varphi I$, com $\varphi_r = 0$ e $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$, sobre uma família de domínios convexos no \mathbb{H}^2 com a condição de fronteira de Dirichlet. Esse problema, no caso \mathbb{R}^n e $\varphi = 1$, foi estudado na década de 80 por diversos matemáticos, os quais conjecturaram que o gap

fundamental do operador Laplaciano para muitos domínios convexos do \mathbb{R}^n com diâmetro D é $\lambda_2 - \lambda_1 \geq 3\pi^2/D^2$.

Em 2011, Andrews e Clutterbuck [1] demonstraram tal conjectura e sugeriram que o resultado permanece verdadeiro para espaços com curvatura constante. Em 2019, Seto, Wang e Wei [54] demonstraram a nova conjectura para o caso de domínios convexos com diâmetro $D \leq \pi/2$ na esfera unitária \mathbb{S}^n , $n \geq 3$. Em 2020, He, Wei e Zhang estenderam os resultados de Seto-Wang-Wei para domínios convexos com diâmetro $D < \pi$ na esfera unitária \mathbb{S}^n , $n \geq 3$. Em 2021, Dai, Seto e Wei [23] provaram a conjectura para qualquer domínio convexo limitado em \mathbb{S}^2 .

Entretanto, para o caso do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2(-1)$, Bourni *et al.* [10] construíram os domínios convexos $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1} = \{(r, \theta) : 1 < r < e^{\frac{\pi}{\ell}}, \theta_0 < \theta < \theta_1\}$, em que $\ell > 0$, $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\theta_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, ver figura 3.1, com diâmetro D , tal que $\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{3\pi^2}{D^2}$, mostrando assim que o gap fundamental para o Laplaciano se comporta de maneira diferente nesse espaço. Neste ínterim, para estimar o gap fundamental do operador \mathcal{L} para domínios $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$, consideramos $\theta_* = \min\{\theta_0, \pi - \theta_1\}$, com $\theta_* > \frac{\pi}{6}$, $\varepsilon > \frac{\delta}{4}$ e $\ell > 0$ tal que a seguinte propriedade seja válida:

$$\frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \frac{4\varepsilon \sin^2 \theta_* - \delta}{4\delta - \varepsilon \sin^2 \theta_*} \geq \ell^2. \quad (7)$$

Nessas condições, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3. *O gap fundamental para o operador $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, sobre cada conjunto da família de domínios convexos $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$, com $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ cumprindo a condição (7), satisfaz*

$$\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{3\delta\pi^2}{D^2}, \quad (8)$$

onde $D = \lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} D_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ é o diâmetro de cada conjunto da família $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$.

Considerando a mudança de variável $u = ve^{-\frac{\eta}{2}}$ no Teorema 3, em que η é uma função escolhida apropriadamente, obtemos uma estimativa para o gap fundamental do operador $\mathcal{L}v = \operatorname{div}(\varphi \nabla v) - \langle \nabla v, \varphi \nabla \eta \rangle$, a saber:

Corolário 6. *Considere o operador $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, sobre cada conjunto da família de domínios convexos $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$, com $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ cumprindo a condição (7). Existe uma função deformadora η tal que o gap fundamental para $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$ permanece invariante por uma perturbação de primeira ordem deste operador, mais precisamente, para o operador $\mathcal{L}u = \operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla u \rangle$, é válido que*

$$\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{3\delta\pi^2}{D^2}, \quad (9)$$

onde $D = \lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} D_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ é o diâmetro de cada conjunto da família $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$.

Finalmente, nas considerações finais, escrevemos algumas estimativas quadráticas para os autovalores do operador de Cheng-Yau deformado, além das observações de interesse independente para a expressão mais geral de \mathcal{L} referente a função de distribuição dos autovalores λ_k menores que λ .

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos uma série de resultados em geometria Riemanniana que serão utilizadas ao longo do texto para demonstrar nossos principais resultados. Indicamos como leitura complementar Gomes e Miranda [27], Lee [37] e Petersen [48]. Outras boas referências serão citadas em momento oportuno.

1.1 Operadores Diferenciais

Consideramos (M^n, \langle, \rangle) uma variedade Riemanniana com a métrica \langle, \rangle e a conexão de Levi-Civita ∇ , e denotamos por $C^\infty(M^n)$ o anel das funções diferenciáveis reais sobre M^n .

Definição 1.1. *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gradiente de f é o campo vetorial diferenciável ∇f , definido sobre M^n por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = \nabla_X f = X(f) = df(X). \quad (1.1)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M^n)$.

Além disso, para $f, h \in C^\infty(M^n)$, valem:

$$\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h \quad \text{e} \quad \nabla(fh) = f\nabla h + h\nabla f.$$

Definição 1.2. *Seja X um campo de vetores diferenciáveis em M^n . A divergência de X é a função diferenciável $\operatorname{div} X : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida para $p \in M^n$ por*

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}\{v \mapsto \nabla_v X(p)\}. \quad (1.2)$$

em que tr denota o traço do operador linear $v \in T_p M^n \mapsto \nabla_v X(p)$.

Além disso, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, valem:

$$\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y \quad \text{e} \quad \operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle. \quad (1.3)$$

Definição 1.3. *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Laplaciano de f é a função $\Delta f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f. \quad (1.4)$$

Definição 1.4. *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o Hessiano de f como o $(1, 1)$ -tensor, dado por*

$$(\nabla^2 f)(X) = \nabla_X \nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M^n).$$

Ou como $(0, 2)$ -tensor simétrico, dado por

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = \nabla_{X, Y}^2(f).$$

Escreveremos $\nabla^2 f \leq k$ ($\geq k$) quando todos os seus autovalores são $\leq k$ ($\geq k$). Para encerrar esta parte, observamos a seguinte relação entre o Laplaciano e o Hessiano de uma função diferenciável $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta f = \text{tr}(\nabla^2 f).$$

1.2 Alguns conceitos sobre Tensores

Nesta seção, revisaremos algumas propriedades de carácter geral sobre tensores em variedades Riemannianas com intuito de definir posteriormente o operador \mathcal{L} . Em uma variedade Riemanniana a estrutura de produto interno sobre os espaços tangentes possibilita visualizar tensores de diferentes maneiras. Uma observação fundamental é que uma aplicação bilinear pode ser interpretada como uma aplicação linear na presença da estrutura de um produto interno.

Definição 1.5. *Um $(1, 1)$ -tensor em uma variedade diferenciável M^n é uma aplicação*

$$T : \mathfrak{X}(M^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(M^n).$$

linear sobre $C^\infty(M^n)$ das funções diferenciáveis em M^n . Enquanto que, num $(0, 2)$ -tensor, o contradomínio é $C^\infty(M^n)$. Formalmente, para $f, \ell \in C^\infty(M^n)$ vale que

$$T(fX + \ell Y) = fT(X) + \ell T(Y).$$

O tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n)$ é um $(0, 2)$ -tensor que faz corresponder a cada ponto $p \in M^n$ e a cada par $X, Y \in T_p M^n$, o produto interno $g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_p$. As suas componentes no referencial $\{\partial_i\}$ são os coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.

De modo geral, dado um $(0, 2)$ -tensor T em uma variedade Riemanniana (M^n, \langle, \rangle) , podemos identificá-lo com um $(1, 1)$ -tensor \tilde{T} mediante a métrica Riemanniana \langle, \rangle , fazendo

$$\langle \tilde{T}(X), Y \rangle := T(X, Y), \tag{1.5}$$

por simplicidade e, desde que não haja confusão na notação, utilizaremos a mesma letra para indicar o $(1, 1)$ -tensor correspondente ao seu $(0, 2)$ -tensor. Em particular, o tensor métrico g pode ser identificado com o $(1, 1)$ -tensor identidade I em $\mathfrak{X}(M^n)$. Em (M^n, \langle, \rangle) podemos estender a noção de derivada covariante a tensores como segue.

Definição 1.6. *A derivada covariante de um $(1, 1)$ -tensor T é um $(1, 2)$ -tensor ∇T dado por*

$$\nabla T(X, Y_1, \cdot) = \nabla_X(T(Y_1)) - T(\nabla_X Y_1). \tag{1.6}$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M^n)$, define-se a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\nabla_X T(Y_1) := \nabla T(X, Y_1).$$

Observação 1.1. Dizemos que um tensor T é paralelo quando $\nabla T \equiv 0$.

Definição 1.7. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o $(1, 3)$ -tensor

$$R : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)$$

dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z. \quad (1.7)$$

Definição 1.8. A curvatura seccional $K_p(\sigma)$ no ponto $p \in M^n$ segundo um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M^n$, é definida por

$$K_p(\sigma) = \frac{\langle R(x, y)y, x \rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $x, y \in \sigma$ são vetores linearmente independentes e $|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2$. Convém considerarmos também a notação $K_p(x, y) = K_p(\sigma)$.

Associado a essas funções curvaturas temos.

Definição 1.9. O tensor curvatura de Ricci é o $(0, 2)$ -tensor obtido pelo traço do tensor curvatura de Riemann. Isto é,

$$\text{Ric}(Y, Z) = \text{tr}\{X \mapsto R(X, Y)Z\},$$

em que $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$. Se $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_p M^n$ é uma base ortonormal e $u, v \in T_p M^n$, então para cada $p \in M^n$ o tensor de Ricci é dado por

$$\text{Ric}(u, v) = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, u)v, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, v)u, e_i \rangle = \text{Ric}(v, u).$$

1.3 Tensores e os Operadores Diferenciais

Nesta seção, apresentamos algumas importantes propriedades dos tensores envolvendo os operadores diferenciais. Deste modo, iniciamos relembando a definição do produto interno entre tensores, para tanto, consideramos $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em M^n , T e S $(1, 1)$ -tensores em M^n e seus respectivos adjuntos T^* e S^* . O produto interno de Hilbert-Schmidt é dado por

$$\langle T, S \rangle := \text{tr}(TS^*) = \sum_i \langle TS^*(e_i), e_i \rangle = \sum_i \langle S^*(e_i), T^*(e_i) \rangle = \sum_i \langle T(e_i), S(e_i) \rangle.$$

Para mais detalhes sobre o produto interno de Hilbert-Schmidt, ver por exemplo [22, 42, 43]. Prosseguiremos agora com a definição de divergência de tensores.

Definição 1.10. Definimos a divergência de um $(1, 1)$ -tensor T em M^n , como sendo o $(0, 1)$ -tensor dado por

$$(\text{div}T)(v)(p) = \text{tr}(w \mapsto (\nabla_w T)(v)(p)),$$

onde $p \in M^n$ e $v \in T_p M^n$. Além disso, dizemos que o tensor T é livre de divergência se $\text{div}T = 0$.

Dado um $(0, 2)$ -tensor T em M^n , considere o referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$, e seja T o seu $(1, 1)$ -tensor correspondente. Então, $\operatorname{div}T$ é um $(0, 1)$ -tensor que satisfaz, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M^n)$

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}T)(Z) &= \sum_i g((\nabla_{e_i}T)(Z), e_i) = \sum_i g(\nabla_{e_i}T(Z) - T(\nabla_{e_i}Z), e_i) \\ &= \operatorname{div}(T(Z)) - \sum_i T(\nabla_{e_i}Z, e_i). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{div}(T(Z)) = (\operatorname{div}T)(Z) + \langle \nabla Z, T^* \rangle. \quad (1.8)$$

Lema 1.1. *Seja T um $(1, 1)$ -tensor simétrico positivo definido em uma variedade Riemanniana M^n . Se $\varepsilon I \leq T \leq \delta I$, para números reais positivos ε e δ , então*

$$\varepsilon \langle T(X), X \rangle \leq |T(X)|^2 \leq \delta \langle T(X), X \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M^n).$$

Em particular, obtemos

$$\varepsilon^2 |\nabla \eta|^2 \leq |T(\nabla \eta)|^2 \leq \delta^2 |\nabla \eta|^2,$$

para qualquer função $\eta \in C^\infty(M^n)$

Demonstração. Como T é simétrico e positivo definido, existe um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$, tal que, $T(e_j) = \psi_j e_j$, com $\psi_j > 0$, para todo $j = 1, \dots, n$. Por hipótese, para todo $1 \leq j \leq n$ temos que

$$\varepsilon \leq \psi_j = \langle T e_j, e_j \rangle \leq \delta. \quad (1.9)$$

Seja $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ cuja representação no referencial escolhido é $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, e assim

$$|T(X)|^2 = \langle T(\sum_{i=1}^n a_i e_i), T(\sum_{j=1}^n a_j e_j) \rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i^2 a_i^2.$$

Para concluir a demonstração é suficiente notar que

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \psi_i a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \psi_i \psi_i a_i^2 \leq \delta \sum_{i=1}^n \psi_i a_i^2.$$

□

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ podemos considerar a aplicação $X^b : \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n)$ que a cada $Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ associa $X^b(Y) = \langle X, Y \rangle$, além disso, a métrica Riemanniana \langle, \rangle em M^n , induz em cada espaço dual $T_p^*M^n$ do espaço tangente T_pM^n , um produto interno com propriedades análogas a \langle, \rangle , bastando definir para cada $X^b, Y^b \in T_p^*M^n$

$$\langle X^b, Y^b \rangle := \langle X, Y \rangle, \quad (1.10)$$

em que $X, Y \in T_pM^n$ são os vetores correspondentes a X^b e Y^b , respectivamente. Ademais,

$$\langle \operatorname{div}T, Z^b \rangle = \sum_i (\operatorname{div}T)(e_i) \langle Z, e_i \rangle = (\operatorname{div}T) \left(\sum_i \langle Z, e_i \rangle e_i \right) = (\operatorname{div}T)(Z).$$

Por fim, consideramos para cada $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ o $(1, 1)$ -tensor $\nabla X(Y) = \nabla_Y X$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M^n)$.

1.4 Operador elíptico de segunda ordem na forma divergente

Nessa seção, iremos definir a η -divergência de um campo $X \in \mathfrak{X}(M^n)$, e o operador elíptico de segunda ordem na forma divergente \mathcal{L} . Fixando uma função $\eta \in C^\infty(M^n)$ definimos a η -divergência de um campo X do seguinte modo:

$$\operatorname{div}_\eta X := \operatorname{div} X - \langle \nabla \eta, X \rangle.$$

Segue das propriedades da divergência de campos de vetores em (1.3), que para toda $f \in C^\infty(M^n)$ e $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ vale:

$$\operatorname{div}_\eta(fX) = f \operatorname{div}_\eta X + \langle \nabla f, X \rangle \text{ e } \operatorname{div}(e^{-\eta} X) = e^{-\eta} \operatorname{div}_\eta X. \quad (1.11)$$

Dado um $(1, 1)$ -tensor T em (M^n, \langle, \rangle) , definimos a η -divergência de T como o $(0, 1)$ -tensor dado por

$$\operatorname{div}_\eta T := \operatorname{div} T - d\eta \circ T. \quad (1.12)$$

Para $f \in C^\infty(M^n)$ e $Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ vale o seguinte resultado, que tem sido aplicado em [22, 42, 43] e, para o caso em que η é constante, em [6, 7, 25, 26, 51, 60].

Lema 1.2. *Sejam $\eta, h \in C^\infty(M^n)$, T um $(1, 1)$ -tensor simétrico e $Z \in \mathfrak{X}(M^n)$. Então vale*

$$\operatorname{div}_\eta(T(hZ)) = h \langle \operatorname{div}_\eta T, Z \rangle + h \langle \nabla Z, T \rangle + \langle T(\nabla h), Z \rangle. \quad (1.13)$$

Em particular, se $Z = \nabla f$ para alguma $f \in C^\infty(M^n)$, então

$$\operatorname{div}_\eta(T(h\nabla f)) = h \langle \operatorname{div}_\eta T, \nabla f \rangle + h \langle \nabla^2 f, T \rangle + \langle T(\nabla h), \nabla f \rangle. \quad (1.14)$$

Agora, vamos definir o operador elíptico de segunda ordem na forma divergente.

Definição 1.11. *Seja T um $(1, 1)$ -tensor simétrico positivo definido em M^n e a função $\eta \in C^\infty(M^n)$. Definimos o operador \mathcal{L} por*

$$\mathcal{L}f := \operatorname{div}_\eta(T(\nabla f)) = \operatorname{div}(T(\nabla f)) - \langle \nabla \eta, T(\nabla f) \rangle, \quad (1.15)$$

para toda $f \in C^\infty(M^n)$.

Segue das propriedades de div_η e da simetria de T que para $f, h \in C^\infty(M^n)$.

$$\mathcal{L}(fh) = f\mathcal{L}h + h\mathcal{L}f + 2T(\nabla f, \nabla h).$$

Através da relação (1.14) podemos associar o operador \mathcal{L} com o $(0, 1)$ -tensor $\operatorname{div}_\eta T$, do seguinte modo,

$$\mathcal{L}f = \operatorname{div}_\eta(T(\nabla f)) = \langle \operatorname{div}_\eta T, \nabla f \rangle + \langle \nabla^2 f, T \rangle. \quad (1.16)$$

Em 1977, Cheng e Yau [21] introduziram o seguinte operador

$$\square f := \operatorname{tr}(\nabla^2 f \circ T) = \langle \nabla^2 f, T \rangle, \quad (1.17)$$

onde $f \in C^\infty(M^n)$ e T é um $(1, 1)$ -tensor simétrico. Para o caso em que M^n é orientável e compacta, eles provaram que o operador \square é auto-adjunto se, e somente se, T é livre de divergência, ou seja, $\operatorname{div} T = 0$.

Tendo em vista que, $R = \text{tr}(\text{Ric})$, $\text{div Ric} = dR/2$ e $\text{div}(RI) = dR$, podemos concluir que o tensor $G := \text{Ric} - (R/2)\langle, \rangle$ é livre de divergência, e portanto $\square f = \langle \nabla^2 f, G \rangle$ é auto-adjunto. Observamos que a partir das equações (1.16) e (1.17) podemos reescrever a equação (1.15) em termos dos operadores $\text{div}_\eta T$ e \square do seguinte modo

$$\mathcal{L}f = \square f + \langle \text{div}_\eta T, \nabla f \rangle, \quad (1.18)$$

em que $\text{div}_\eta T$ está definido em (1.12) e $d\eta \circ T = \langle \nabla \eta, T(\cdot) \rangle$. Em particular, se o operador \square é auto-adjunto a equação (1.18) se resume a

$$\mathcal{L}f = \square f - \langle \nabla \eta, T(\nabla f) \rangle, \quad (1.19)$$

que é uma perturbação de primeira ordem do *operador de Cheng-Yau*. Nós vamos nos referir à equação (1.19) como um operador de Cheng-Yau deformado com função deformadora η . Em particular, se η é constante, então $\square f$ é um operador de Cheng-Yau com $\text{div}T = 0$.

Uma das técnicas mais antigas e importantes em geometria Riemanniana é a técnica de Bochner, em que o foco clássico da técnica reside no estabelecimento de certos resultados para tensores adequados em curvatura positivas e levando a resultados de rigidez quando a curvatura é não negativa. Segundo Petersen [48], na década de 1970, P. Li descobriu que a técnica de Bochner poderia ser utilizada para estimar a dimensão do kernel dos operadores de Laplace sob suposições de curvatura mais gerais, e ficando ainda mais aprimorado quando Gallot percebeu que as estimativas analíticas necessitam apenas da limitação inferior da curvatura de Ricci.

Como ferramenta para estabelecer as desigualdades universais para os autovalores do operador de Cheng-Yau deformado em um domínio limitado de uma variedade Cartan-Hadamard pinçada, utilizaremos nesta tese uma fórmula tipo Bochner recentemente demonstrada por Alencar, Neto e Zhou [2] aplicada ao operador \square como segue,

$$\frac{1}{2}\square(|\nabla f|^2) = \langle \nabla(\square f), \nabla f \rangle + R_T(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T \rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T \rangle, \quad (1.20)$$

em que, $R_T(X, Y) := \text{tr}(T \circ (Z \mapsto R(X, Z)Y))$ e $R(X, Z)Y$ é o tensor curvatura de Riemann da métrica \langle, \rangle .

A fórmula tipo Bochner para a expressão mais geral de \mathcal{L} pode ser encontrada em [27] ou, alternativamente, em [43] e [44]. Esta fórmula relaciona a teoria analítica dos operadores diferenciais elípticos com a geometria da variedade. A fórmula tipo Bochner para o operador \mathcal{L} é dado por

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(|\nabla f|^2) = \langle \nabla(\mathcal{L}f), \nabla f \rangle + R_{\eta, T}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla^2 f, \nabla^2 f \circ T \rangle - \langle \nabla^2 f, \nabla_{\nabla f} T \rangle, \quad (1.21)$$

em que $R_{\eta, T} := R_T - \nabla(\text{div}_\eta T)^\sharp$.

1.5 Conceitos básicos sobre uma equação diferencial parcial elíptica na forma divergente

Esta tese tem como objetivo estudar o problema de autovalor com a condição de fronteira de Dirichlet para o operador \mathcal{L} definido em (1.15) com hipóteses adicionais no tensor T

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.22)$$

Ao longo desta tese, a variedade $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é completa e $\Omega \subset M^n$ é um domínio limitado conexo e com fronteira suave $\partial\Omega$. Usaremos também a medida com peso $dm = e^{-\eta} d\text{vol}\Omega$, para alguma função suave η . Se ν é o campo de vetores normal exterior a fronteira $\partial\Omega$, então, pela segunda equação em (1.11), podemos inferir que o teorema da divergência permanece verdadeiro para o operador \mathcal{L} , como segue

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}f dm = \int_{\partial\Omega} \langle \nu, T(\nabla f) \rangle d\mu, \quad (1.23)$$

em que $d\mu = e^{-\eta} d\partial\Omega$ é a forma volume com peso sobre a fronteira induzido por ν . Assim, a fórmula da integração por parte é

$$\int_{\Omega} \ell \mathcal{L}f dm = - \int_{\Omega} T(\nabla \ell, \nabla f) dm + \int_{\partial\Omega} \ell T(\nabla f, \nu) d\mu, \quad (1.24)$$

do qual se conclui que \mathcal{L} é auto-adjunto no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_0^1(\Omega, dm)$. Assim o problema (1.22) tem espectro real e discreto $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \dots$, em que, cada λ_i é repetido de acordo com sua multiplicidade. Os auto-espacos pertencentes aos autovalores distintos são ortogonais em $L^2(\Omega, dm)$, que é uma soma direta de todos os auto-espacos. Referimos a dimensão de cada auto-espaço como a multiplicidade do autovalor. Além disso, para as autofunções normalizadas u_i temos.

$$\lambda_i = - \int_{\Omega} u_i \mathcal{L}u_i dm = \int_{\Omega} T(\nabla u_i, \nabla u_i) dm. \quad (1.25)$$

1.6 Caracterização variacional dos autovalores

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre a caracterização variacional dos autovalores do operador \mathcal{L} em (1.15), bem como o importante Teorema de Courant para domínios nodais.

Teorema 1.1 (Teorema Max-Min). *Dados $u_1, \dots, u_{k-1} \in L^2(\Omega, dm)$, seja*

$$\nu = \inf \frac{\int_{\Omega} \phi(-\mathcal{L}\phi) dm}{\int_{\Omega} \phi^2 dm}. \quad (1.26)$$

em que \inf é tomado sobre o conjunto $\{\phi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega, dm); \int_{\Omega} \phi u_i dm = 0, \forall i = 1, \dots, k-1\}$. Então, os autovalores do operador \mathcal{L} satisfazem

$$\nu \leq \lambda_k. \quad (1.27)$$

Se $\{u_i\}$ é uma base ortonormal de autofunções correspondente a cada autovalor λ_i com $i = 1, \dots, k-1$, então $\nu = \lambda_k$.

O próximo resultado é conhecido como teorema da continuação única.

Teorema 1.2 ([3]). *Sejam dados L um operador diferencial linear elíptico de segunda ordem em um domínio U de \mathbb{R}^n , e uma aplicação suave $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$|Lu|^2 \leq C(|\nabla u|^2 + |u|^2), \quad (1.28)$$

em que $C > 0$ é constante. Se u se anula em um subconjunto aberto e não-vazio de U , então u é identicamente nula em U .

Observação 1.2. *Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa com fecho compacto e fronteira suave por partes, e L um operador diferencial linear elíptico de segunda ordem em M^n e $u : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução suave da inequação (1.28). Se u é nula em um subconjunto aberto e não-vazio de M^n , então u é identicamente nula em M^n .*

A seguir, o teorema de Courant para domínios nodais. Ele foi utilizado na estimativa do gap fundamental para o operador \mathcal{L} escolhido no Capítulo 3.

Definição 1.12. *Dada uma função contínua $u : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto nodal de u é o conjunto $u^{-1}(0)$, e o domínio nodal de u são as componentes conexas dos conjuntos abertos $\Omega_+ = \{x \in \Omega, u(x) > 0\}$ e $\Omega_- = \{x \in \Omega, u(x) < 0\}$.*

Teorema 1.3 (Teorema de Courant, ver, e.g., [31], p. 14-15). *Seja u_k , $k \geq 1$ a k -ésima autofunção do operador \mathcal{L} com a condição de fronteira de Dirichlet. Então, u_k possui no máximo k domínios nodais.*

Demonstração. Fazemos a prova supondo que todos os domínios nodais de u_k são domínios conexos com fecho compacto e fronteira suave por partes, ver [13, p. 19-21]. Supondo por contradição que u_k tem pelo menos $k+1$ domínios nodais, digamos $\Omega_1, \dots, \Omega_k, \Omega_{k+1}$. Para $1 \leq j \leq k$. Seja

$$\phi_j = \begin{cases} u_k|_{\Omega_j}, & \text{em } \Omega_j \\ 0, & \text{em } \bar{M} \setminus \Omega_j, \end{cases} \quad (1.29)$$

onde para cada $1 \leq j \leq k$, ϕ_j é uma autofunção de λ_k restrita ao domínio Ω_j . Deste modo podemos escolher números reais $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, tais que $u = \sum_{j=1}^k \alpha_j \phi_j$ seja ortogonal a u_1, \dots, u_{k-1} , além disso $u|_{\partial M} = 0$. Portanto, pelo Teorema de Rayleigh em [31], e a caracterização max-min de λ_k , teremos

$$\lambda_k \leq -\frac{\int_{\Omega} u \mathcal{L} u \, dm}{\int_{\Omega} u^2 \, dm} \leq \lambda_k. \quad (1.30)$$

Portanto, novamente pelo Teorema de Rayleigh, u é uma autofunção associada a λ_k , a qual se anula em Ω_{k+1} . Como $|\mathcal{L}u|^2 = \lambda_k^2 |u|^2$, o princípio da continuação única de Aronszajn garante que $u \equiv 0$, o que é uma contradição. \square

Teorema 1.4 (Resultados de Courant, ver, e.g., [31], p. 14-15). *A autofunção u_1 do operador \mathcal{L} com a condição de fronteira de Dirichlet tem sinal constante em M^n ; λ_1 , possui multiplicidade 1; u_2 tem exatamente 2 domínios nodais e λ_1 é caracterizado como sendo o único autovalor com uma autofunção de sinal constante.*

Demonstração. Sabemos que u_1 não muda de sinal e $\int_M u_1 u_2 \, dm = 0$. Se $-\mathcal{L}u_2 = \lambda_1 u_2$, o teorema anterior garante imediatamente que u_2 também não muda de sinal em M^n e não se anula em $\text{int}(M)$, mas isso contradiz a igualdade $\int_M u_1 u_2 \, dm = 0$. O teorema anterior garante que u_2 tem no máximo dois domínios nodais. Por outro lado, como $\int_M u_1 u_2 \, dm = 0$ e u_1 não muda de sinal em M^n , então u_2 deve mudar de sinal e portanto possui exatamente dois domínios nodais. \square

O problema (1.22) de autovalores quando $T = I$ é um objeto de pesquisa importante nas áreas da física de buracos negros, mecânica elástica, geometria diferencial e assim por diante. Em 1911, Weyl [59] publicou a sua conhecida fórmula assintótica para domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a saber

$$\lambda_k \sim \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol } \Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}} \quad (k \rightarrow \infty) \quad (1.31)$$

onde ω_n é o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n . A fórmula de Weyl se tornou uma importante ferramenta para a comparação de estimativas relacionadas a autovalores, não apenas para o Laplaciano, mas também para os operadores elípticos mais gerais. Além disso, os domínios em \mathbb{R}^n podem ser substituídos por domínios em variedades Riemannianas.

Em 1960, Pólya [50] conjecturou que para o caso do Laplaciano em um domínio qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vale a seguinte desigualdade,

$$\lambda_k \geq \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol } \Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}, \quad (1.32)$$

em relação a esta conjectura, Li e Yau [39] provaram a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \frac{n}{n+2} \frac{4\pi^2}{(\omega_n \text{vol } \Omega)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}. \quad (1.33)$$

Outro aspecto importante da estimativa de autovalores é estimar com a maior precisão possível o gap entre autovalores consecutivos. Segundo Chen, Zheng e Yang em [16] alguns resultados relativos à limitação superior do gap entre autovalores consecutivos do problema de Dirichlet para o Laplaciano em Ω são:

a) Em [46, 47] Payne, Pólya e Weinberger, 1955: $\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i$, para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

b) Thompson [57], 1969: $\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4}{nk} \sum_{i=1}^k \lambda_i$, quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

c) Hile e Protter [32], 1980: $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \geq \frac{nk}{4}$.

d) Em [61] Yang, 1991, quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: $\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)(\lambda_{k+1} - (1 + \frac{4}{n})\lambda_i) \leq 0$ e

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq 2 \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n} \right) \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

e) Cheng e Yang [18], 2005 para Ω em uma variedade Riemanniana completa M^n :

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq 2 \left[\left(\frac{2}{kn} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n} \right) \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

f) Cheng e Yang [19], 2007: $\lambda_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4}{n} \right) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

g) Cheng e Yang [19], 2007: $\lambda_{k+1} \leq C_0(n) k^{\frac{2}{n}} \lambda_1$, em que $C_0(n) \leq 1 + 4/n$ é uma constante.

Ainda do ponto de vista físico, o problema de autovalor (1.22) descreve o fenômeno físico da vibração da membrana na mecânica elástica. Neste cenário, Yang estabeleceu a desigualdade universal no item (d), que foi generalizada por Cheng e Yang às variedades Riemannianas completas em [14, 18, 20].

Em se tratando de variedades Cartan-Hadamard pinçadas, temos já estabelecidas algumas estimativas para o gap dos autovalores do problema de autovalor com a condição de fronteira de Dirichlet em domínios limitados, como segue. Quando M^n é um espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$ e o operador é o Laplaciano, Cheng e Yang [20] provaram a desigualdade universal

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\lambda_i - \frac{(n-1)^2}{4} \right). \quad (1.34)$$

Para uma variedade Riemanniana pinçada M^n , $n \geq 3$, completa, não compacta, simplesmente conexa, Chen et al. em [15] utilizando um teorema da comparação, estabeleceram a seguinte desigualdade universal:

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\lambda_i - \frac{(n-1)^2 \kappa_2^2}{4} + \frac{(n-1)(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)}{2} \right). \quad (1.35)$$

Generalizando assim a desigualdade universal de Cheng e Yang. Recentemente, Li e Du [38] consideraram o problema de autovalor para o operador $\Delta_\eta = \Delta - \langle \nabla \eta, \nabla \rangle$, conhecido na literatura por Laplaciano deformado com função deformadora η , em um domínio limitado de uma variedade Cartan-Hadamard pinçada. Impondo uma condição ao tensor $Ric_\eta = Ric + \nabla^2 \eta$, nomeado de tensor curvatura Bakry-Émery-Ricci, do seguinte modo:

$$Ric_\eta(\partial_r, \partial_r) \leq -\frac{1}{2}(\partial_r \eta)^2 - b^2, \quad (1.36)$$

onde b é uma constante e r denota a função distância $r(x) = d(x, p)$ para um ponto fixo $p \in M \setminus \overline{\Omega}$, eles provaram

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\lambda_i - \frac{(n-1)^2 \kappa_2^2}{8} + \frac{4n\kappa_1^2 - 2n\kappa_2^2 + \kappa_2^2 - 4b^2}{8} \right). \quad (1.37)$$

1.7 Tensores livres de divergência

Os tensores livres de divergência têm importantes aplicações em Física e geometria Riemanniana, nesta seção apresentamos alguns exemplos de tensores com essa propriedade e que surgem naturalmente em estudos nessas áreas.

Gover e Orsted [28], inspirados nas leis de conservação da física e da Relatividade geral utilizaram tensores em que vale a fórmula da integração por parte e onde a propriedade de ser livre de divergência simula a utilização da segunda identidade de Bianchi e assim obtiveram uma identidade de Pohožev-Schöe generalizada.

Navarro [45] exemplifica a teoria relativística da gravitação, assumindo que a equação de campo é da seguinte forma:

$$G(g) = T,$$

em que T é o tensor energia-momento da matéria, g é a métrica de Lorentz do espaço-tempo. $G(g)$ é um 2-tensor adequado intrinsecamente construído a partir da métrica g , ou seja, é um 2-tensor natural. Por considerações físicas (leis de conservação infinitesimais), T é considerado livre de divergência, ou seja, a equação de campo é determinada pela escolha de um tensor natural livre de divergência G .

Serre [53] afirma que um gás compressível no espaço n -dimensional $n \geq 1$, é um gás descrito por uma densidade de massa $\rho \geq 0$, uma velocidade u e uma pressão $p \geq 0$. Esses campos obedecem as equações de Euler (conservação de massa e momento),

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_y(\rho u) = 0, \quad \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_y(\rho u \otimes u) + \nabla_y p = 0,$$

tal que $x = (t, y)$ e $d = 1 + n$. O tensor A abaixo é livre de divergência:

$$A(t, y) = \begin{pmatrix} \rho & \rho u^T \\ \rho u & \rho u \otimes u + p I_n \end{pmatrix}.$$

Em geometria Riemanniana a naturalidade dos tensores livres de divergência provém da relação $\mathcal{L}r = H_{\eta,T}$, em que $H_{\eta,T}$ é a curvatura média com peso generalizada de uma hipersuperfície em uma variedade Riemanniana $(M^n, g, e^{-\eta}dM)$, ver Mota [44].

Exemplos de tensores simétricos positivos definidos e livres de divergência sobre $(\mathbb{H}^n(-1), \langle, \rangle)$ são $T = -Ric$ e $T = -S$, em que $S = \frac{1}{n-2}(Ric - \frac{r}{2(n-1)}\langle, \rangle)$ é o tensor de Schouten de \langle, \rangle , para $n \geq 3$. Mais geralmente, estes tensores também podem ser considerados sobre variedades Cartan-Hadamard-Einstein pinçadas (M^n, \langle, \rangle) , visto que $Ric = \frac{R}{n}\langle, \rangle$ e pelo lema de Schur a curvatura escalar da variedade Einstein de dimensão $n \geq 3$ deve ser constante. Destacamos que uma variedade Einstein não compacta com $Ric = -(n-1)\langle, \rangle$ tem comportamento especial no infinito, ver Gicquaud et al. [24]. Outro exemplo é obtido a partir de $\hat{S} = S - tr(S)\langle, \rangle$ sobre variedades Cartan-Hadamard pinçadas, $n \geq 3$, nesse caso, temos $div\hat{S} = 0$, pois $divS = dtr(S)$.

Um interessante exemplo aparece em uma variedade Riemanniana M^n imersa isometricamente em outra variedade Riemanniana \bar{M} . Seja A e H o operador de forma e a curvatura média da imersão, respectivamente. A primeira transformação de Newton $P_1 : TM \rightarrow TM$, associada a segunda forma A , é definida por

$$P_1 = HI - A.$$

Esse tensor aparece naturalmente nos estudos da teoria variacional para o funcional $\mathcal{A}_1 = \int_M HdM$. Reilly, em 1973 provou que P_1 é livre de divergência. No caso $A \geq 0$, P_1 é positivo definido. Citamos também a Proposição 5.1 em [2] ou Navarro [45] para mais informações relacionadas ao tema.

1.8 Geodésicas e a aplicação exponencial

Sejam M^n uma variedade Riemanniana e $\gamma : I \rightarrow M^n$ uma curva em M^n . Dizemos que γ é uma geodésica se

$$\ddot{\gamma}(t) := \frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0, \quad \forall t \in I. \quad (1.38)$$

Quando γ é uma geodésica então $\|\dot{\gamma}\|^2 = \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$ é constante, isto é, γ tem velocidade constante. Assim, segue da equação (1.45) que o comprimento de arco de γ , a partir de $t = t_0$, é $\ell(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|(t - t_0)$. Quando $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ dizemos que γ está parametrizada pelo comprimento de arco ou normalizada. Dado $p \in M^n$ e $v \in T_pM^n$, a equação (1.38) tem uma única solução γ , definida num certo intervalo I , tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. As variedades Riemannianas completas são aquelas cujas geodésicas estão definidas para todo t , isto é, $I = \mathbb{R}$. A unicidade das geodésicas implica a propriedade da Homogeneidade, ou seja, para todo $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ vale a igualdade

$$\gamma_{av}(t) = \gamma_v(at). \quad (1.39)$$

Definição 1.13. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa. Para cada $p \in M^n$, a aplicação exponencial em p , denotada por \exp_p , é definida por*

$$\exp_p : T_pM \rightarrow M \quad v \mapsto \exp_p(v) = \gamma_v(1), \quad (1.40)$$

onde γ é a geodésica de M^n tal que $\gamma_v(0) = p$. Segue de 1.39 que $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$.

A aplicação \exp_p é uma função de classe C^∞ e um difeomorfismo de uma vizinhança $U \subset T_pM$ sobre sua imagem, ver [37, 48]. Se \exp_p não possui pontos críticos, então ela é uma aplicação de recobrimento.

1.9 Campos de Jacobi

Sejam M^n variedade Riemanniana e γ uma geodésica de M^n . Um campo J ao longo de γ é chamado campo de Jacobi se ele satisfaz a equação diferencial

$$\ddot{J} + R(J, \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = 0, \quad (1.41)$$

onde R é o tensor curvatura de M^n .

Definição 1.14. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana e $\gamma : [a, b] \rightarrow M^n$ uma geodésica de M^n . Uma variação de γ é uma função suave $\bar{\gamma} : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$, tal que $\bar{\gamma}(t, 0) = \gamma(t)$.*

O campo de vetores ao longo de γ definido por $J(t) := \frac{\partial \bar{\gamma}(t, 0)}{\partial s}$ é o campo variacional de γ . Se a variação $\bar{\gamma}$ é tal que, para cada s , a curva $\bar{\gamma}(\cdot, s)$ é uma geodésica, então o campo $J(t) := \frac{\partial \bar{\gamma}(t, s)}{\partial s}$ é um campo de Jacobi ao longo desta geodésica.

Um campo de Jacobi é determinado pelas condições iniciais $J(0)$, $\frac{DJ}{dt}(0)$, ver Manfredo [12]. Um campo de vetores tangenciais ao longo de uma curva γ é um campo de vetores V tal que $V(t)$ é um múltiplo de $\dot{\gamma}(t)$ para todo t , e um campo de vetores normais é um campo tal que $V(t) \perp \dot{\gamma}(t)$ para todo t . Além disso, $\dot{\gamma}(t)$ e $t\dot{\gamma}(t)$ são campos de Jacobi ao longo de γ . O primeiro tem derivada zero e nunca se anula; o segundo é nulo se, e somente se, $t = 0$. Devido a esses fatos, só consideramos campos de Jacobi ao longo de γ que são normais.

Como exemplo, consideramos M uma variedade Riemanniana, $k \in \mathbb{R}$ e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica normalizada. Suponha que $K_M(\dot{\gamma}(t), X) = k$ para $0 \leq t \leq a$ e todo $X \in T_{\gamma(t)}M$ não colinear com $\dot{\gamma}(t)$. Então sabemos que, ao longo de γ , o tensor curvatura R de M é dado, para X, Y, Z campos ao longo de γ , por

$$R(X, Y)Z = k\{\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y\},$$

de modo que a equação de Jacobi se reduz a (lembre que $\langle J, \dot{\gamma} \rangle = 0$).

$$\ddot{J} + KJ = 0.$$

Dado $w \in T_{\gamma(0)}M$ tal que $\langle w, \dot{\gamma}(0) \rangle = 0$, seja $t \mapsto w(t)$ o transporte paralelo de w ao longo de γ . Se $s_k : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ é a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} \ddot{s}_k(t) + ks_k(t) &= 0 \\ s_k(0) &= 0, \quad \dot{s}_k(0) = 1. \end{cases}$$

é imediato verificar que

$$J(t) = s_k(t)w(t),$$

é o (único) campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $\dot{J}(0) = w$. Note ainda que

$$s_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-kt}) & \text{se } k < 0, \\ t & \text{se } k = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{kt}) & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

1.10 Teorema da comparação de Sturm

Por conveniência, enunciamos nesta seção os teorema da comparação de Sturm para equações de Jacobi e também o Teorema de Sturm-Liouville.

Teorema 1.5 (Teorema de comparação de Sturm, ver [56], p. 104). *Para $i = 1, 2$, seja f_i soluções não triviais de*

$$(p(x)f_i'(x))' + b_i(x)f_i(x) = 0,$$

onde $0 < p \in C^1$, b_1 e b_2 são contínuas e $b_1 \geq b_2$ para todo x . Se $x_1 < x_2$ são dois zeros consecutivos de f_2 , então f_1 se anula pelo menos uma vez em (x_1, x_2) , a menos que $b_1(x) = b_2(x)$ e $f_2(x) = kf_1(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

Agora destacamos o conhecido problema de autovalor de Sturm-Liouville.

$$\begin{aligned} -(py')' + qy &= \lambda\rho y \text{ em } [a, b], \\ y(a) = y(b) &= 0. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Os coeficientes p e q e a "função peso" ρ cumprem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} p \in C^1[a, b], \quad q, \rho \in C[a, b], \\ p(x) \geq d > 0 \text{ e } q(x) + c_2\rho(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \\ \rho(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Teorema 1.6 (Sturm-Liouville, ver, e.g., [35], p. 174-175). *Com as hipóteses (1.43), o problema de autovalor de Sturm-Liouville (1.42) possui uma infinidade de autofunções linearmente independentes $u_n \in C^2[a, b]$ com autovalores $\lambda_n \in \mathbb{R}$, que satisfazem*

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho u_n u_m = \delta_{nm} \\ \lambda_1 < \dots < \lambda_k < \dots \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Além disso, a menos de uma constante, existe apenas uma autofunção u_n associada a cada λ_n e u_n tem exatamente $n - 1$ zeros em (a, b) .

Teorema 1.7. (Teorema de Rayleigh, ver [35, p. 177]) *Para qualquer $\phi \in \mathcal{H}_0^1(a, b)$, $\phi \neq 0$, o primeiro autovalor λ_1 do problema (1.42) satisfaz*

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_a^b (p(\phi')^2 + q\phi^2) dx}{\int_a^b \rho\phi^2 dx}. \tag{1.44}$$

Igualdade ocorre se, e somente, ϕ é uma autofunção de λ_1 .

1.11 Variedades Cartan-Hadamard

Um resultado importante em variedades Riemannianas completas de curvatura não-positiva é o teorema de Cartan-Hadamard a seguir.

Teorema 1.8 (Teorema de Cartan-Hadamard, ver e.g. [55], p. 239). *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura $K \leq 0$. Então M^n é difeomorfa ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , mais precisamente, $\exp_p : T_p M \rightarrow M^n$ é um difeomorfismo de classe C^∞ para cada $p \in M^n$.*

Uma variedade Riemanniana que satisfaça as hipóteses do Teorema 1.8, isto é, uma variedade Riemanniana completa simplesmente conexa de curvatura não positiva é chamada de variedade Cartan-Hadamard. O Teorema 1.8 assegura que se M^n é uma variedade Cartan-Hadamard, então M^n tem a mesma topologia e estrutura diferenciável do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Segue desse teorema que, qualquer par de pontos distintos de uma variedade Cartan-Hadamard é ligado por um único segmento geodésico.

Os exemplos mais simples de variedades Cartan-Hadamard são: o espaço Euclidiano e o espaço Hiperbólico, ambos com suas respectivas métricas canônicas. Mais exemplos podem ser encontradas em [55].

Um subconjunto W de uma variedade Riemanniana M^n é chamado de convexo, se para cada $p, q \in W$ existir uma única geodésica minimizante de p a q em M^n contida em W , ver [5]. Esta definição corresponde a de "fortemente convexo" dada por Cheeger-Ebin.

1.12 Função distância

O produto interno positivo definido tomado sobre o espaço tangente de uma variedade Riemanniana induz o conceito de comprimento de uma curva γ diferenciável por partes, do seguinte modo,

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt. \quad (1.45)$$

e o comprimento de arco de γ é

$$\ell(\gamma(t)) = \int_a^t |\dot{\gamma}(s)| ds. \quad (1.46)$$

Sejam p e q em M^n , considere o conjunto C_{pq} de todas as curvas $\gamma : [a, b] \rightarrow M^n$ suaves por partes tal que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$ defini-se então a distância entre p e q como segue.

Definição 1.15. *Dados p e q em M^n , a distância Riemanniana de p a q , denotada por $d(p, q)$ é dada por*

$$d(p, q) := \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in C_{pq}\}. \quad (1.47)$$

Note que a função distância $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

O conjunto $B_r(p) = \{q \in M; d(p, q) < r\}$ é chamado bola métrica de centro p e raio $r > 0$, e seu fecho é dado por $\bar{B}_r(p) = \{q \in M; d(p, q) \leq r\}$. Além disso, a distância entre os subconjuntos $A, B \subset M^n$ é $d(A; B) := \inf\{d(p, q) \mid p \in A, q \in B\}$.

Sejam M^n uma variedade Cartan-Hadamard e $q \in M^n$. Pelo Teorema 1.8 podemos definir a aplicação inversa $\exp_q^{-1} : M^n \rightarrow T_q M$ da aplicação exponencial e assim obter a seguinte relação entre a distância Riemanniana e a aplicação exponencial

$$d(p, q) = \|\exp_q^{-1} p\|. \quad (1.48)$$

Sendo \exp_q^{-1} uma função de classe C^∞ segue da equação (1.48) que a função

$$r_q : M \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } p \mapsto r_q := \frac{1}{2} d^2(p, q),$$

é também de classe C^∞ .

Uma função f sobre uma variedade Riemanniana M^n é convexa quando a Hessiana é positiva semidefinida, ou equivalentemente se $\nabla^2 f(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = (f \circ \gamma)'' \geq 0$ para cada geodésica em M^n . Para calcularmos a Hessiana da função distância $r(x) = d(x, p)$, podemos proceder do seguinte modo. Considere $\gamma(t)$ uma geodésica tal que $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ e $\gamma(0) = p$. Seja $J(t)$ um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$, segue que

$$\nabla^2 r(J(t), J(t)) = \langle \nabla_{J(t)} \partial r, J(t) \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\gamma}}{\partial s \partial t}, J \right\rangle|_{(t,0)} = \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\gamma}}{\partial t \partial s}, J \right\rangle|_{(t,0)} = \langle \dot{J}(t), J(t) \rangle.$$

Lema 1.3. *A função distância $r(x) = d(x, p)$ é positiva e suave em $M^n \setminus \{p\}$.*

Demonstração. Seja $p \in M$, e seja (x^i) coordenadas normais centrado em p , deste modo, existe uma bola geodésica fechada $\bar{B}_\varepsilon(p)$ de raio ε em p e constantes positivas c e C tal que $c|V|_{\bar{g}} \leq |V|_g \leq C|V|_{\bar{g}}$ sempre que $V \in T_q M$ e $q \in \bar{B}_\varepsilon(p)$. Segue da definição de comprimento que para qualquer curva em C_{pq} com a imagem contida em $\bar{B}_\varepsilon(p)$.

$$c\ell_{\bar{g}}(\gamma) \leq \ell_g(\gamma) \leq C\ell_{\bar{g}}(\gamma).$$

Se $x \neq p$, podemos escolher ε tal que $x \notin \bar{B}_\varepsilon(p)$. Então qualquer curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M^n$ em C_{px} deve passar pela esfera geodésica $\partial B_\varepsilon(p)$. De fato, o complemento da esfera é desconexo, e assim p, x pertencem a componentes diferentes. Denote t_0 o primeiro tempo tal $\gamma(t_0)$ pertence a $\partial B_\varepsilon(p)$, segue que

$$d(x, p) \geq \ell_g(\gamma) \geq \ell_g(\gamma|_{[a, t_0]}) \geq c\ell_{\bar{g}}(\gamma|_{[a, t_0]}) \geq d_{\bar{g}}(\gamma(t_0), p) = c\varepsilon > 0.$$

Como a \exp_p é um difeomorfismo para todo $p \in M^n$. Temos como no caso Euclidiano que existe apenas uma geodésica que passa pelos pontos p e q , com $p \neq q$. E por conseguinte, também mostra que a função distância é suave em $M^n \setminus \{p\}$. \square

Além disso, podemos estabelecer funções que trabalham como uma função distância, ver Petersen em [48]. Para tanto, definimos $r : O \rightarrow \mathbb{R}$ em um subconjunto aberto O em (M^n, \langle, \rangle) . A função r é uma função distância se $|\nabla r| = 1$ sobre O . Dada a função $r : O \rightarrow \mathbb{R}$ fixada sobre um subconjunto aberto O de (M^n, \langle, \rangle) , o gradiente ∇r será denotado por ∂r . O conjunto de nível para r é denotado por $O_r = \{x \in O; r(x) = r\}$, e a métrica induzida sobre O_r é g_r . Quando $r : O \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função distância, então $\nabla_{\partial r} \partial r = 0$. Uma curva $\gamma \in C_{pq}$ é um segmento se $\ell(\gamma) = d(p, q)$ e γ é parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco, ou seja, $|\dot{\gamma}|$ é constante.

Lema 1.4. *Se $r : O \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função distância suave e O um subconjunto limitado em (M^n, \langle, \rangle) , então a curva integral para ∂_r são segmentos em O_g . Além disso, se $c \in C_{pq}$ satisfaz $\ell(c) = r(c(1)) - r(c(0))$, então $c = \sigma \circ \phi$, em que σ é a curva integral de ∂_r iniciando em $c(0)$ e $\phi(s) = \int_0^s |\dot{c}| dt$.*

No que segue, denotaremos por $r : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = d(x, o)$ a função distância a partir de um ponto fixado $o \in M^n \setminus \bar{\Omega}$, que é diferenciável, com $|\nabla r| = 1$ e $\nabla r = \partial_r$, onde ∂_r é o vetor velocidade das geodésicas radiais dadas pelas curvas $r \mapsto \exp_o(rv)$, para um vetor v fixado em $T_o M$ e com \exp denotando a aplicação exponencial. Além disso, $\nabla r(\gamma(t)) = \gamma'(t)$, onde $\gamma'(t)$ é o único segmento geodésico minimizante ligando $\gamma(t)$ a o .

Definição 1.16. *Um campo de vetores X tal que $\nabla_{\partial r} X = 0$ é chamado de campo radialmente paralelo, onde r é uma função distância suave.*

Definição 1.17. *Diremos que um tensor T é radialmente paralelo se ele é paralelo na direção radial, isto é, $\nabla_{\partial r} T = 0$.*

Capítulo 2

Estimativas de autovalores para o operador de Cheng-Yau deformado sobre domínios limitados em variedades Cartan-Hadamard pinçadas.

Neste capítulo, apresentamos a demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2 e assim estabeleceremos as estimativas para os autovalores do operador de Cheng-Yau deformado em variedades Cartan-Hadamard pinçadas.

2.1 Resultados Auxiliares

Nesta seção, estabeleceremos as ferramentas necessárias para trabalhar com o operador definido na equação (1.15) o que nos permitirá obter resultados mais gerais. A chave para provar os dois principais teoremas desta tese baseia-se na Proposição 2.4 que é uma ligeira modificação da Proposição 1 em [27]. Acreditamos que as ferramentas aqui apresentadas sejam de interesse independente.

Lema 2.1 (ver [48], p. 242-243). *Seja $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa de curvatura não positiva. Fixe uma origem $o \in M^n$ e considere $r(x)$ a função distância a partir de o , então a função r é convexa.*

Demonstração. Nas hipóteses do lema, podemos considerar um campo de Jacobi $J(t)$ não-trivial ao longo de uma geodésica normalizada sem pontos conjugados $\gamma : [0, a] \rightarrow M^n$, com $\gamma(0) = o$ e $J(0) = 0$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Então

$$\nabla^2 r(J(a), J(a)) = \langle \dot{J}(a), J(a) \rangle \geq \int_0^a |\dot{J}(t)| dt > 0$$

De fato, considerando a função $t \mapsto \frac{1}{2}|J(t)|^2$, em que J é um campo de Jacobi escolhido ao longo de $\gamma(t) = \exp_o(tv)$ tal que $J(0) = 0$ e $\dot{J}(0) = w$ para $0 \neq w \in T_v(T_oM)$ com $|D\exp_o(w)| = |J(1)|$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |J(t)|^2 \right) &= \langle \dot{J}, J \rangle, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} |J(t)|^2 \right) &= \langle \ddot{J}, J \rangle + \langle \dot{J}, \dot{J} \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle R(x, y)y, x \rangle \leq 0$ para todos vetores tangentes x e y , teremos

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} |J(t)|^2 \right) = -\langle R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, J \rangle + |\dot{J}|^2 \geq |\dot{J}|^2.$$

Integrando a desigualdade e usando que $J(0) = 0$, obtemos

$$\langle \dot{J}(t), J(t) \rangle \geq \int_0^t |\dot{J}(s)|^2 ds.$$

Observando que $J(a)$ é arbitrário concluímos que a Hessiana da função distância r é positiva. \square

Um importante lema que será usado na prova da Proposição 2.1 é um resultado bem conhecido em geometria de comparação. Sua prova pode ser encontrada em [48, p. 255].

Lema 2.2. (*Comparação de Rauch*) *Assuma que $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ satisfaz $c \leq K \leq C$. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle = dr^2 + g_r$ representa a métrica em coordenadas polares, então*

$$\frac{sn'_C(r)}{sn_C(r)} g_r \leq \nabla^2 r \leq \frac{sn'_c(r)}{sn_c(r)} g_r,$$

em que $sn_\kappa(r)$ denota a única solução para

$$\ddot{x}(r) + \kappa \cdot x(r) = 0 \quad \text{com} \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Em particular, $\frac{sn'_\kappa(r)}{sn_\kappa(r)} = \sqrt{-\kappa} \frac{\cosh(\sqrt{-\kappa}r)}{\sinh(\sqrt{-\kappa}r)}$ para $\kappa < 0$, e $\frac{sn'_\kappa(r)}{sn_\kappa(r)} = \frac{1}{r}$ para $\kappa = 0$.

No que se segue, $\Omega \subset M^n$, $n \geq 2$, é um domínio limitado em uma variedade Cartan-Hadamard pinçada, conforme descrito em nossa introdução.

Nossa primeira proposição estabelece o teorema de comparação de Rauch para o operador de Cheng-Yau, além de duas estimativas que serão utilizadas na fórmula tipo Bochner para esse operador.

Proposição 2.1. *Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \bar{\Omega}$ e seja $r(x)$ a função distância a partir de o . Considere T um $(1, 1)$ -tensor simétrico positivo definido sobre M^n tal que ∂_r é um autovetor de T , e sejam $C = -\kappa_2^2$ e $c = -\kappa_1^2$. As seguintes afirmações são verdadeiras em Ω :*

$$1. \quad (n-1)\varepsilon \frac{sn'_C(r)}{sn_C(r)} \leq \square r \leq (n-1)\delta \frac{sn'_c(r)}{sn_c(r)}.$$

$$2. \quad \langle \nabla^2 r, \nabla^2 r \circ T \rangle \leq (n-1)\delta \left(\frac{sn'_c(r)}{sn_c(r)} \right)^2.$$

$$3. \quad R_T(\partial_r, \partial_r) \leq -\varepsilon(n-1)\kappa_2^2.$$

Demonstração. Tome $x \in \Omega$ e complete ∂_r para uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n = \partial_r\}$ para $T_x M$ tal que $T e_i = \psi_i e_i$. Note que $\varepsilon \leq \psi_i \leq \delta$ sobre Ω , para $i = 1, \dots, n$. assim,

$$\square r = \langle \nabla^2 r, T \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla^2 r(e_i), T(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \langle \nabla^2 r(e_i), e_i \rangle.$$

A convexidade da função distância $r(x)$ nos garante que o Hessiano é semidefinido positivo, de modo que

$$\varepsilon \Delta r = \varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla^2 r(e_i), e_i \rangle \leq \square r \leq \delta \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla^2 r(e_i), e_i \rangle = \delta \Delta r.$$

Logo, a primeira afirmação segue do Lema 2.2. Para provar a segunda afirmação, calculamos

$$\langle \nabla^2 r, \nabla^2 r \circ T \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla^2 r(e_i), \nabla^2 r \circ T(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \langle \nabla^2 r(e_i), \nabla^2 r(e_i) \rangle.$$

Assim, novamente usamos que $r(x)$ é uma função convexa e que $\psi_i \leq \delta$ para obter

$$\langle \nabla^2 r, \nabla^2 r \circ T \rangle \leq \delta |\nabla^2 r|^2.$$

Usando o Lema 2.2 obtemos a segunda afirmação. Para o terceiro item, temos

$$\begin{aligned} R_T(\partial_r, \partial_r) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(e_i, \partial_r) \partial_r, T(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \langle R(e_i, \partial_r) \partial_r, e_i \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} -\psi_i \kappa_2^2 \leq -\varepsilon(n-1) \kappa_2^2. \end{aligned}$$

O que completa a prova da proposição. \square

Para a segunda proposição, é conveniente considerar a seguinte constante, que depende da dimensão da variedade e de como o tensor T é limitado no domínio:

$$a(n, \varepsilon, \delta) := -(n-1)^2 \varepsilon^2 + 2(n-1) \delta^2.$$

Proposição 2.2. *Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \bar{\Omega}$ e considere $r(x)$ a função distância a partir de o . Seja T um $(1, 1)$ -tensor simétrico positivo definido em M^n tal que ∂_r é um autovetor de T , e u_i uma função $L^2(\Omega, \text{dm})$ -normalizada. Se T for radialmente paralelo, então*

1. Para $a(n, \varepsilon, \delta) \leq 0$, é válido que

$$\int_{\Omega} u_i^2 \left(-(\square r)^2 - 2 \langle \nabla \square r, T \partial_r \rangle \right) \text{dm} \leq -(n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2 + 2(n-1) (\delta^2 \kappa_1^2 - \varepsilon^2 \kappa_2^2).$$

2. Para $a(n, \varepsilon, \delta) > 0$, considere $d = \text{dist}(\Omega, o)$, é válido que

$$\int_{\Omega} u_i^2 \left(-(\square r)^2 - 2 \langle \nabla \square r, T \partial_r \rangle \right) \text{dm} \leq -(n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2 + 2(n-1) (\delta^2 \kappa_1^2 - \varepsilon^2 \kappa_2^2) + \frac{a(n, \varepsilon, \delta)}{d^2}.$$

Demonstração. Começamos estimando a expressão $-(\square r)^2 - 2 \langle \nabla \square r, T \partial_r \rangle$. Para isso, usamos que T é radialmente paralelo, ou seja, $\nabla_{\partial_r} T$ é nulo, de modo que, da fórmula tipo Bochner para o operador Cheng-Yau (1.20), obtemos

$$-\langle \nabla \square r, \partial_r \rangle = R_T(\partial_r, \partial_r) + \langle \nabla^2 r, \nabla^2 r \circ T \rangle.$$

Como $T\partial_r = \psi_n \partial_r$, da segunda e terceira asserções da Proposição 2.1, temos

$$-\langle \nabla \square r, T\partial_r \rangle = -\psi_n \langle \nabla \square r, \partial_r \rangle \leq -(n-1)\varepsilon^2 \kappa_2^2 + (n-1)\delta^2 \left(\frac{sn'_{-\kappa_1^2}(r)}{sn_{-\kappa_1^2}(r)} \right)^2. \quad (2.1)$$

Existem três casos a considerar:

(a) $0 < \kappa_2 \leq \kappa_1$: Segue da Inequação (2.1) que

$$-\langle \nabla \square r, T\partial_r \rangle \leq (n-1)\delta^2 \kappa_1^2 \frac{\cosh^2(\kappa_1 r)}{\sinh^2(\kappa_1 r)} - (n-1)\varepsilon^2 \kappa_2^2.$$

Então, utilizando a primeira afirmação da Proposição 2.1, nós estimamos a expressão

$$\begin{aligned} & -(\square r)^2 - 2\langle \nabla \square r, T\partial_r \rangle \\ & \leq -(n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2 \frac{\cosh^2(\kappa_2 r)}{\sinh^2(\kappa_2 r)} + 2(n-1)\delta^2 \kappa_1^2 \frac{\cosh^2(\kappa_1 r)}{\sinh^2(\kappa_1 r)} - 2(n-1)\varepsilon^2 \kappa_2^2 \\ & = -(n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2 - \frac{(n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2}{\sinh^2(\kappa_2 r)} + 2(n-1)\delta^2 \kappa_1^2 + \frac{2(n-1)\delta^2 \kappa_1^2}{\sinh^2(\kappa_1 r)} - 2(n-1)\varepsilon^2 \kappa_2^2 \\ & = -(n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2 + 2(n-1)(\delta^2 \kappa_1^2 - \varepsilon^2 \kappa_2^2) + \left[-\frac{(n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2}{\sinh^2(\kappa_2 r)} + \frac{2(n-1)\delta^2 \kappa_1^2}{\sinh^2(\kappa_1 r)} \right]. \end{aligned}$$

Visto que $0 < \kappa_2 \leq \kappa_1$ e $r > 0$, temos

$$\frac{\kappa_1^2}{\sinh^2(\kappa_1 r)} \leq \frac{\kappa_2^2}{\sinh^2(\kappa_2 r)}.$$

Assim,

$$-\frac{(n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2}{\sinh^2(\kappa_2 r)} + \frac{2(n-1)\delta^2 \kappa_1^2}{\sinh^2(\kappa_1 r)} \leq (-(n-1)^2 \varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2) \frac{\kappa_1^2}{\sinh^2(\kappa_1 r)}. \quad (2.2)$$

(b) $0 = \kappa_2 < \kappa_1$: Novamente como na primeira afirmação da Proposição 2.1 e Inequação (2.1), nós estimamos a expressão

$$\begin{aligned} -(\square r)^2 - 2\langle \nabla \square r, T\partial_r \rangle & \leq -\frac{(n-1)^2 \varepsilon^2}{r^2} + 2(n-1)\delta^2 \kappa_1^2 \frac{\cosh^2(\kappa_1 r)}{\sinh^2(\kappa_1 r)} \\ & = 2(n-1)\delta^2 \kappa_1^2 + \left[-\frac{(n-1)^2 \varepsilon^2}{r^2} + \frac{2(n-1)\delta^2 \kappa_1^2}{\sinh^2(\kappa_1 r)} \right]. \end{aligned}$$

Como $0 < \kappa_1$ e $r > 0$, temos

$$\frac{\kappa_1^2}{\sinh^2(\kappa_1 r)} \leq \frac{1}{r^2}. \quad (2.3)$$

Assim,

$$-\frac{(n-1)^2 \varepsilon^2}{r^2} + \frac{2(n-1)\delta^2 \kappa_1^2}{\sinh^2(\kappa_1 r)} \leq (-(n-1)^2 \varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2) \frac{\kappa_1^2}{\sinh^2(\kappa_1 r)}. \quad (2.4)$$

(c) $0 = \kappa_2 = \kappa_1$: Novamente utilizando a primeira afirmação da Proposição 2.1 e a Inequação (2.1), nós estimamos a expressão

$$-(\square r)^2 - 2\langle \nabla \square r, T \partial_r \rangle \leq \left[-(n-1)^2 \varepsilon^2 + 2(n-1)\delta^2 \right] \frac{1}{r^2}. \quad (2.5)$$

Com as Inequações (2.2), (2.4) e (2.5) em mente, obtemos imediatamente a primeira estimativa integral da proposição para $a(n, \varepsilon, \delta) \leq 0$. Para o caso de $a(n, \varepsilon, \delta) > 0$, primeiramente notamos que

$$\int_{\Omega} u_i^2 \frac{a(n, \varepsilon, \delta)}{r^2} dm \leq \frac{a(n, \varepsilon, \delta)}{d^2}. \quad (2.6)$$

em que $d = \text{dist}(\Omega, o)$ e $0 < d \leq r(x)$ para todo $x \in \Omega$. Completamos agora a nossa demonstração a partir das inequações (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6). \square

Proposição 2.3. *Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \bar{\Omega}$ e considere $r(x)$ uma função distância a partir de o . Seja T um $(1, 1)$ -tensor simétrico positivo definido em M^n tal que ∂_r seja um autovetor de T , e u_i uma função $L^2(\Omega, dm)$ -normalizada. Então,*

$$\int_{\Omega} u_i^2 \square r \langle T \partial_r, \nabla \eta \rangle dm \leq C_0(n-1)\left(\kappa_1 + \frac{1}{d}\right),$$

em que $\eta \in C^\infty(\Omega)$, $d = \text{dist}(\Omega, o)$ e $C_0 = \delta^2 \max_{\bar{\Omega}} |\dot{\eta}|$.

Demonstração. Utilizando a primeira afirmação da Proposição 2.1, estimamos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i^2 \square r \langle T \partial_r, \nabla \eta \rangle dm &\leq \left(\int_{\Omega} u_i^2 (\square r)^2 dm \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u_i^2 \langle T \partial_r, \nabla \eta \rangle^2 dm \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \delta \max_{\bar{\Omega}} |\dot{\eta}| \left(\int_{\Omega} u_i^2 (\square r)^2 dm \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_0(n-1) \left(\int_{\Omega} u_i^2 \left(\frac{sn'_{-\kappa_1^2}(r)}{sn_{-\kappa_1^2}(r)} \right)^2 dm \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Existem dois casos a serem considerados:

(a) $0 < \kappa_2 \leq \kappa_1$ e $0 = \kappa_2 < \kappa_1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i^2 \square r \langle T \partial_r, \nabla \eta \rangle dm &\leq C_0(n-1)\kappa_1 \left(\int_{\Omega} u_i^2 \frac{\cosh^2(\kappa_1 r)}{\sinh^2(\kappa_1 r)} dm \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_0(n-1)\kappa_1 + C_0(n-1) \left(\int_{\Omega} u_i^2 \frac{\kappa_1^2}{\sinh^2(\kappa_1 r)} dm \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_0(n-1) \left(\kappa_1 + \left(\int_{\Omega} u_i^2 \frac{\kappa_1^2}{\sinh^2(\kappa_1 r)} dm \right)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

(b) $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$:

$$\int_{\Omega} u_i^2 \square r \langle T \partial_r, \nabla \eta \rangle dm \leq C_0(n-1) \left(\int_{\Omega} u_i^2 \frac{1}{r^2} dm \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Novamente, argumentamos como na prova da Proposição 2.2 para obtermos a requerida estimativa integral. \square

Finalizamos esta seção estabelecendo uma desigualdade quadrática universal para os autovalores do Problema (1.22), essa desigualdade é uma ligeira modificação da Proposição 1 em [27], e assim obtemos a ferramenta necessária para realizar as demonstrações.

Proposição 2.4. *Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \bar{\Omega}$ e considere $r(x)$ a função distância a partir de o . Seja λ_i o i -ésimo autovalor do Problema (1.22), e u_i a correspondente autofunção $L^2(\Omega, \text{dm})$ -normalizada. Então,*

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - \int_{\Omega} u_i^2 ((\mathcal{L}r)^2 + 2\langle T\partial_r, \nabla \mathcal{L}r \rangle) \text{dm} \right).$$

Demonstração. A Proposição 1 em [27] nos diz que

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_{\Omega} u_i^2 T(\nabla h, \nabla h) \text{dm} \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_{\Omega} \{u_i \mathcal{L}h + 2T(\nabla h, \nabla u_i)\}^2 \text{dm}$$

para qualquer $h \in \mathcal{C}^3(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\partial\Omega)$. Tomando $h = r$, e observando que $\varepsilon \leq T(\partial_r, \partial_r) \leq \delta$, obtemos

$$\varepsilon \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_{\Omega} \{u_i \mathcal{L}r + 2T(\partial_r, \nabla u_i)\}^2 \text{dm}. \quad (2.7)$$

A integral em (2.7) pode ser estimada como segue

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{u_i^2 (\mathcal{L}r)^2 + 4u_i \mathcal{L}r T(\partial_r, \nabla u_i) + 4T(\partial_r, \nabla u_i)^2\} \text{dm} \\ &= \int_{\Omega} \{u_i^2 (\mathcal{L}r)^2 + 2T(\partial_r, \mathcal{L}r \nabla u_i^2) + 4\langle \partial_r, T(\nabla u_i) \rangle^2\} \text{dm} \\ &\leq \int_{\Omega} \{u_i^2 (\mathcal{L}r)^2 + 2T(\partial_r, \nabla(u_i^2 \mathcal{L}r) - u_i^2 \nabla \mathcal{L}r)\} \text{dm} + 4 \int_{\Omega} |T(\nabla u_i)|^2 \text{dm}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aplicando a fórmula de integração por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} \{u_i^2 (\mathcal{L}r)^2 + 2T(\partial_r, \nabla(u_i^2 \mathcal{L}r))\} \text{dm} = - \int_{\Omega} u_i^2 (\mathcal{L}r)^2 \text{dm}. \quad (2.9)$$

Além disso, pelo Lema 1.1 temos que

$$\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 \text{dm} \leq \int_{\Omega} \langle \nabla u_i, T(\nabla u_i) \rangle \text{dm} = \lambda_i.$$

Então,

$$\int_{\Omega} |T(\nabla u_i)|^2 \text{dm} \leq \delta^2 \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 \text{dm} \leq \frac{\delta^2 \lambda_i}{\varepsilon}. \quad (2.10)$$

Usando (2.8), (2.9) e (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{u_i^2 (\mathcal{L}r)^2 + 4u_i \mathcal{L}r T(\partial_r, \nabla u_i) + 4T(\partial_r, \nabla u_i)^2\} \text{dm} \\ &\leq - \int_{\Omega} u_i^2 \{(\mathcal{L}r)^2 + 2T(\partial_r, \nabla \mathcal{L}r)\} \text{dm} + 4 \frac{\delta^2 \lambda_i}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.7) obtemos a estimativa da proposição. \square

2.2 Prova dos Teoremas 2.1 e 2.2

Agora estamos preparados para provar nossos dois teoremas.

Teorema 2.1. *Seja λ_i o i -ésimo autovalor de \mathcal{L} em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ com a condição de fronteira de Dirichlet. Se a função deformadora η é radialmente constante e $T(\nabla \ln x_n) = \psi \nabla \ln x_n$, para alguma função radialmente constante ψ . Então, para qualquer número inteiro positivo k , temos*

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - (n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa^2 \right).$$

Além disso, o primeiro autovalor satisfaz $\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\varepsilon}{4\delta^2} (n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa^2$.

Demonstração. Iniciamos provando o resultado para o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$ com curvatura constante -1 , i.e., o semi espaço aberto $x_n > 0$ com a métrica $g_{ij} = x_n^{-2} \delta_{ij}$. Para esse caso, temos

$$\nabla \ln x_n = g^{ij} \partial_i \ln x_n \partial_j = x_n \partial_n \quad \text{e} \quad |\nabla \ln x_n| = 1.$$

Por hipóteses $T(\nabla \ln x_n) = \psi \nabla \ln x_n = \psi x_n \partial_n$ e $\partial_n \eta = 0$, assim

$$\langle \nabla \eta, T(\nabla \ln x_n) \rangle = \langle g^{ij} \partial_i \eta \partial_j, \psi x_n \partial_n \rangle = 0.$$

Recorde que $\operatorname{div}(a^i \partial_i) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \partial_i (\sqrt{\det(g_{ij})} a^i)$, e por suposição $\partial_n \psi = 0$, deste modo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ln x_n) &= \operatorname{div}(T(\nabla \ln x_n)) - \langle \nabla \eta, T(\nabla \ln x_n) \rangle \\ &= \operatorname{div}(\psi x_n \partial_n) \\ &= x_n^n \partial_n (\psi x_n^{1-n}) \\ &= (1-n)\psi. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle T(\nabla \ln x_n), \nabla \mathcal{L}(\ln x_n) \rangle &= \langle \psi x_n \partial_n, (1-n)\nabla \psi \rangle \\ &= (1-n)\psi x_n \partial_n \psi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Uma vez que $\ln x_n$ trabalha como uma função de distância em $\mathbb{H}^n(-1)$, podemos tomar $r = \ln x_n$ na Proposição 2.4 para obter

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - \int_{\Omega} u_i^2 (1-n)^2 \psi^2 \, \mathrm{d}m \right).$$

Como $\varepsilon \leq \langle T(\nabla \ln x_n), \nabla \ln x_n \rangle = \psi$, temos $-\psi^2 \leq -\varepsilon^2$, que é o suficiente para obter a próxima desigualdade

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - (n-1)^2 \varepsilon^2 \right).$$

Agora, ao reescalonar a métrica por um fator κ^{-2} , obtemos a desigualdade anterior para o caso de $\mathbb{H}^n(-\kappa^2)$, como segue

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - (n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa^2 \right).$$

Além disso, a estimativa quadrática (2.7) garante que

$$\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - (n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa^2 \geq 0,$$

para $i \in \{1, 2, \dots\}$. Então, obtemos $\lambda_1 \geq \frac{\varepsilon}{4\delta^2} (n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa^2$. \square

Teorema 2.2. *Seja λ_i o i -ésimo autovalor do operador de Cheng-Yau deformado com função deformadora η sobre um domínio limitado $\Omega \subset M^n$ com a condição de fronteira de Dirichlet. Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \bar{\Omega}$, e considere $r(x)$ uma função distância a partir de o . Se T é radialmente paralelo e tem ∂_r como um autovetor, então, para qualquer número inteiro positivo k , temos:*

1. Para $a(n, \varepsilon, \delta) \leq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - (n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(n-1)(\delta^2 \kappa_1^2 - \varepsilon^2 \kappa_2^2) + 2C_0(n-1) \left(\kappa_1 + \frac{1}{d} \right) + C_1 \right). \end{aligned}$$

2. Para $a(n, \varepsilon, \delta) > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - (n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(n-1)(\delta^2 \kappa_1^2 - \varepsilon^2 \kappa_2^2) + 2C_0(n-1) \left(\kappa_1 + \frac{1}{d} \right) + C_1 + \frac{a(n, \varepsilon, \delta)}{d^2} \right). \end{aligned}$$

Em que $d = \text{dist}(\Omega, o)$, $C_0 = \delta^2 \max_{\bar{\Omega}} |\dot{\eta}|$ e $C_1 = \delta^2 \max_{\bar{\Omega}} (2\ddot{\eta} - \dot{\eta}^2)$, enquanto que $\dot{\eta}$ e $\ddot{\eta}$ representam, respectivamente, a primeira e a segunda derivada radial de $\eta(x)$.

Demonstração. Pela Proposição 2.4, nos resta estimar a integral

$$- \int_{\Omega} u_i^2 ((\mathcal{L}r)^2 + 2\langle T\partial_r, \nabla \mathcal{L}r \rangle) dm$$

para o caso particular do operador de Cheng-Yau deformado $\mathcal{L}r = \square r - \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle$. Primeiro, calculamos

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}r)^2 + 2\langle T\partial_r, \nabla \mathcal{L}r \rangle \\ &= (\square r)^2 - 2\square r \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle + \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle^2 + 2\langle T\partial_r, \nabla \square r \rangle - 2\langle T\partial_r, \nabla \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle \rangle \\ &= (\square r)^2 + 2\langle T\partial_r, \nabla \square r \rangle - 2\square r \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle - 2\langle T\partial_r, \nabla \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle \rangle + \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} u_i^2 ((\mathcal{L}r)^2 + 2\langle T\partial_r, \nabla \mathcal{L}r \rangle) dm \\
& = \int_{\Omega} u_i^2 \left(-(\square r)^2 - 2\langle T\partial_r, \nabla \square r \rangle \right) dm + 2 \int_{\Omega} u_i^2 \square r \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle dm \\
& \quad + \int_{\Omega} u_i^2 \left(2\langle T\partial_r, \nabla \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle \rangle - \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle^2 \right) dm.
\end{aligned}$$

Por hipótese, T é radialmente paralelo, ou seja, $\nabla_{\partial_r} T = 0$. Além disso, $T\partial_r = \psi\partial_r$, portanto $\partial_r \psi = 0$. E deste modo

$$\langle \partial_r, \nabla \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle \rangle = \partial_r \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle = \psi \ddot{\eta}.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} u_i^2 \left(2\langle T\partial_r, \nabla \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle \rangle - \langle T\partial_r, \nabla \eta \rangle^2 \right) dm \leq \int_{\Omega} u_i^2 \psi^2 (2\ddot{\eta} - \dot{\eta}^2) dm \leq C_1,$$

em que $C_1 = \delta^2 \max_{\bar{\Omega}} (2\ddot{\eta} - \dot{\eta}^2)$. A estimativa anterior junto com as Proposições 2.2 e 2.3 imediatamente implicam as desigualdades do Teorema 2.2. \square

Agora observemos que pela completude de M^n , existe uma sequência de subconjuntos compactos $K_j \subset M^n$ com $K_j \subset \text{int}K_{j+1}$ e $\bigcup_j K_j = M^n$ tal que se $q_j \notin K_j$, então $r(x, q_j) \rightarrow \infty$. Como Ω é limitado, podemos assumir $\Omega \subset K_j$ para algum j , tal que podemos definir $r(x)$ sobre Ω a partir de $o = q_j \in M^n \setminus K_j$, para j suficientemente grande, de modo que ambos $a(n, \varepsilon, \delta)/d^2$ e $1/d$ são pequenos o suficiente. Além disso, podemos tomar $C_0 = \delta^2 \max_{\bar{\Omega}} |\nabla \eta|$ e $C_1 = \delta^2 \max_{\bar{\Omega}} (2|\nabla^2 \eta| + |\nabla \eta|^2)$, que não dependem da função distância. Portanto, tomando $T = I$ no Teorema 2.2, obtemos imediatamente o próximo resultado.

Corolário 2.1. *Seja λ_i o i -ésimo autovalor do Laplaciano deformado com uma função deformadora η sobre um domínio limitado $\Omega \subset M^n$ com a condição de fronteira de Dirichlet. Para qualquer inteiro positivo k , temos*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 & \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(4\lambda_i - (n-1)^2 \kappa_2^2 + 2(n-1)(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \right. \\
& \quad \left. + 2C_0(n-1)\kappa_1 + C_1 \right),
\end{aligned}$$

em que $C_0 = \max_{\bar{\Omega}} |\nabla \eta|$ e $C_1 = \max_{\bar{\Omega}} (2|\nabla^2 \eta| + |\nabla \eta|^2)$. Além disso, o primeiro autovalor satisfaz

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{1}{4} \left((n-1)^2 \kappa_2^2 - 2(n-1)(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) - 2C_0(n-1)\kappa_1 - C_1 \right).$$

Tomando η constante no corolário anterior, obtemos:

Corolário 2.2. *O primeiro autovalor λ_1 do Laplaciano em um domínio limitado $\Omega \subset M^n$, $n \geq 3$, com a condição de fronteira de Dirichlet, satisfaz*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{(n-1)^2}{4} \kappa_2^2 - \frac{n-1}{2} (\kappa_1^2 - \kappa_2^2),$$

Além disso, esta limitação inferior é positiva para $0 < \kappa_2 \leq \kappa_1$ e $\sqrt{n+1}\kappa_2 \geq \sqrt{2}\kappa_1$.

No caso de funções deformadoras radialmente constantes, temos que $C_0 = \delta^2 \max_{\overline{\Omega}} |\dot{\eta}| = 0$ e $C_1 = \delta^2 \max_{\overline{\Omega}} (2\ddot{\eta} - \dot{\eta}^2) = 0$. Donde obtemos o próximo corolário, garantindo que o comportamento das estimativas dos autovalores do operador de Cheng-Yau permanece invariante por uma perturbação de primeira ordem desse operador.

Corolário 2.3. *Seja λ_i o i -ésimo autovalor do operador de Cheng-Yau deformado em um domínio limitado $\Omega \subset M^n$ com a condição de fronteira de Dirichlet, e uma função deformadora radialmente constante. Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \overline{\Omega}$, e considere $r(x)$ a função distância a partir de o . Se T é radialmente paralelo e tem ∂_r como um autovetor, então, todas as estimativas para a sequência de autovalores (λ_i) que podemos obter a partir do Teorema 2.2 não dependem desta função deformadora.*

No caso de funções deformadoras radiais, fixamos uma origem $o \in M^n$ para definir uma função distância $r(x)$ a partir de o , e consideramos o domínio anular limitado

$$\Omega = \left\{ x \in M^n; \frac{2(n-1)(\kappa_1 + \alpha)R + 2}{c} < r(x)^2 < R^2 \right\}, \quad (2.12)$$

em que $\alpha = 1/d$ e $cR > (n-1)(\kappa_1 + \alpha) + \sqrt{(n-1)^2(\kappa_1 + \alpha)^2 + 2c}$ e c são constantes positivas. Para obter tal constante R , é suficiente considerar o polinômio quadrático $\mathcal{P}(x) = cx^2 - 2(n-1)(\kappa_1 + \alpha)x - 2$. Então, para a função deformadora radial $\eta(x) = \frac{c}{2}r(x)^2$, sobre Ω . Temos $C_0 = \delta^2 cR$ e

$$\max_{\overline{\Omega}} (2c - c^2 r(x)^2) = 2c - c^2 \min_{\overline{\Omega}} r(x)^2 = 2c - (2c(n-1)(\kappa_1 + \alpha)R + 2c).$$

Assim, é nula a expressão $2C_0(n-1)(\kappa_1 + \alpha) + C_1$ no Teorema 2.2. Donde obtemos o próximo resultado de independência das constantes C_0 e C_1 .

Corolário 2.4. *Seja λ_i o i -ésimo autovalor do operador de Cheng-Yau deformado no domínio anular limitado definido como na equação (2.12) com a condição de fronteira de Dirichlet, e com a função deformadora $\eta(x) = \frac{c}{2}r(x)^2$. Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \overline{\Omega}$, e considere $r(x)$ a função distância a partir de o . Se T é radialmente paralelo e tem ∂_r como um autovetor, então, todas as estimativas para a sequência de autovalores (λ_i) que podemos obter a partir do Teorema 2.2 não dependem das constantes C_0 e C_1 .*

2.3 Aplicações do Teorema 2.1

Nesta seção, aplicaremos os resultados do Teorema (2.1) e obteremos um limite inferior para o primeiro autovalor do Laplaciano sobre $\Omega \subset \mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ com a condição de fronteira de Dirichlet. Para tanto, combinaremos o resultado devido a McKean [41], ver alternativamente Chavel [13], o Teorema 2.1 e a abordagem do espectro de métricas deformadas em Gomes e Marrocos [40].

Lema 2.3. *Seja $B(a) \subset \mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ um n -disco de raio $a > 0$. O primeiro autovalor λ_1 do Laplaciano em $B(a)$ com a condição de fronteira de Dirichlet, satisfaz*

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \lambda_1(B(a)) = \frac{(n-1)^2}{4} \kappa^2.$$

Demonstração. Começamos provando o resultado do lema para o caso $\mathbb{H}^n(-1)$. Lembremos de que sua métrica nas coordenadas polares é dada por $\langle, \rangle = dr^2 + \sinh^2 r ds_{n-1}^2$ sobre $(0, +\infty) \times S^{n-1}$. Assim, podemos resolver o problema do autovalor como em [40, Seção 2] de onde tiramos $\mu_0 = 0$ e ψ é constante, de modo que nosso problema de autovalor para o Laplaciano se reduz a

$$\ddot{\phi}(r) + (n-1) \coth(r) \dot{\phi}(r) + \lambda \phi(r) = 0,$$

para algum $\phi \in L^2\left(\left[\frac{a}{2}, a\right], \sinh^{2(n-1)}(r) dr^2\right)$. Para nosso propósito, é suficiente considerar $\lambda = \frac{(n-1)^2}{4}$ e a função $\coth(r)$ para grandes valores de r . Então, de agora em diante, estamos considerando a solução da EDO em $\left(\frac{a}{2}, a\right)$ do seguinte modo

$$\ddot{\phi}(r) + (n-1) \dot{\phi}(r) + \frac{(n-1)^2}{4} \phi(r) = 0.$$

Nós definimos f sobre $B(a) \subset \mathbb{H}^n(-1)$ dado por $f(r, \theta) = \psi(r)$, em que

$$\psi(r) = \begin{cases} \phi(r), & \text{se } r \in \left(\frac{a}{2}, a\right), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então f é uma função admissível para o problema de autovalor de Dirichlet no espaço $L^2(B(a), d\nu)$, em que $d\nu = \sinh^{n-1}(r) d\text{vol}_{B(a)}$. Além do mais, ψ satisfaz

$$\ddot{\psi}(r) + (n-1) \dot{\psi}(r) + \frac{(n-1)^2}{4} \psi = 0 \quad \text{em } \left(\frac{a}{2}, a\right).$$

Agora, usamos a integração por partes para obter

$$\int_{B(a)} \dot{\psi}^2 d\nu = \int_{B(a)} \left((n-1) \psi \dot{\psi} (1 - \coth(r)) + \frac{(n-1)^2}{4} \psi^2 \right) d\nu$$

que implica

$$\int_{B(a)} \left(\dot{\psi}^2 - \frac{(n-1)^2}{4} \psi^2 \right) d\nu \leq \int_{B(a)} (n-1) |\psi| |\dot{\psi}| \coth(r) - 1 d\nu$$

Observe que, $\sup_{B(a)} |\coth(r) - 1| = |\coth(a/2) - 1|$ e $|\dot{\psi}| = |\nabla f|$ sobre $B(a)$. Então,

$$\|\nabla f\|^2 - \frac{(n-1)^2}{4} \|f\|^2 \leq (n-1) |\coth(a/2) - 1| \|f\| \|\nabla f\|.$$

A desigualdade anterior é lida como

$$\frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2} - (n-1) |\coth(a/2) - 1| \frac{\|\nabla f\|}{\|f\|} - \frac{(n-1)^2}{4} \leq 0.$$

De onde resulta que

$$\frac{\|\nabla f\|}{\|f\|} \leq \frac{n-1}{2} |\coth(a/2) - 1| + \frac{1}{2} \left((n-1)^2 |\coth(a/2) - 1|^2 + (n-1)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pelo Teorema de Rayleigh (ver, e.g., Chavel [13])

$$\sqrt{\lambda_1(B(a))} \leq \frac{n-1}{2} |\coth(a/2) - 1| + \frac{1}{2} \left((n-1)^2 |\coth(a/2) - 1|^2 + (n-1)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \lambda_1(B(a)) \leq \frac{(n-1)^2}{4}$. Deste último resultado e pelo Teorema 2.1, obtemos $\lim_{a \rightarrow +\infty} \lambda_1(B(a)) = \frac{(n-1)^2}{4}$. Agora usamos o mesmo argumento da prova do Teorema 2.1 para concluir que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \lambda_1(B(a)) = \frac{(n-1)^2}{4} \kappa^2$ no caso de $\mathbb{H}^n(-\kappa^2)$. \square

Corolário 2.5. *O i -ésimo autovalor λ_i do Laplaciano em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ com a condição de fronteira de Dirichlet, satisfaz*

$$\lim_{\Omega \rightarrow \mathbb{H}^n(-\kappa^2)} \lambda_i(\Omega) = \frac{(n-1)^2}{4} \kappa^2.$$

Demonstração. A demonstração seguirá a técnica utilizada por Cheng-Yang [20, Corolário 1.3]. Vamos considerar em cada domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ um n -disco $B(a)$ de raio $a > 0$. Assim, de acordo com a monotonicidade do domínio para autovalores (ver, e.g., Chavel [13]), Lema 2.3 e Teorema 2.1, temos

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{(n-1)^2}{4} \kappa^2 \quad \text{e} \quad \lim_{\Omega \rightarrow \mathbb{H}^n(-\kappa^2)} \lambda_1(\Omega) = \frac{(n-1)^2}{4} \kappa^2. \quad (2.13)$$

Além disso, é claro que

$$\lambda_i(\Omega) > \lambda_1(\Omega) \geq \frac{(n-1)^2}{4} \kappa^2 \quad \forall i > 1.$$

Note que para o caso do Laplaciano podemos trabalhar com $v_i := 4\lambda_i - (n-1)^2\kappa^2$, veja Teoremas 2.1 e 4.1. Como $v_1 = 4\lambda_1 - (n-1)^2\kappa^2$, então de (2.13) obtemos $v_1(\Omega) \rightarrow 0$ quando $\Omega \rightarrow \mathbb{H}^n(-\kappa^2)$. Por outro lado, de (4.1), obtemos $v_{i+1} \leq 5i^2v_1 \forall i \geq 1$. Consequentemente,

$$0 = \lim_{\Omega \rightarrow \mathbb{H}^n(-\kappa^2)} v_{i+1}(\Omega) = \lim_{\Omega \rightarrow \mathbb{H}^n(-\kappa^2)} (4\lambda_{i+1}(\Omega) - (n-1)^2\kappa^2)$$

o que é suficiente para completar a prova do Corolário 2.5. □

Capítulo 3

O gap fundamental para uma família especial de operadores de segunda ordem na forma divergente em um domínio convexo no espaço hiperbólico

Nesta seção, calculamos o gap fundamental para uma família especial de operadores \mathcal{L} , mais precisamente, estimamos a diferença entre os dois primeiros autovalores do problema de autovalor para uma certa classe de \mathcal{L} sobre uma classe de domínios limitados com condição de fronteira de Dirichlet.

Iniciamos com uma breve contextualização histórica. O problema $y''(t) + \lambda y(t) = 0$ em $(0, \ell)$, com $\lambda > 0$ e a condição de fronteira de Dirichlet $y(0) = y(\ell) = 0$, possui como solução $y(t) = \sum_n (A_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t))$, em que $\lambda_n = (n\pi)^2/\ell^2$, portanto, $\lambda_2 - \lambda_1 = 3\pi^2/\ell^2$. Este gap nos motiva a pensar no caso mais geral do Laplaciano em domínios convexos e limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para este caso, foi observado na década de 80 por Michiel van den Berg [8] que para muitos domínios convexos, $\lambda_2 - \lambda_1 \geq 3\pi^2/D^2$, onde D é o diâmetro de Ω . Isto também foi sugerido independentemente por Ashbaugh e Benguria [4] e Yau [62]. Isto ficou conhecido como a conjectura do gap fundamental.

Em 2011, Andrews e Clutterbuck [1] demonstraram tal conjectura e sugeriram que o resultado permanece verdadeiro para espaços com curvatura constante. Em 2019, Seto, Wang e Wei [54] demonstraram a nova conjectura para o caso de domínios convexos com diâmetro $D \leq \pi/2$ na esfera unitária \mathbb{S}^n , $n \geq 3$. Em 2020, He, Wei e Zhang [30] estenderam os resultados de Seto-Wang-Wei para domínios convexos com diâmetro $D < \pi$ na esfera unitária \mathbb{S}^n , $n \geq 3$. Em 2021, Dai, Seto e Wei [23] provaram a conjectura para qualquer domínio convexo limitado em \mathbb{S}^2 .

Entretanto, para o caso do espaço hiperbólico, Bourni *et al.* [10] construíram domínios convexos em $\mathbb{H}^2(-1)$, com diâmetro D , tal que $\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{3\pi^2}{D^2}$, mostrando assim que o gap fundamental para o Laplaciano se comporta de maneira diferente em espaços com curvatura negativa. Recentemente, para o caso mais geral de domínios convexos em $\mathbb{H}^n(-1)$, $n \geq 2$, os mesmos autores demonstraram que $(\lambda_2 - \lambda_1)D^2$ pode ser arbitrariamente pequeno para domínios de qualquer diâmetro, ver Bourni *et al.* [11, Teorema 1.1]. Como a quantidade $(\lambda_2 - \lambda_1)D^2$ é invariante por reescalonamento da métrica, então este mesmo resultado também é verdadeiro para qualquer variedade Riemanniana completa simplesmente conexa de curvatura constante negativa.

A essência desses resultados nos motivaram a trabalhar no comportamento do gap

fundamental para o caso do nosso operador \mathcal{L} sobre domínios convexos no espaço Hiperbólico.

Aqui, nós encontramos uma classe especial de $(1, 1)$ -tensores T e funções deformadoras η que definem o operador $\mathcal{L} = \operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla u \rangle$, para alguma função não constante φ , sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{H}^2(-1)$, com diâmetro D , para respondermos positivamente às duas questões seguintes:

1) *Existe algum domínio convexo no espaço hiperbólico para o qual o gap fundamental para o operador $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$ satisfaça: $(\lambda_2 - \lambda_1)D^2 < 3\pi^2\delta$?*

2) *Existe alguma função deformadora η para o qual o gap fundamental para o operador $\operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla u \rangle$ ainda satisfaça a desigualdade $(\lambda_2 - \lambda_1)D^2 < 3\pi^2\delta$ sobre algum domínio convexo no espaço hiperbólico?*

Como já falamos anteriormente, a primeira pergunta foi motivada pelo resultado de Bourni et al. [10], que responde o caso de $\varphi = \text{cte}$. Aqui, seguiremos a abordagem deste último trabalho com as devidas adaptações para o nosso caso. Devido a invariância de $(\lambda_2 - \lambda_1)D^2$, podemos sem perda de generalidade, trabalhar no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2(-1)$ com curvatura constante -1 , i.e., o semi-espaço superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ com a métrica $g_{ij} = y^{-2}\delta_{ij}$. Tal métrica nas coordenadas $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, em que $r > 0$ e $0 < \theta < \pi$, se escreve como segue

$$ds^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{dr^2}{r^2} + \frac{d\theta^2}{\sin^2 \theta}, \quad (3.1)$$

de modo que $e_1 = r \sin \theta \frac{\partial}{\partial r}$ e $e_2 = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ formam um referencial ortonormal, cujos símbolos de Christoffel não nulos são $\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{21}^1 = \cos \theta$. Note que podemos definir um $(1, 1)$ -tensor T em $\mathbb{H}^2(-1)$ por $T = \varphi I$, para $\varphi \in C^\infty(\mathbb{H}^2)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$, a ser escolhida adequadamente.

Primeiro vamos calcular o $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$ de uma função suave u sobre $\mathbb{H}^2(-1)$. Para isso, escrevemos $\nabla u = u_1 e_1 + u_2 e_2$, em que $u_1 = e_1(u) = r \sin \theta u_r$ e $u_2 = e_2(u) = \sin \theta u_\theta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_1} \nabla u, e_1 \rangle &= (u_{11} + u_2 \Gamma_{12}^1) = r^2 \sin^2 \theta u_{rr} + r \sin^2 \theta u_r - \sin \theta \cos \theta u_\theta, \\ \langle \nabla_{e_2} \nabla u, e_2 \rangle &= u_{22} = \sin^2 \theta u_{\theta\theta} + \sin \theta \cos \theta u_\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \langle \nabla_{e_1} \nabla u, e_1 \rangle + \langle \nabla_{e_2} \nabla u, e_2 \rangle \\ &= r^2 \sin^2 \theta u_{rr} + r \sin^2 \theta u_r - \sin \theta \cos \theta u_\theta + \sin^2 \theta u_{\theta\theta} + \sin \theta \cos \theta u_\theta \\ &= r^2 \sin^2 \theta u_{rr} + r \sin^2 \theta u_r + \sin^2 \theta u_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Além disso, $\varphi_1 = e_1(\varphi) = r \sin \theta \varphi_r$ e $\varphi_2 = e_2(\varphi) = \sin \theta \varphi_\theta$ de modo que

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2 = r^2 \sin^2 \theta \varphi_r u_r + \sin^2 \theta \varphi_\theta u_\theta \quad (3.2)$$

e note que

$$\operatorname{div}(\varphi \nabla u) = \varphi \Delta u + \langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle. \quad (3.3)$$

Sob a hipótese adicional de T ser radialmente paralelo, obtemos $\varphi_r = 0$, donde a equação (3.3) se escreve como

$$\operatorname{div}(\varphi \nabla u) = \varphi (r^2 \sin^2 \theta u_{rr} + r \sin^2 \theta u_r) + \varphi \sin^2 \theta u_{\theta\theta} + \sin^2 \theta \varphi_\theta u_\theta. \quad (3.4)$$

Isso cumpre a nossa primeira etapa.

Passemos a estimar o gap fundamental para $\text{div}(\varphi \nabla u)$ em (3.4). Iniciamos com o seguinte problema de autovalor com condição de fronteira de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \varphi(r^2 \sin^2 \theta u_{rr} + r \sin^2 \theta u_r) + \varphi \sin^2 \theta u_{\theta\theta} + \sin^2 \theta \varphi_\theta u_\theta + \lambda u &= 0, \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Consideramos a família de domínios $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1} = \{(r, \theta) : 1 < r < e^{\frac{\pi}{\ell}}, \theta_0 < \theta < \theta_1\}$, em que $\ell > 0$, $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\theta_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, ver Figura 3.1. Uma vez que as geodésicas são linhas verticais $x = cte$ ou semi-círculos centrados sobre o eixo x , segue que os conjuntos $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ são domínios convexos em $\mathbb{H}^2(-1)$.

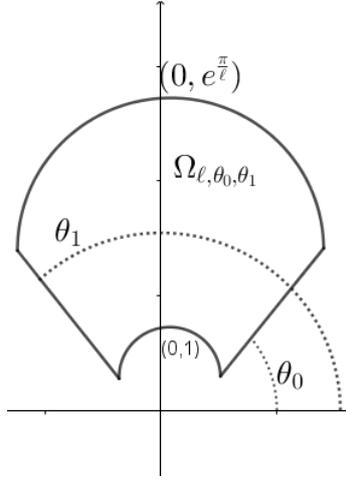


Figura 3.1: $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1} = \{(r, \theta) : 1 < r < e^{\frac{\pi}{\ell}} \text{ e } \theta_0 < \theta < \theta_1\}$.

Como a métrica em (3.1) é um produto deformado, podemos utilizar o método da separação de variáveis (ver, e.g., [13, página 41]), escrevendo $u(r, \theta) = f(r)h(\theta)$, temos $u_r = f_r h$, $u_{rr} = f_{rr} h$, $u_\theta = f h_\theta$ e $u_{\theta\theta} = f h_{\theta\theta}$. Portanto, dividindo a primeira equação do Problema (3.5) por $\varphi \sin^2 \theta$, obtemos

$$(r^2 f_{rr} + r f_r)h + (h_{\theta\theta} + \frac{\varphi_\theta}{\varphi} h_\theta + \frac{\lambda}{\varphi} \csc^2 \theta h)f = 0, \quad (3.6)$$

como f só depende de r e h só depende de θ , segue que existe uma constante μ tal que podemos transformar o Problema (3.5) nas duas equações de autovalor:

$$r^2 f_{rr} + r f_r = -\mu f, \quad r \in (1, e^{\frac{\pi}{\ell}}) \quad (3.7)$$

$$h_{\theta\theta} + \frac{\varphi_\theta}{\varphi} h_\theta + \frac{\lambda}{\varphi} \csc^2 \theta h = \mu h, \quad \theta \in (\theta_0, \theta_1), \quad (3.8)$$

com a condição de fronteira de Dirichlet $f(1) = f(e^{\frac{\pi}{\ell}}) = 0$ e $h(\theta_0) = h(\theta_1) = 0$.

Como $1 < r < e^{\frac{\pi}{\ell}}$, podemos fazer a mudança de variável $f(r) = f(e^t)$, para $0 < t < \frac{\pi}{\ell}$. Daí, $f_t = r f_r$ e $f_{tt} = r f_r + r^2 f_{rr}$. Assim, pela equação (3.7), obtemos

$$f_{tt} = -\mu f, \quad 0 < t < \frac{\pi}{\ell}. \quad (3.9)$$

Segue de (3.9) e da condição de fronteira que $f(t) = \sin(\sqrt{\mu}t)$, com $\mu = (k\ell)^2 > 0$, onde k é um inteiro não nulo, i.e., $f(t) = \sin(k\ell t)$. Além disso, a equação (3.8) pode ser reescrita como

$$-(\varphi h_\theta)_\theta + \mu \varphi h = \lambda \csc^2 \theta h. \quad (3.10)$$

3.1 A identificação dos primeiros dois autovalores.

Para identificarmos os dois primeiros autovalores utilizaremos os resultados de Sturm-Liouville (Teorema 1.6) e os de Courant (Teorema 1.4) para domínios nodais.

De acordo com o Teorema 1.4, o primeiro autovalor λ_1 do problema (3.5) em $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ corresponde a uma autofunção estritamente positiva. Deste modo, $\mu = \ell^2$, pois $f > 0$ em $(0, \frac{\pi}{\ell})$, além disso, $h > 0$ em (θ_0, θ_1) , e pelo Teorema 1.6, temos que λ_1 é o menor $\lambda_1^{\ell^2}$ que resolve o seguinte problema:

$$\begin{aligned} -(\varphi h_\theta)_\theta + \ell^2 \varphi h &= \lambda \csc^2 \theta h, & \theta \in (\theta_0, \theta_1), \\ h(\theta_0) = h(\theta_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Novamente pelo Teorema 1.4, sabemos que λ_2 corresponde a uma autofunção que muda uma única vez de sinal, portanto, f ou h devem mudar de sinal.

Se f mudar de sinal, então $\mu = 4\ell^2$ e $f(t) = \sin(2\ell t)$, ver (3.9). Neste caso, $h > 0$, com isso, o Teorema 1.6 garante que λ_2 é o menor $\lambda_1^{4\ell^2}$ que resolve o problema

$$\begin{aligned} -(\varphi h_\theta)_\theta + 4\ell^2 \varphi &= \lambda \csc^2 \theta h, & \theta \in (\theta_0, \theta_1) \\ h(\theta_0) = h(\theta_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se h mudar o sinal, então f é positiva, sendo, portanto, dada por $\sin(\ell t)$ com $\mu = \ell^2$. Neste caso, λ_2 é dado por $\lambda_2^{\ell^2}$ resolvendo (3.11) com h mudando o sinal exatamente uma vez, de acordo com o Teorema 1.6. Consequentemente, o segundo autovalor é:

$$\lambda_2 = \min\{\lambda_1^{4\ell^2}, \lambda_2^{\ell^2}\}. \quad (3.13)$$

3.2 Estimativas sobre o primeiro e segundo autovalores.

Nesta seção, vamos estimar os dois primeiros autovalores do problema (3.5) com condição de fronteira de Dirichlet sobre um domínio a ser escolhido adequadamente. Para tanto, definimos um ângulo conveniente para simplificar a exposição. Seja

$$\theta_* = \min(\theta_0, \pi - \theta_1).$$

Como a função $\csc^2 \theta$ é decrescente no intervalo $(0, \pi/2]$ e crescente em $[\pi/2, \pi)$, temos que $1 \leq \csc^2 \theta \leq \csc^2(\theta_*)$, para todo $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$.

Lema 3.1. *O primeiro autovalor do Problema (3.8), denotado por λ_1^μ , satisfaz*

$$\varepsilon \sin^2(\theta_*) \left(\mu + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right) \leq \lambda_1^\mu \leq \delta \left(\mu + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right). \quad (3.14)$$

Demonstração. Para a estimativa inferior, consideramos h uma solução de (3.8). Multiplicamos ambos os lados da equação (3.10) por h , e integramos de θ_0 a θ_1 , para obter

$$\lambda_1^\mu = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \varphi (|h_\theta|^2 + \mu h^2) d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta h^2 d\theta} \geq \frac{\varepsilon}{\csc^2(\theta_*)} \left(\mu + \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} (|h_\theta|^2) d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} h^2 d\theta} \right) \geq \varepsilon \sin^2(\theta_*) \left(\mu + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right),$$

em que, na última desigualdade utilizamos a desigualdade de Wirtinger $\int_0^D (h')^2 dx \geq \frac{\pi^2}{D^2} \int_0^D h^2 dx$.

Para a estimativa superior, escolhamos a função teste $\phi = \sin(\frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}\pi)$. Sabendo que o primeiro autovalor minimiza o quociente de Rayleigh, ver Teorema 1.7, e que $\csc^2 \theta \geq 1$, obtemos

$$\lambda_1^\mu \leq \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \varphi(|\phi_\theta|^2 + \mu\phi^2)d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta \phi^2 d\theta} \leq \delta \left(\mu + \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} (|\phi_\theta|^2)d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \phi^2 d\theta} \right) = \delta \left(\mu + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right).$$

□

Lema 3.2. *O segundo autovalor do Problema (3.8), denotado por λ_2^μ , satisfaz*

$$\varepsilon \sin^2 \theta_* \left(\mu + \frac{4\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right) \leq \lambda_2^\mu \leq \delta \left(\mu + \frac{4\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right). \quad (3.15)$$

Demonstração. Seja h_2^μ uma autofunção correspondente ao segundo autovalor λ_2^μ . Pelo Teorema 1.6, existe um único $\theta_2 \in (\theta_0, \theta_1)$ tal que $h_2^\mu(\theta_2) = 0$, além disso, o autovalor λ_2^μ coincide com o primeiro autovalor de $-(\varphi h_\theta)_\theta + \mu\varphi h = \lambda \csc^2 \theta h$ com condição de fronteira de Dirichlet em qualquer $[\theta_0, \theta_2]$ ou $[\theta_2, \theta_1]$. Os limites inferior e superior em (3.15) são obtidos por meio do Lema 3.1 considerando, respectivamente, os intervalos com menor e maior comprimento dentre $[\theta_0, \theta_2]$ e $[\theta_2, \theta_1]$ e notando que $\min\{\theta_2 - \theta_0, \theta_1 - \theta_2\} \leq (\theta_1 - \theta_0)/2$ e $\max\{\theta_2 - \theta_0, \theta_1 - \theta_2\} \geq (\theta_1 - \theta_0)/2$. Para isso, basta observar que $\lambda_2^\mu([\theta_0, \theta_2]) = \lambda_1^\mu([\theta_0, \theta_2])$ e $\lambda_2^\mu([\theta_2, \theta_1]) = \lambda_1^\mu([\theta_2, \theta_1])$. □

Agora vamos escolher adequadamente o λ_2 . Para isso, fixamos $\theta_* > \frac{\pi}{6}$ e $\varepsilon > \delta/4$, de modo que $\frac{4\varepsilon \sin^2 \theta_* - \delta}{4\delta - \varepsilon \sin^2 \theta_*} > 0$, então podemos escolher ℓ tal que

$$\frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \frac{4\varepsilon \sin^2 \theta_* - \delta}{4\delta - \varepsilon \sin^2 \theta_*} \geq \ell^2. \quad (3.16)$$

Tomando $\mu = 4\ell^2$ em (3.14) e $\mu = \ell^2$ em (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_2^{\ell^2} - \lambda_1^{4\ell^2} &\geq \varepsilon \sin^2 \theta_* \left(\ell^2 + \frac{4\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right) - \delta \left(4\ell^2 + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right) \\ &= \ell^2 \left(\varepsilon \sin^2 \theta_* - 4\delta \right) + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \left(4\varepsilon \sin^2 \theta_* - \delta \right) \\ &= \ell^2 \left(\varepsilon \sin^2 \theta_* - 4\delta \right) + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \left(\frac{4\varepsilon \sin^2 \theta_* - \delta}{4\delta - \varepsilon \sin^2 \theta_*} \right) (4\delta - \varepsilon \sin^2 \theta_*). \end{aligned}$$

Assim, usando (3.16), concluímos que

$$\lambda_2^{\ell^2} - \lambda_1^{4\ell^2} \geq \ell^2 \left(\varepsilon \sin^2 \theta_* - 4\delta \right) + \ell^2 \left(4\delta - \varepsilon \sin^2 \theta_* \right) = 0.$$

Portanto, o segundo autovalor do Problema (3.5) em $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ deve ser $\lambda_1^{4\ell^2}$, ver (3.13). Geometricamente, isso corresponde a um domínio, conforme mostrado na Figura 3.1, em que a abertura do ângulo é pequena em comparação com o comprimento vertical.

A partir de agora estaremos considerando o operador $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$ sobre a família de domínios

$$\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1} = \left\{ (r, \theta) : 1 < r < e^{\frac{\pi}{\ell}} \quad \text{e} \quad \theta_0 < \theta < \theta_1, \text{ satisfazendo (3.16)} \right\}. \quad (3.17)$$

3.3 Estimativa do diâmetro por Bourni et al.

Para estimar o gap fundamental para $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, precisaremos da estimativa de diâmetro de $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ calculada por Bourni *et al.* [10] na configuração mais geral deste domínio. Eles utilizaram a fórmula da distância entre dois pontos quaisquer no plano hiperbólico, a saber:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2y_1 y_2}\right) \\ &= \operatorname{arcosh}\left(\frac{(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2x_1 x_2}{2y_1 y_2}\right). \end{aligned}$$

Eles mostraram que o diâmetro $D_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ de cada domínio da família $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ satisfaz:

$$\operatorname{arcosh}(\csc \theta_* \cosh(\pi/\ell)) \leq D_{\ell, \theta_0, \theta_1} \leq \operatorname{arcosh}(\csc^2 \theta_* \cosh(\pi/\ell) + \cot^2 \theta_*).$$

Além disso, eles obtiveram uma estimativa mais explícita para este diâmetro, a saber:

$$\ell^2 \left(1 + \frac{\ell}{\pi} (2 \ln(\csc \theta_*) + \eta)\right)^{-2} \leq \frac{\pi^2}{D_{\ell, \theta_0, \theta_1}^2} \leq \ell^2 \left(1 + \frac{\ell}{\pi} (\ln(\csc \theta_*))\right)^{-2} \leq \ell^2. \quad (3.18)$$

em que $\eta = \eta(\theta_*, \ell) = \frac{\cos^2 \theta_*}{\sinh(\frac{\pi}{\ell})} + \frac{\sqrt{1 - \sin^4 \theta_*}}{b + \sqrt{b^2 - 1}}$, com $b = \cosh(\frac{\pi}{\ell}) + \cos^2 \theta_*$, sendo esta estimativa fundamental para concluir que:

Lema 3.3. (*Bourni et al. [10]*) $\frac{\pi^2}{\ell^2 D_{\ell, \theta_0, \theta_1}^2} \rightarrow 1$ quando $\ell \rightarrow 0$ ou $\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

3.4 Estimativa do gap fundamental.

Lema 3.4. *O gap fundamental para $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, sobre cada domínio em (3.17) satisfaz*

$$3\varepsilon \sin^2 \theta_* \ell^2 < \lambda_2 - \lambda_1 < 3\delta \ell^2. \quad (3.19)$$

Em particular, quando $\varepsilon = \delta$ e fazendo $\theta_ \rightarrow \frac{\pi}{2}$, então o gap fundamental se aproxima de $3\delta \ell^2$.*

Demonstração. Nas condições do presente lema temos $\lambda_1 = \lambda_1^{\ell^2}$ e $\lambda_2 = \lambda_1^{4\ell^2}$. Sejam $h^{(1)}$ e $h^{(2)}$ as respectivas autofunções correspondentes a esses autovalores, segue de (3.11) e (3.12) que

$$\begin{aligned} (\varphi h_\theta^{(1)})_\theta + (\lambda_1 \csc^2 \theta - \ell^2 \varphi) h^{(1)} &= 0, \\ (\varphi h_\theta^{(2)})_\theta + (\lambda_2 \csc^2 \theta - 4\ell^2 \varphi) h^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Para obtermos a desigualdade inferior, relembramos que $\csc^2 \theta \leq \csc^2 \theta_*$. Argumentamos do seguinte modo: Suponhamos por contradição que $\lambda_2 \leq \lambda_1 + 3\varepsilon \ell^2 \sin^2 \theta_*$, então

$$\lambda_2 \csc^2 \theta - 4\ell^2 \varphi \leq \lambda_1 \csc^2 \theta + 3\ell^2 \varepsilon \sin^2 \theta_* \csc^2 \theta - 4\ell^2 \varphi \leq \lambda_1 \csc^2 \theta - \ell^2 \varphi,$$

além disso, observamos que $\lambda_1 \csc^2 \theta + 3\ell^2 \varepsilon \sin^2 \theta_* \csc^2 \theta - 4\ell^2 \varphi = \lambda_1 \csc^2 \theta - \ell^2 \varphi$ é equivalente a $\sin^2 \theta = \frac{\varepsilon}{\varphi} \sin^2 \theta_*$, como $\frac{\varepsilon}{\varphi} \leq 1$, segue que $\sin \theta \leq \sin \theta_*$, então, $\theta \leq \theta_*$ ou $\theta \geq \pi - \theta_*$ e portanto, $\theta \leq \theta_0$ ou $\theta \geq \theta_1$. Logo a desigualdade é estrita no intervalo (θ_0, θ_1) , o que nos permite utilizar o Teorema 1.5 para concluir que $h^{(1)}$ se anula uma vez no intervalo (θ_0, θ_1) , o que contradiz o Teorema 1.6. A desigualdade superior é provada da mesma forma usando que $\csc^2 \theta \geq 1$. \square

Com intuito de obtermos a estimativa do gap fundamental para o operador $\text{div}(\varphi \nabla u)$ em (3.4) sobre cada domínio da família em (3.17), utilizamos argumentos variacionais como em [36, Seção 3] e [10, Seção 5], bem como os resultados do teorema de Sturm-Liouville, ver Teorema 1.6. A técnica consiste em considerar a família a um parâmetro de problemas

$$\begin{aligned} (\varphi h_\theta)_\theta + \lambda \csc^2 \theta h &= \mu(s) \varphi(\theta) h \quad \text{em } (\theta_0, \theta_1) \\ h(\theta_0) = h(\theta_1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

em que $h(\theta) = h^s(\theta)$, $\lambda = \lambda(s)$ e $\mu(s)$ é uma curva suave tal que $\mu(0) = \ell^2$ e $\mu(1) = 4\ell^2$, com $0 \leq s \leq 1$. Para cada s , seja $\lambda(s)$ o menor autovalor, que é suave em s , e $h^s(\theta)$ a sua primeira autofunção que é garantida pelo Teorema 1.6 satisfazendo $\int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta (h^s(\theta))^2 d\theta = 1$ e $h^s(\theta) > 0$ sobre (θ_0, θ_1) . Denotando por \dot{f} as derivadas com respeito a s de uma função $f(s)$, temos

$$(\varphi(\theta) \dot{h}_\theta)_\theta + \lambda(s) \csc^2 \theta \dot{h} - \mu(s) \varphi(\theta) \dot{h} + \dot{\lambda}(s) \csc^2 \theta h = \dot{\mu}(s) \varphi(\theta) h \quad \text{sobre } (\theta_0, \theta_1). \quad (3.21)$$

Multiplicamos (3.21) por h e integramos de θ_0 a θ_1 , obtemos

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} ((\varphi(\theta) \dot{h}_\theta)_\theta + \lambda(s) \csc^2 \theta \dot{h} - \mu(s) \varphi(\theta) \dot{h}) h d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \dot{\lambda}(s) \csc^2 \theta h^2 d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \dot{\mu}(s) \varphi(\theta) h^2 d\theta. \quad (3.22)$$

Integrando por parte e usando (3.20), obtemos

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} (\varphi(\theta) \dot{h}_\theta)_\theta h d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\varphi(\theta) h_\theta)_\theta \dot{h} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\mu(s) \varphi(\theta) h \dot{h} - \lambda(s) \csc^2 \theta h \dot{h}) d\theta.$$

Logo, a equação (3.22) reduz-se a

$$\dot{\mu}(s) \int_{\theta_0}^{\theta_1} \varphi(\theta) h^2 d\theta = \dot{\lambda}(s) \int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta h^2 d\theta = \dot{\lambda}(s).$$

Note que podemos tomar a curva $\mu(s) = \ell^2 + 3\ell^2 s$, como em [10], de modo que

$$\dot{\lambda}(s) = 3\ell^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \varphi(\theta) (h^s(\theta))^2 d\theta.$$

Integrando de 0 a 1, e notando que $\lambda(0) = \lambda_1$ e $\lambda(1) = \lambda_2$, encontramos

$$\lambda_2 - \lambda_1 \leq 3\ell^2 \delta \max_{s \in [0,1]} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta. \quad (3.23)$$

Agora basta trabalharmos para estimar o lado direito de (3.23). Como consequência da próxima proposição e do Lema 3.3 obteremos o resultado principal desta seção.

Proposição 3.1. *Independente de ℓ , é válido que*

$$\max_{s \in [0,1]} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta < 1. \quad (3.24)$$

Demonstração. Notamos primeiro que $\int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta \leq \int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta (h^s(\theta))^2 d\theta = 1$. Vamos mostrar que $\int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta < 1$ para todo $s \in [0, 1]$. Para tanto, consideramos um ângulo α tal que

$$\theta_0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Suponha por absurdo que a igualdade seja verdadeira para algum s , então

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta (h^s(\theta))^2 d\theta = 1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta.$$

Lembrando que $\frac{\pi}{2} < \theta_1$, de modo que, podemos escrever

$$\int_{\theta_0}^{\alpha} \csc^2 \theta (h^s(\theta))^2 d\theta + \int_{\alpha}^{\theta_1} \csc^2 \theta (h^s(\theta))^2 d\theta = \int_{\theta_0}^{\alpha} (h^s(\theta))^2 d\theta + \int_{\alpha}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta.$$

A escolha de α nos permite concluir que $\csc^2 \theta \geq \csc^2 \alpha$, no intervalo $(\theta_0, \alpha]$, além disso, $1 \leq \csc^2 \theta$, então

$$\csc^2 \alpha \int_{\theta_0}^{\alpha} (h^s(\theta))^2 d\theta + \int_{\alpha}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta \leq \int_{\theta_0}^{\alpha} (h^s(\theta))^2 d\theta + \int_{\alpha}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta.$$

Portanto,

$$(\csc^2 \alpha - 1) \int_{\theta_0}^{\alpha} (h^s(\theta))^2 d\theta \leq 0,$$

o que é um absurdo, pois $\csc^2 \alpha > 1$. Logo, $\int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta < 1$, para todo $s \in [0, 1]$, o que é suficiente para obter o resultado da proposição. \square

Teorema 3.1. *O gap fundamental para o operador $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, sobre cada conjunto da família de domínios convexos $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$, com $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ definido em (3.17), satisfaz*

$$\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{3\delta\pi^2}{D^2}, \quad (3.25)$$

onde $D = \lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} D_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ é o diâmetro de cada conjunto da família $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$.

Demonstração. Pela inequação (3.23) e Proposição 3.1 obtemos

$$\lambda_2 - \lambda_1 < 3\ell^2\delta.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.3

$$3\ell^2\delta = \lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3\pi^2\delta}{D_{\ell, \theta_0, \theta_1}^2} \quad (3.26)$$

o que é suficiente para concluir o resultado do teorema. \square

Como aplicação do Teorema 3.1 provamos o seguinte resultado para o operador \mathcal{L} definido em (1.15), com $T = \varphi I$ e $\varphi_r = 0$.

Corolário 3.1. *Considere o operador $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, sobre cada conjunto da família de domínios convexos $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$, com $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ definido em (3.17). Existe uma função deformadora η tal que o gap fundamental para $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$ permanece invariante por uma perturbação de primeira ordem deste operador, mais precisamente, para o operador $\mathcal{L}u = \operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla u \rangle$, é válido que*

$$\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{3\delta\pi^2}{D^2}, \quad (3.27)$$

onde $D = \lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} D_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ é o diâmetro de cada conjunto da família $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$.

Demonstração. Afirmamos que qualquer solução da equação

$$2\operatorname{div}(\varphi \nabla \eta) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla \eta \rangle = 0 \quad (3.28)$$

pode ser tomada como função deformadora tal que o gap fundamental do operador $\mathcal{L}u = \operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla u \rangle$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, sobre cada conjunto da família de domínios convexos $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$, em que $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ é definida em (3.17), satisfaz a estimativa desejada. De fato, tomando u tal que $-\lambda u = \operatorname{div}(\varphi \nabla u)$, e a mudança de variável, $u = ve^{-\frac{\eta}{2}}$, juntamente com a propriedade da divergência de um campo de vetores (1.3), obtemos

$$\operatorname{div}(\varphi \nabla u) = e^{-\frac{\eta}{2}} \left(\operatorname{div}(\varphi \nabla v) - \langle \nabla v, \varphi \nabla \eta \rangle \right) - \frac{e^{-\frac{\eta}{2}} v}{4} \left(2\operatorname{div}(\varphi \nabla \eta) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla \eta \rangle \right).$$

Se η resolve a equação (3.28), então $-\lambda e^{-\frac{\eta}{2}} v = -\lambda u = \operatorname{div}(\varphi \nabla u) = e^{-\frac{\eta}{2}} \mathcal{L}v$. Portanto, $\mathcal{L}v = -\lambda v$ e assim a estimativa do gap fundamental para o operador \mathcal{L} segue do Teorema 3.1. \square

Exemplo 3.1. *Seja $\varphi : (1, e^{\frac{\pi}{\ell}}) \times (\pi/3, 2\pi/3) \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(r, \theta) = \sin \theta$. Note que a função φ e o ângulo θ satisfazem às condições do domínio em (3.17), para $\theta_0 = \pi/3$, $\theta_1 = 2\pi/3$, $\theta_* = \pi/3$, $\varepsilon = \sqrt{3}/2$, $\delta = 1$ e ℓ a ser escolhido adequadamente. Nestas condições, as funções $\eta(r, \theta) = -2\ln(1 - \ln \tan \frac{\theta}{2})$ e $\eta(r, \theta) = -2\ln(\pi - \ell \ln r)$ satisfazem a equação (3.28).*

De fato, precisamos provar que $2\operatorname{div}(\varphi \nabla \eta) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla \eta \rangle = 0$. Para isso, basta procedermos como em (3.2) e (3.4), para obtemos a próxima expressão, que é válida para qualquer φ radialmente constante e para qualquer η ,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{div}(\varphi \nabla \eta) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla \eta \rangle &= 2(\varphi(r^2 \sin^2 \theta \eta_{rr} + r \sin^2 \theta \eta_r) + \varphi \sin^2 \theta \eta_{\theta\theta} + \sin^2 \theta \varphi_\theta \eta_\theta) \\ &\quad - \varphi(r^2 \sin^2 \theta \eta_r \eta_r + \sin^2 \theta \eta_\theta \eta_\theta). \end{aligned}$$

Para $\eta(r, \theta) = -2\ln(1 - \ln \tan \frac{\theta}{2})$, temos

$$\eta_r = 0, \quad \eta_\theta = \frac{2 \csc \theta}{1 - \ln \tan \frac{\theta}{2}} \text{ e } \eta_{\theta\theta} = \frac{-2 \csc \theta \cot \theta}{1 - \ln \tan \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \csc^2 \theta}{(1 - \ln \tan \frac{\theta}{2})^2} \quad (3.29)$$

Assim,

$$2\operatorname{div}(\varphi \nabla \eta) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla \eta \rangle = 2\varphi \sin^2 \theta \eta_{\theta\theta} + 2\sin^2 \theta \varphi_\theta \eta_\theta - \varphi \sin^2 \theta \eta_\theta^2 = 0.$$

Para $\eta(r, \theta) = -2\ln(\pi - \ell \ln r)$ a conta é simples e direta como o caso anterior.

Exemplo 3.2. *Seja $\varphi : (1, e^{\frac{\pi}{\ell}}) \times (\pi/3, 2\pi/3) \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(r, \theta) = e^{\frac{\theta}{2}}$. Note que a função φ e o ângulo θ satisfazem às condições do domínio em (3.17), para $\theta_0 = \pi/3$, $\theta_1 = 2\pi/3$, $\theta_* = \pi/3$, $\varepsilon = e^{\frac{\pi}{6}}$, $\delta = e^{\frac{\pi}{3}}$ e ℓ a ser escolhido adequadamente. Nestas condições, as funções $\eta(r, \theta) = \theta$ e $\eta(r, \theta) = -2 \ln(\pi - \ell \ln r)$ satisfazem a equação (3.28). De um modo mais geral podemos tomar $0 < \theta_1 - \theta_0 < 2 \ln 2$, $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ e $\theta_1 \in (\pi/2, \pi)$.*

Observação 3.1. *Em 2022, Bourni et al. [11], demonstram que no espaço hiperbólico \mathbb{H}^n , $n \geq 2$, para quaisquer constantes $\epsilon > 0$, $D > 0$, existe um domínio convexo Ω com diâmetro D cujo gap fundamental satisfaz $\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{\epsilon \pi^2}{D^2}$, então podemos concluir que para o operador Laplaciano deformado com função deformadora η satisfazendo a equação $2\Delta\eta - |\nabla\eta|^2 = 0$ o resultado continua válido.*

Capítulo 4

Considerações finais

Neste capítulo, faremos algumas aplicações em um contexto mais geral do Teorema 2.2.

Corolário 4.1. *Seja λ_1 o primeiro autovalor do operador de Cheng-Yau deformado com função deformadora η sobre um domínio limitado $\Omega \subset M^n$ com a condição de fronteira de Dirichlet. Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \bar{\Omega}$, e considere $r(x)$ a função distância a partir de o . Se T é radialmente paralelo e tem ∂_r como um autovetor, então:*

1. Para $a(n, \varepsilon, \delta) \leq 0$,

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\varepsilon}{4\delta^2} \left[(n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2 - 2(n-1)(\delta^2 \kappa_1^2 - \varepsilon^2 \kappa_2^2) - 2C_0(n-1) \left(\kappa_1 + \frac{1}{d} \right) - C_1 \right].$$

2. Para $a(n, \varepsilon, \delta) > 0$,

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\varepsilon}{4\delta^2} \left[(n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2 - 2(n-1)(\delta^2 \kappa_1^2 - \varepsilon^2 \kappa_2^2) - 2C_0(n-1) \left(\kappa_1 + \frac{1}{d} \right) - C_1 - \frac{a(n, \varepsilon, \delta)}{d^2} \right],$$

em que as constantes $a(n, \varepsilon, \delta)$, d , C_0 e C_1 são como no Teorema 2.2.

Demonstração. Por simplicidade, definiremos as seguintes sequências auxiliares:

1. Para $a(n, \varepsilon, \delta) \leq 0$,

$$v_i := \frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - (n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2 + 2(n-1)(\delta^2 \kappa_1^2 - \varepsilon^2 \kappa_2^2) + 2C_0(n-1) \left(\kappa_1 + \frac{1}{d} \right) + C_1.$$

2. Para $a(n, \varepsilon, \delta) > 0$,

$$v_i := \frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i - (n-1)^2 \varepsilon^2 \kappa_2^2 + 2(n-1)(\delta^2 \kappa_1^2 - \varepsilon^2 \kappa_2^2) + 2C_0(n-1) \left(\kappa_1 + \frac{1}{d} \right) + C_1 + \frac{a(n, \varepsilon, \delta)}{d^2},$$

A partir de (2.7) e das inequações do Teorema 2.2, obtemos

$$0 \leq \|u_i \mathcal{L}r + 2T(\partial_r, \nabla u_i)\|_{L^2(\Omega, \text{dm})}^2 \leq v_i.$$

Tomando $i = 1$ obtemos o resultado do corolário. \square

Agora, provamos algumas estimativas de autovalores do operador de Cheng-Yau deformado. Em particular, obtemos as estimativas correspondentes para o operador de Cheng-Yau, o Laplaciano deformado e o Laplaciano. Para obter informações mais detalhadas sobre essas estimativas, recomendamos ao leitor [27].

Teorema 4.1. *Seja λ_i o i -ésimo autovalor do operador de Cheng-Yau deformado com função deformadora η sobre um domínio limitado $\Omega \subset M^n$ com a condição de fronteira de Dirichlet. Fixe uma origem $o \in M^n \setminus \bar{\Omega}$, e considere $r(x)$ a função distância a partir de o . Se T é radialmente paralelo e tem ∂_r como um autovetor. Então, a sequência de autovalores (λ_i) satisfaz as seguintes estimativas em termos das sequências auxiliares definidas no Corolário 4.1:*

$$v_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) k^{\frac{2\delta^2}{\varepsilon^2}} v_1. \quad (4.1)$$

$$v_{k+1} \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i. \quad (4.2)$$

$$v_{k+1} \leq \left(1 + \frac{2\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2\delta^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 - \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

$$v_{k+1} - v_k \leq 2 \left[\left(\frac{2\delta^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 - \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

Demonstração. Note que podemos escrever cada caso das sequências (v_i) como segue

$$v_i = \frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i + C, \quad (4.5)$$

para uma constante C apropriada. Com esta notação simplificada, as inequações do Teorema 2.2 se tornam

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\frac{4\delta^2}{\varepsilon} \lambda_i + C\right).$$

Por (4.5), obtemos

$$\lambda_{k+1} - \lambda_i = \frac{\varepsilon}{4\delta^2} (v_{k+1} - v_i).$$

Então,

$$\sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i)^2 \leq \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i) v_i. \quad (4.6)$$

Além disso, note que $v_1 \leq v_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, pois $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$. Assim, cada caso da sequência (v_i) satisfaz as hipóteses de Cheng e Yang [19, 20], a partir do qual obtemos (4.1). Para uma demonstração completa, ver Miranda [43, Lema 2.4 e Corolário 2.1].

Usando (4.6) e seguindo os mesmos passos do Teorema 3 de [27] provamos as estimativas em (4.2), (4.3) e (4.4). Para tanto, a partir de (4.6) escrevemos

$$\sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i)(v_{k+1} - v_i) - \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i) v_i \leq 0,$$

Assim

$$\sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i) v_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i) v_i.$$

Utilizando a inequação de Tchebyshev, [29, Teorema 43, p. 43], obtemos a desigualdade $\sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i) v_i \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (v_{k+1} - v_i) \sum_{i=1}^k v_i$, donde imediatamente concluímos (4.2).

Para provar (4.3), notamos que (4.6) é equivalente a

$$\mathcal{P}(v_{k+1}) = kv_{k+1}^2 - v_{k+1} \left(2 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i^2 \leq 0$$

em que o discriminante de $\mathcal{P}(v_{k+1})$ satisfaz

$$\mathcal{D} = \left(2 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^k v_i\right)^2 - 4k \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i^2 \geq 0. \quad (4.7)$$

Como $\mathcal{P}(v_{k+1}) \leq 0$ temos que $r_{k+1} \leq v_{k+1} \leq R_{k+1}$, em que r_{k+1} e R_{k+1} são a menor e a maior raiz de \mathcal{P} , respectivamente. Então

$$v_{k+1} \leq R_{k+1}^\eta = \frac{1}{2k} \left[\left(2 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \sqrt{\mathcal{D}} \right]. \quad (4.8)$$

Substituindo (4.7) em (4.8) obtemos

$$\begin{aligned} v_{k+1} &\leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{1}{k} + \frac{2\delta^2}{k\varepsilon^2}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^k v_i\right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2\delta^2}{k\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 + \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \left(\sum_{i=1}^k v_i\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} v_{k+1} &\leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2\delta^2}{k\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \left(\sum_{i=1}^k v_i^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k v_i\right)^2\right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2\delta^2}{k\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \left(\sum_{i=1}^k v_i^2 - \frac{2}{k} \left(\sum_{i=1}^k v_i\right)^2 + \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k v_i\right)^2\right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2\delta^2}{k\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \left(\sum_{i=1}^k v_i^2 - \frac{2}{k} \sum_{i,j=1}^k v_i v_j + \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k v_i\right)^2\right) \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

então

$$v_{k+1} \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i + \left[\left(\frac{2\delta^2}{k\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

o que prova (4.3). Finalmente, como (4.6) é verdadeira para todo k , segue que

$$\sum_{i=1}^k (v_k - v_i)^2 \leq \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k (v_k - v_i)v_i,$$

i.e., podemos observar novamente que o polinômio $\mathcal{P}(v_k) \leq 0$. Analogamente, temos

$$v_k \geq r_k^\eta = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{i=1}^k v_i - \left[\left(\frac{2\delta^2}{k\varepsilon^2} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4\delta^2}{\varepsilon^2}\right) \sum_{j=1}^k \left(v_j - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.9)$$

A inequação (4.4) segue de (4.3) e (4.9). □

Por fim, faremos algumas observações importantes e de interesse independente para a expressão mais geral do operador \mathcal{L} . Para tanto, consideramos $N(\lambda)$ a função de distribuição dos autovalores dada pelo número de autovalores λ_k menores que um dado λ . Em seguida, observamos que o símbolo principal do operador diferencial \mathcal{L} em coordenadas locais é definido por um polinômio homogêneo em ξ obtido substituindo apenas as derivadas de ordem 2 em \mathcal{L} por ξ , para o nosso caso, o símbolo principal é dado por $T_x(\xi, \xi)$ para $x \in M^n$ e $\xi \in T_x M$, ver equações (1.17) e (1.18). Ele determina o primeiro termo assintótico da função de distribuição dos autovalores, como segue:

$$N(\lambda) = c_0 \lambda^{\frac{n}{2}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}) \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.10)$$

em que

$$c_0 = (2\pi)^{-n} \text{vol}\{(x, \xi) : T_x(\xi, \xi) \leq 1\} = (2\pi)^{-n} \int_{\{T_x(\xi, \xi) \leq 1\}} dx d\xi.$$

Para mais detalhes, veja [33, 34, 52, 58]. A partir de (4.10), obtemos

$$\lambda_k = c_0^{-\frac{2}{n}} k^{\frac{2}{n}} + O(1) \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

Em [27], Gomes e Miranda estenderam para o caso do Laplaciano deformado a solução parcial, proposta por Cheng-Yang [20], da conjectura generalizada de Pólya. Eles utilizaram para este operador duas identidades relacionadas aos k -primeiros autovalores daquele operador. Por limitação da técnica utilizada nesta tese, ainda não foi possível estender a solução de Gomes e Miranda para o nosso caso. Entretanto, aqui deduzimos as duas identidades que são utilizadas como ferramentas necessárias nas estimativas dos autovalores em casos particulares de \mathcal{L} , a saber:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i}{k^{\frac{2}{n}}} = \frac{n}{n+2} c_0^{-\frac{2}{n}} \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i^2}{k^{\frac{4}{n}}} = \frac{n}{n+4} c_0^{-\frac{4}{n}}. \quad (4.12)$$

Segue da expressão em (4.11) que

$$\frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i}{k^{\frac{2}{n}}} = c_0^{-\frac{2}{n}} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{2}{n}} \frac{1}{k} + \frac{O(1)}{k^{\frac{2}{n}}} \quad (4.13)$$

Considerando a função $f(t) = t^{\frac{2}{n}}$ sobre $[0, 1]$, e a partição $0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \dots < \frac{i}{k} < \dots < 1$ de $[0, 1]$ de modo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k f\left(\frac{i}{k}\right) \frac{1}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{2}{n}} \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{\frac{2}{n}} dt = \frac{n}{n+2}. \quad (4.14)$$

Assim, a primeira identidade em (4.12) segue de (4.13).

Para a segunda identidade em (4.12), começamos observando que

$$\lambda_k^2 = c_0^{-\frac{4}{n}} k^{\frac{4}{n}} + 2c_0^{-\frac{2}{n}} k^{\frac{2}{n}} O(1) + O(1)^2 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Então,

$$\frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i^2}{k^{\frac{4}{n}}} = c_0^{-\frac{4}{n}} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{4}{n}} \frac{1}{k} + 2O(1)c_0^{-\frac{2}{n}} \frac{1}{k^{\frac{2}{n}}} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{2}{n}} \frac{1}{k} + \frac{O(1)^2}{k^{\frac{4}{n}}}. \quad (4.15)$$

Como no primeiro caso, usamos a função $t \mapsto t^{\frac{4}{n}}$ e obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{4}{n}} \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{\frac{4}{n}} dt = \frac{n}{n+4}.$$

Portanto, a segunda identidade em (4.12) segue de (4.14) e (4.15).

Bibliografia

- [1] B. Andrews and J. Clutterbuck, Proof of the fundamental gap conjecture, *J. Amer. Math. Soc.* 24 (3) (2011), 899–916.
- [2] H. Alencar, G. S. Neto and D. Zhou, Eigenvalue estimates for a class of elliptic differential operators on compact manifolds, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* 46 (3) (2015), 491-514.
- [3] N. Aronszajn, A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. *J. Math. Pures Appl.* 36 (1957), 235-249.
- [4] M. S. Ashbaugh and R. Benguria, Optimal lower bound for the gap between the first two eigenvalues of one-dimensional Schrödinger operators with symmetric single-well potentials, *Proc. Amer. Math. Soc.* 105 (1989), no. 2, 419-424.
- [5] W. Ballmann; M. Gromov; V. Schoroder, Manifolds of nonpositive curvature, *Lecture Notes in Math.* 1111, Springer-Verlag, 1985.
- [6] A. Barros; J. N. Gomes; E. Ribeiro, A note on rigidity of the almost Ricci soliton, *Arch. Math. (Basel)* 100 (2003) 481-490.
- [7] A. Barros; J.N. Gomes, A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature, *J. Math. Anal. Appl.* 401 (2003) 702-705.
- [8] M. van den Berg, On condensation in the free-boson gas and the spectrum of the Laplacian, *J. Stat. Phys.* 31 (1983), 623-637.
- [9] R. L. Bishop and B. O’Neill, Manifolds of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* 145 (1969), 1-49.
- [10] T. Bourni, J. Clutterbuck, X. H. Nguyen, A. Stancu, G. Wei, V.M. Wheeler. Explicit Fundamental gap estimates for some convex domains in \mathbb{H}^2 . To appear in *Mathematical Research Letters*.
- [11] T. Bourni, J. Clutterbuck, X. H. Nguyen, A. Stancu, G. Wei, V.M. Wheeler. The vanishing of the fundamental gap of convex domains in \mathbb{H}^n . *Ann. Henri Poincaré* 23, 595–614 (2022).
- [12] M. P. Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [13] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1984.

- [14] D. Chen and Q. M. Cheng, Extrinsic estimates for eigenvalues of the Laplacian operator, *J. Math. Soc. Japan* 60 (2) (2008) 325-339.
- [15] D. Chen, T. Zheng and M. Lu, Eigenvalue estimates on domains in complete non-compact Riemannian manifolds, *Pacific J. Math.* 255 (1) (2012), 41-54.
- [16] D. Chen, T. Zheng and H. Yang, Estimates of the gaps between consecutive eigenvalues of Laplacian, *Pacific J. Math.* 282 (2) (2016) 293-311.
- [17] S. Y. Cheng, Eigenfunctions and eigenvalues of the Laplacian, *Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math.* 27 (1975) Part II, 185-193.
- [18] Q. M. Cheng and H. C. Yang, Estimates on eigenvalues of Laplacian, *Math. Ann.* 331 (2005) 445-460.
- [19] Q. M. Cheng and H. C. Yang, Bounds on eigenvalues of Dirichlet Laplacian, *Math. Ann.* 337 (2007), 159-175.
- [20] Q. M. Cheng and H. C. Yang, Estimates for eigenvalues on Riemannian Manifolds, *J. Differential Equations* 247 (8) (2009), 2270-2281.
- [21] S. Y. Cheng and S. T. Yau, Hypersurfaces with constant scalar curvature, *Math. Ann.* 225 (1977), 195-204.
- [22] C. L. Cunha, Propriedades de autovalores para uma classe de operadores elípticos de segunda ordem, Tese de Doutorado. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, (2016).
- [23] X. Dai, S. Seto and G. Wei, Fundamental gap estimate for convex domains on sphere - the case $n = 2$. *Comm. Anal. Geom.* 29 (5) (2021), 1095-1125.
- [24] R. Gicquaud, D. Ji and Y. Shi, On the asymptotic behavior of Einstein manifolds with an integral bound on the Weyl curvature, *Comm. Anal. Geom.* 21 (5) (2013), 1081-1113.
- [25] J. N. Gomes, Rigidez de superfícies de contato e caracterização de variedades riemannianas munidas de um campo conforme ou de alguma métrica especial, Tese de doutorado. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, (2012).
- [26] J. N. V. Gomes and M. A. M. Marrocos, On eigenvalue generic properties of the Laplace-Neumann operator, *J. Geom. Phys.* 135 (2019) 21-31.
- [27] J. N. V. Gomes and J. F. R. Miranda, Eigenvalue estimates for a class of elliptic differential operators in divergence form, *Nonlinear Anal.* 176 (2018), 1-19.
- [28] A. R. Gover and B. Orsted, Universal principles for Kazdan-Warner and Pohozaev-Schoen Type identities, *Commun. Contemp. Math.* 15(4) (2013).
- [29] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, "Inequalities," Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [30] C. He, G. Wei and Q. S. Zhang, Fundamental gap of convex domains in the spheres, *Amer. J. Math.* 142 (4) (2020), 1161-1192.

- [31] A. Henrot, Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators. Springer Science & Business Media, 2006.
- [32] G. N. Hile and M. H. Protter, Inequalities for eigenvalues of the Laplacian, *J. Indian Math. Soc.* 29 (4) (1980), 523-538.
- [33] L. Hörmander, The spectral function of an elliptic operator, *Acta Math.* 121 (1968), 193-218.
- [34] V. Ivrii, Precise spectral asymptotics for elliptic operators acting in fiberings over manifolds with boundary, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1100, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1984.
- [35] H. Kielhöfer, *Calculus of Variations: An introduction to the one-dimensional theory with examples and exercises.* Springer. Rimsting, Bayern Germany. 2018.
- [36] R. Lavine, The eigenvalue gap for one-dimensional convex potentials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121 (3) (1994), 815-821.
- [37] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature*, Springer. New York, 1997.
- [38] Y. Li and F. Du, Universal inequalities on complete noncompact smooth metric measures spaces. *Arch. Math. (Basel)*. 109 (6) (2017), 591-598.
- [39] P. Li, S.T. Yau, On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem, *Comm. Math. Phys.* 88 (1983) 309-318
- [40] M. A. M. Marrocos and J. N. V. Gomes, Generic Spectrum of Warped Products and G-Manifolds, *J. Geom. Anal.* 29 (2019), 3124-3134.
- [41] H. P. McKean, An upper bound to the spectrum of Δ on a manifold of negative curvature, *J. Differential Geom.* 4 (3) (1970), 359-366.
- [42] R. R. Mesquita, Fórmulas variacionais tipo Hadamard para os autovalores do η -laplaciano e aplicações, Tese de Doutorado. Universidade Federal do Amazonas, Manaus, (2014).
- [43] J. F. R. Miranda, Uma nova forma aberta do princípio do máximo fraco e estimativas de autovalores para uma classe de operadores diferenciais elípticos, Tese (Doutorado em Matemática), Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2015.
- [44] A. M. da Mota, Estimativas para o primeiro autovalor positivo de um operador elíptico de segunda ordem na forma divergente e alguns teoremas de comparação, Tese de Doutorado. Universidade Federal do Amazonas, Manaus, (2020).
- [45] J. Navarro, On second-order, divergence-free tensors, *J. Math. Phys.* 55 (2014) 062501.
- [46] L. E. Payne, G. Pólya, and H. F. Weinberger, Sur le quotient de deux fréquences propres consécutives, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 241 (1955), 917-919.
- [47] L. E. Payne, G. Pólya, and H. F. Weinberger, On the ratio of consecutive eigenvalues, *J. Math. Phys.* 35 (1956), 289-298.

- [48] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Third Edition, Springer, Los Angeles, USA, 2016.
- [49] M. A. Pinsky, The spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature. I, *J. Differential Geom.* 13 (1978), 87-91.
- [50] G. Pólya, On the eigenvalues of vibrating membranes, *Proc. London Math. Soc.* 11 (1961) 419-433.
- [51] H. Rosenberg, Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bull. Sc. Math.* 117 (1993) 217-239.
- [52] R. Seeley, An estimate near the boundary for the spectral function of the Laplace operator, *Amer. J. Math.* 102 (1980), 869-902.
- [53] D. Serre, Divergence-free positive symmetric tensors and fluid dynamic, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 35 (5) (2018), 1209-1234.
- [54] S. Seto, L. Wang, G. Wei, Sharp fundamental gap estimate on convex domains of sphere. *J. Differential Geometry*, 112 (2) (2019), 347-389.
- [55] K. Shiga, *Hadamard Manifolds, Geometry of Geodesics and Related Topics*. *Adv. Stud. Pure Math.* 3 (1984), 239-281
- [56] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides. Impa. 1979.
- [57] C. J. Thompson, On the ratio of consecutive eigenvalues in N-dimensions, *Stud. Appl. Math.* 48 (1969), 281-283.
- [58] D. G. Vasil'ev, Asymptotics of the spectrum of a boundary value problem, *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* 49 (1986), 167-237; English transl. in *Trans. Moscow Math. Soc.* (1987), 173-245.
- [59] H. Weyl, Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, *Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse* (1911) 110-117.
- [60] K. Yano, *Integral formulas in Riemannian geometry*. New York: Marcel Dekker, 1970.
- [61] H.C. Yang, An estimate of the difference between consecutive eigenvalues, preprint IC/91/60 of ICTP, Trieste (1991).
- [62] S.-T. Yau, *Nonlinear analysis in geometry*, *Monographies de L'Enseignement Mathématique*, vol. 33, L'Enseignement Mathématique, Geneva, 1986. Série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale, 8.MR865650 (88e:53001).