Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Uma busca por estruturas lineares e algébricas: um estudo das séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal e das funções holomorfas com cluster grande.

Leonardo da Silva Brito

Manaus-AM
Maio-2022

Uma busca por estruturas lineares e algébricas: um estudo das séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal e das funções holomorfas com cluster grande.

por

Leonardo da Silva Brito

sob orientação do

Professor Dr. Thiago Rodrigo Alves

e coorientação do

Professor Dr. Daniel Carando.

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Manaus-AM

Maio-2022

[0]Esse trabalho teve apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S586u

Silva Brito, Leonardo da

Uma busca por estruturas lineares e algébricas: um estudo das séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal e das funções holomorfas com cluster grande / Leonardo da Silva Brito . 2022

98 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Thiago Rodrigo Alves

Coorientador: Daniel Carando

Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Séries de Dirichlet. 2. Conjuntos de cluster grande. 3. Funções holomorfas. 4. Algebrável. 5. Faixa de Bohr maximal. I. Alves, Thiago Rodrigo. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Uma busca por estruturas lineares e algébricas: um estudo das séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal e das funções holomorfas com cluster grande.

Aluno: Leonardo da Silva Brito.

Número de matrícula: 3180073.

Pós-Graduação em Matemática: Nível Doutorado.

Área de concentração: Análise.

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Esta tese foi **aprovada** em reunião pública realizada em 24 de Maio de 2022, às 10 horas e 00 minutos, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves
Universidade Federal do Amazonas – UFAM (Orientador)

Prof. Dr. Pablo Sevilla Peris
Universitat Politècnica de València – UPV (Membro Externo)

Prof. Dr. Luis Santiago Muro
Universidad Nacional de Rosario – UNR e CIFASIS, CONICET (Membro Externo)

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso
Universidade Federal do Ceará – UFC (Membro Externo)

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque
Universidade Federal da Paraíba – UFPB (Membro Externo)

Manaus, 24 de Maio de 2022

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter iluminado meu caminho mantendo-me em segurança e com saúde durante toda essa jornada.

Aos meus pais Manoel Lima de Brito e Tânia Maria da Silva Brito apesar de todas dificuldades seguiram firme na minha criação e a me proporcionar uma boa educação. Como meu pai diz: "nunca esqueça de suas origens".

A minha esposa Ketele Willa Filgueira de Oliveira pela compreensão e pelo apoio em todos os momentos. Tê-la ao meu lado me deu mais força para seguir firme nessa jornada.

Ao meu orientador Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves por ter aceitado me orientar durante os 2 anos de Mestrado e os 4 anos de Doutorado, pelos conselhos, pela preparação durante esses anos, pelos estímulos e sugestões para a vida acadêmica como professor e pesquisador. Durante esses 6 anos, foi sempre atencioso em transmitir o conhecimento de forma correta, didática e clara. Esses são exemplos que quero levar comigo.

Ao meu coorientador Prof. Dr. Daniel Carando que aceitou em participar da minha orientação no curso de Doutorado, agregando ainda mais conhecimento e experiência na pesquisa científica.

A Profa. Dra. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda, que durante os 4 anos de curso do Doutorado assinou minha frequência acadêmica de aluno bolsista.

Aos membros das bancas de qualificações tanto de Mestrado quanto de Doutorado por suas orientações. Elas também serviam de termômetro para sabermos se estávamos indo bem.

Aos membros da banca examinadora da defesa de tese por terem aceitado o convite.

Aos meus colegas de curso de Doutorado Abraão Caetano Mendes, Adrian Vínicius Castro Ribeiro, Andrea Martins da Mota, Claudeilsio do Nascimento Carvalho, Cristiano de Souza Silva, Edson Lopes de Souza, Júlio Cezar Marinho da Fonseca, Matheus Hudson Gama dos Santos e Mario Octávio Vera Campoverde, e aos colegas do Mestrado Albert Silva do Amaral, Francisco Douglas Lira Pereira, Flávia Elisandra Magalhães Furtado, João Batista Marques dos Santos, Mikaela Aires de Oliveira, Naor Lima dos Santos e Wanessa Ferreira Tavares pelos suportes e pelas conversas em momentos tenebrosos e agradáveis.

Aos meus professores desde o período de graduação na Universidade do Estado do Amazonas até ao Mestrado e Doutorado na Universidade Federal do Amazonas pelos ensinamentos, motivações, conselhos, orientações e suportes que me ajudaram a chegar até aqui.

As minhas primas Sílvia Lima de Menezes e Rosiane Lima de Menezes com quem morei no início da minha graduação, pelos conselhos e orientações dados a mim.

A agência de fomento Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo auxílio financeiro durante os 2 anos de Mestrado e a agência de fomento Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM pelo auxílio financeiro durantes os 4 anos de Doutorado, ambas as agências foram essenciais para que eu pudesse fazer os cursos de Mestrado e Doutorado com estabilidade financeira.

Dedicatória

Aos meus queridos pais Manoel Lima de Brito e Tânia Maria da Silva Brito, ambos não tiveram oportunidade de estudar, mas sempre fizeram de tudo para que eu e meus irmão tivesses educação escolar.

A minha amada esposa Ketele Willa Filgueira de Oliveira pela amizade, companheirismo, amor e apoio em todos os momentos.

Aos meus irmãos Silas da Silva Brito, Silvana Brito de Menezes, Rosana da Silva Brito, Izaías Raimundo da Silva Brito, Ruth da Silva Brito, Raquel da Silva Brito, Ester Brito Aquino para que sejam motivados a buscar seus objetivos.

Aos meus sobrinhos Denice Júnior Brito de Menezes, Edclay Costa da Silva Junior, Darlison Brito de Menezes, Manoel Lima de Brito Neto, Ronaldo Brito da Silva, Paulo Cesar Brito de Menezes, Silviane Larissa Brito de Menezes, João Víctor Brito Teixeira, María Eloisa Monteiro da Silva, João Pedro da Silva Costa, Ruan Brito de Menezes e Valentim Brito Teixeira, para que sejam motivados a buscar seus objetivos.

A vida é boa quando você está feliz, mas é muito melhor quando os outros estão felizes por sua causa.

Papa Francisco.

BRITO, L. S., *Uma busca por estruturas lineares e algébricas: um estudo das séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal e das funções holomorfas com cluster grande*, 2022, 97 p., Tese de Doutorado, Universidade Federal do Amazonas, Manaus-AM.

Resumo

Neste trabalho investigamos a existência de estruturas lineares e algébricas em conjuntos de funções que gozam de duas propriedades singulares distintas. A primeira propriedade trata dos semiplanos de convergência (pontual, uniforme ou absoluta) das séries de Dirichlet. Mais precisamente: (i) o conjunto das séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal; (ii) o conjunto $\mathscr{N}$ (resp. o conjunto $\mathscr{L}$) das séries de Dirichlet cuja largura da faixa onde elas convergem, mas não convergem uniformemente (resp. não convergem absolutamente), é máxima igual a 1. A segunda propriedade está relacionada com o conjunto de cluster de funções. Mais especificamente: (i) o conjunto das funções holomorfas limitadas que possuem cluster (resp. cluster radial) grande (total) em todos os pontos possíveis; (ii) o conjunto das séries de Dirichlet limitadas que possuem conjuntos de cluster grande em todos os pontos possíveis; (iii) o conjunto das funções holomorfas limitadas cujos conjuntos de cluster radial tem a cardinalidade do continuum em cada ponto possível da esfera unidimensional.

Palavras-chave: Séries de Dirichlet; Conjuntos de cluster grande; Funções holomorfas; Algebrável; Faixa de Bohr maximal.

BRITO, L. S., *A search for linear and algebraic structures: a study of Dirichlet series with maximal Bohr's strip and holomorphic functions with large cluster*, 2022, 97 p, PhD. Dissertation, Federal University of Amazonas, Manaus-AM.

Abstract

In this work we investigate the existence of linear and algebraic structures in sets of functions with two distinct singular properties. The first property has to do with the half-planes of convergence (point, uniform or absolute) of Dirichlet series. More precisely: (i) the sets of Dirichlet series with maximal Bohr's strip; (ii) the set $\mathscr{N}$ (resp. the set $\mathscr{L}$) of Dirichlet series whose width of the strip where they converge, but do not converge uniformly (resp. do not converge absolutely), is maximum equal to 1. The second property has to do with cluster set of functions. More specifically: (i) the set of bounded holomorphic functions that have a large (total) cluster (resp. radial cluster) at all possible points; (ii) the set of bounded Dirichlet series that have large cluster sets at every possible points; (iii) the set of bounded holomorphic functions whose linear cluster sets have the cardinality of the continuum at every possible points of the one-dimensional sphere.

Keywords: Dirichlet series; Large cluster sets; Holomorphic functions; Algebrable; Maximal Bohr strip.

Lista de figuras

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+^*$	conjunto dos números reais estritamente positivos
$\mathbb{Q}_+^*$	$\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{Q}$
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
E	espaço vetorial normado ou espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$
E^*	dual topológico de E
E^m	$\underbrace{E \times \cdots \times E}_{m-vezes}$
$\lvert \cdot \rvert$	módulo
$\lVert \cdot \rVert$	norma
$\mathbb{D}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$
$\overline{\mathbb{D}}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert \leq 1\}$
$\mathbb{T}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert = 1\}$
$\mathbb{D}_r(b)$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z - b\rvert < r\}$
$\overline{\mathbb{D}}_r(b)$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z - b\rvert \leq r\}$
$\mathbb{D}_{\mathbf{r}}(b)$	$\{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \lvert z_j - b_j\rvert < r_j\, , j = 1, \ldots, n\}$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_j > 0$
$\mathbf{r}\mathbb{D}^n$	$\mathbb{D}_{\mathbf{r}}(0)$
$\mathbb{N}^n$	$\underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n-vezes}$
$\mathbb{N}_0^n$	$\underbrace{\mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0}_{n-vezes}$
$\mathbb{R}^n$	$\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-vezes}$
$\mathbb{C}^n$	$\underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n-vezes}$
$\mathbb{T}^n$	$\underbrace{\mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}}_{n-vezes}$
$\mathbb{D}^n$	$\{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \max\limits_{1 \leq i \leq n} \lvert z_i\rvert < 1\}$
B	$\{x \in E : \lVert x\rVert < 1\}$
S	$\{x \in E : \lVert x\rVert = 1\}$

$\overline{B}^{**}$	$\{x \in E^{**} : \|x\| \leq 1\}$
$\overline{S}^{**}$	$\{x \in E^{**} : \|x\| = 1\}$
Re z	parte real de z
$i\mathbb{R}$	$\{it : t \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{C}_a$	$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\, z > a\}$
[Re $> a$]	$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\, z > a\}$
[Re $< a$]	$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\, z < a\}$
$\overline{\mathbb{C}}_0$	$\mathbb{C}_0 \cup i\mathbb{R}$
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$	sequência $(x_1, x_2, \ldots)$
$\text{supp}((x_n)_{n=1}^{\infty})$	$\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$
$(c_0, \|\cdot\|)$	$\{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ com $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = \sup_n \|x_n\|$
$B_{c_{00}}$	$\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| \leq 1$ e existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para todo $n \geq N_0\}$
$\mathcal{C}(X)$	conjunto das funções contínuas definidas em X
$\mathcal{C}^1[0,1]$	conjunto das funções diferenciáveis no intervalo $[0,1]$
$\mathscr{W}$	subconjunto de $\mathcal{C}[0,1]$ formado pelas funções que não são diferenciáveis em nenhum ponto
$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$	conjunto dos polinômios em n-variáveis
$\mathcal{A}$	álgebra complexa ou álgebra de Banach
$\mathcal{A}(G)$	álgebra gerada pelo conjunto G
$\mathcal{H}(U)$	$\{f : U \longrightarrow \mathbb{C} : f$ é holomorfa$\}$
$\mathcal{H}_\infty(B)$	$\{f : B \longrightarrow \mathbb{C} : f$ é holomorfa e limitada em $B\}$
$\mathcal{L}(^m E)$	$\{A : E^m \longrightarrow \mathbb{C} : A$ é uma aplicação m-linear contínua$\}$
$\mathscr{P}_m(E)$	$\{P : E \longrightarrow \mathbb{C} : A$ é um polinômio m-homogêneo e contínuo$\}$
$\mathcal{A}_u(B)$	$\overline{\{\sum_{m=0}^{N} P_m \in \mathcal{H}_\infty(B) : N \in \mathbb{N}_0 \text{ e } P_m \in \mathscr{P}_m(E)\}}^{\|\cdot\|}$
$\mathfrak{D}$	conjunto de todas as séries de Dirichlet
$\mathfrak{P}$	conjunto de todas as séries de potências de infinitas variáveis
$\mathfrak{P}_\infty$	conjunto de todas as séries de potências de infinitas variáveis que satisfazem o Critério de Hilbert
$\mathfrak{D}_m$	conjunto de todas as séries de Dirichlet m-homogêneas
$\mathfrak{D}^{(N)}$	conjunto de todas as séries de Dirichlet que depende dos N primeiros números primos
$\mathfrak{P}_m$	conjunto de todas as séries de potência de infinitas variáveis m-homogêneas
$\mathscr{H}_\infty$	$\{D : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C} : D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ para cada $s \in \mathbb{C}_0, a_n \in \mathbb{C}$ são escalares e D é limitada$\}$
$\mathscr{H}_2$	$\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} : \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^2 \right)^{1/2} < \infty\}$
$\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$	$\overline{\{\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty : N \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$

$\mathscr{H}_\infty^m$	$\{\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty \ : \ a_n \neq 0$ somente $\Omega(n) = m\}$
$\mathscr{H}^{(N)}$	$\{\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty \ : a_n \neq 0$ somente se n depende de $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_N\}$, onde $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_N$ são os N primeiros números primos
$\mathfrak{B}$	transformada de Bohr
$\mathfrak{L}$	Bohr lift
$\mathbf{0}$	$(0, 0, \ldots)$
$\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$	$(\bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{N}_0^n) \times \mathbf{0}$
$\alpha \in \mathbb{N}_0^n$	$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$
$\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$	existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, 0, \ldots)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$
$\|\alpha\|$	$\sum_{k \geq 1} \alpha_k$
z^α	$z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$
$\text{supp}(\alpha)$	$\{k \in \mathbb{N} \ : \alpha_k \neq 0\}$
$(\mathfrak{p}_k)_{k=1}^\infty$	sequência de números primos $(2, 3, 5, 7, \ldots)$
$\#A$	cardinalidade do conjunto A
$\aleph_0$	$\#\mathbb{N}$
$\mathfrak{c}$	$\#\mathbb{R}$
Θ	subconjunto arbitrário dos números naturais
$\mathfrak{p}$	$(\mathfrak{p}_k)_{k=1}^\infty$ sequência de números primos
$\mathfrak{p}^{-s}$	$\left(\mathfrak{p}_1^{-s}, \mathfrak{p}_2^{-s}, \ldots\right)$
$\zeta(s)$	$\sum_{n=1}^\infty n^{-s}$
$\zeta_z(s)$	$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} n^{-s}$
D	série de Dirichlet $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$, onde $(a_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de escalares complexos e $s = \sigma + it$ é uma variável complexa
D_λ	$\lambda_1 D + \cdots + \lambda_k D^k$, com $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ e D série de Dirichlet
$\widetilde{\Omega}(D)$	$\{m \in \mathbb{N} \ :$ existe $n \in \mathbb{N}, \Omega(n) = m, a_n \neq 0\}$
$D_\Theta(s)$	$\sum_{n \in \Theta}^\infty a_n n^{-s}$
$A_N(D, s)$	$\sum_{n=1}^N \|a_n\| n^{-\sigma}, \quad s = \sigma + it$
$A_N^*(D)$	$\sum_{n=1}^N a_n$
$U_N(D)$	$\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \left\| \sum\limits_{n=1}^N a_n n^{it} \right\|$
$A_N(D)$	$\sum_{n=1}^N \|a_n\|$
σ_c	$\inf\{\sigma > 0 \ : \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ converge$\}$
σ_u	$\inf\{\sigma > 0 \ : \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ converge uniformemente em $\mathbb{C}_\sigma\}$
σ_a	$\inf\{\sigma > 0 \ : \sum_{n=1}^\infty \|a_n\| n^{-\sigma}$ converge $\}$
$\sigma_{\mathscr{H}_2}(D)$	$\left\{\sigma \in \mathbb{R} \ : \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^\sigma} n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty\right\}$
S	$\sup\limits_{D \in \mathfrak{D}} [\sigma_a(D) - \sigma_u(D)]$ ou $\sup\limits_{D \in \mathscr{H}_\infty} \sigma_a(D)$
S^m	$\sup\limits_{D \in \mathfrak{D}_m} [\sigma_a(D) - \sigma_u(D)]$ ou $\sup\limits_{D \in \mathscr{H}_\infty^m} \sigma_a(D)$
S_2	$\sup\limits_{D \in \mathfrak{D}} [\sigma_a(D) - \sigma_{\mathscr{H}_2}(D)]$ ou $\sup\limits_{D \in \mathscr{H}_2} \sigma_a(D)$
$\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$	$\left\{\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathscr{A}(\mathbb{C}_0) \ : \ a_n = 0\right.$ se $\mathfrak{p}_i \| n$ para algum $\left. i \notin \Theta\right\}$, onde $\Theta \subset \mathbb{N}$

$Cl(f,x)$	conjunto de cluster de f em x
$\mathcal{F}_M(X)$	$\{f \in X\ : \cap_{x\in M} Cl(f,x)$ contém um disco centrado em zero$\}$
$\mathcal{F}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B))$	$\{f \in \mathcal{H}_\infty(B)\ : \cap_{x\in \overline{B}^{**}} Cl(f,x)$ contém um disco centrado em zero$\}$
$\mathcal{F}_S(\mathcal{H}_\infty(B))$	$\{f \in \mathcal{H}_\infty(B)\ : \cap_{x\in S} Cl(f,x)$ contém um disco centrado em zero$\}$
$\mathcal{G}_M(X)$	$\{f \in X\ :\ Cl(f,x) = \overline{f(B)}$ para todo $x \in M\}$
$\mathcal{G}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B))$	$\{f \in \mathcal{H}_\infty(B)\ :\ Cl(f,x) = \overline{f(B)}$ para todo $x \in \overline{B}^{**}\}$
$\mathcal{G}_S(\mathcal{H}_\infty(B))$	$\{f \in \mathcal{H}_\infty(B)\ :\ Cl(f,x) = \overline{f(B)}$ para todo $x \in S\}$
$Clr(f,x)$	conjunto de cluster radial de f em x
$\mathscr{I}$	$\{D \in \mathscr{H}_\infty^{(1)}\ : \cap_{t\in\mathbb{R}} Cl(D,it)$ contém um disco centrado em zero$\}$
$\mathscr{M}$	$\{D \in \mathscr{A}(\mathbb{C}_0)\ : \sigma_a(D) = 1/2\}$
$\mathscr{N}$	$\{D \in \mathscr{H}_\infty\ : \sigma_u(D) - \sigma_c(D) = 1\}$
$\mathscr{L}$	$\{D \in \mathscr{H}_\infty\ : \sigma_a(D) - \sigma_c(D) = 1\}$
$\mathcal{L}_M$	$\{f \in \mathcal{H}_\infty(B) : \cap_{z\in M} Clr(f,z)$ contém um disco centrado em zero$\}$
$\mathcal{T}_M$	$\{f \in \mathcal{H}_\infty(B) : Clr(f,z) = \overline{f(B)}$ para todo $x \in M\}$
$\mathcal{J}_M$	$\{f \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})\ : \#Clr(f, \mathrm{e}^{it}) = \mathfrak{c}$ para cada $\mathrm{e}^{it} \in M\}$
$B^{(k)}$	$\{n_k^1, \ldots, n_k^{p^k}\}$
$\Pi_k(z)$	$\sum_{j=1}^{p^k} z_{n_k^j} e_j$
$\mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m)$	$\{D \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)\ :$ para todo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$ satisfazendo $\|\lambda\|_\infty \leq j$ e $\lvert\lambda_k\rvert \geq j^{-1}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_N(D_\lambda, \delta_m) > \ell\}$
$\mathscr{D}_\Theta$	$\bigcap\limits_{j\geq 1} \bigcap\limits_{k\geq 1} \bigcap\limits_{\ell\geq 1} \bigcap\limits_{m\geq 2} \mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m)$
$\exp(s)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}$
$\mathcal{E}$	a família das funções do tipo exponenciais $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ da forma $\varphi(s) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \exp(\beta_i s)$, onde $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \beta_1, \ldots, \beta_k$ distintos
$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\alpha$	$\lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_n^{\alpha_n}$
C_θ	$\left\{s \in \mathbb{C}\ : \frac{\lvert s - s_0\rvert}{\mathrm{Re}\,(s - s_0)} \leq \frac{1}{\cos\theta}\right\}$, onde $0 \leq \theta < \cos(\pi/2)$
ℓ_∞^n	$(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$

Conteúdo

Introdução

Objetos matemáticos exóticos, no sentido de quebrarem a intuição matemática, são sempre intrigantes. Como exemplo, citamos os famosos Monstros de Weierstrass, as funções aditivas descontínuas e as curvas de Peano. Nos últimos 17 anos, após o trabalho seminal de Aron, Gurariy e Seoane-Sepúlveda [13], diversos matemáticos começaram a investigar conjuntos formados por estes objetos exóticos, questionando-se acerca da existência de subestruturas lineares ou algébricas inseridas nestes conjuntos. Esse interesse culminou num crescente desenvolvimento de uma nova subárea da Análise Funcional, a qual os resultados a ela pertencentes são conhecidos como resultados de *lineabilidade* ou, as suas variantes, *espaçabilidade* ou *algebrabilidade*.

A título de exemplo, descrevemos neste e nos próximos parágrafos o desenvolvimento da investigação acerca do mais famoso conjunto nessa recente subárea da Análise Funcional. Considere o conjunto $\mathcal{C}[0,1]$ das funções contínuas do intervalo fechado $[0,1]$ à valores reais. Sabe-se que este conjunto, considerado com as operações de soma e de multiplicação pontual, é uma álgebra de Banach quando munido com a norma do supremo. Agora, seja $\mathscr{W}$ o subconjunto de $\mathcal{C}[0,1]$ formado pelas funções que não são diferenciáveis em nenhum ponto. Até meados da primeira metade do século dezenove acreditava-se que o conjunto $\mathscr{W}$ era vazio. Inclusive, em 1806, Ampère tentou fornecer uma justificativa teórica de que as funções contínuas são diferenciáveis, exceto, eventualmente, em alguns pontos do domínio.

Grande foi a surpresa quando na primeira metade do século dezenove surgiram os primeiros exemplos de elementos pertencentes ao conjunto $\mathscr{W}$. Até onde sabemos, o primeiro exemplo foi exibido por Bolzano em 1830. No entanto, o primeiro exemplo publicado numa revista matemática foi devido ao matemático Weierstrass [80], e remonta ao ano 1872. Hoje estas funções publicadas por Weierstrass são denominadas Monstros de Weierstrass. Após saber que o conjunto $\mathscr{W}$ é não vazio, é natural questionar quão grande seria esse conjunto dentro da álgebra de Banach $\mathcal{C}[0,1]$. Antes de mais nada, o que seria ser "grande"? Uma primeira noção de ser "grande" pode ser pensada em termos topológicos, considerando a topologia induzida em $\mathcal{C}[0,1]$ pela norma do supremo. Neste sentido, em 1931, Banach [16] mostrou, usando o Teorema da Categoria de Baire, que o complementar de $\mathscr{W}$ em $\mathcal{C}[0,1]$ é magro, ou seja, no sentido topológico, o conjunto $\mathscr{W}$ é "grande"em $\mathcal{C}[0,1]$.

Pois bem, sabemos que no sentido topológico o conjunto $\mathscr{W}$ é grande em $\mathcal{C}[0,1]$, mas e as suas subestruturas lineares ou algébricas? Antes de entrarmos nessa questão, é importante ressaltar que o conjunto $\mathscr{W}$ não é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}[0,1]$. De fato, $\mathscr{W}$ não contém a função nula. Entretanto, mesmo se considerássemos o conjunto $\mathscr{W} \cup \{0\}$ ao invés de apenas $\mathscr{W}$, ainda assim não teríamos um subespaço de $\mathcal{C}[0,1]$. Para ver isso, bastaria notar que dados $f \in \mathscr{W}$ e $g \in \mathcal{C}^1[0,1] \setminus \{0\}$, ocorrem $f + g \in \mathscr{W}$ e $(f+g) - f = g \notin \mathscr{W} \cup \{0\}$. Sabido que $\mathscr{W}$ não é subespaço vetorial de $\mathcal{C}[0,1]$, o questionamento escrito no início deste parágrafo torna-se relevante no seguinte sentido: Existe subespaços vetoriais ou subálgebras de $\mathcal{C}[0,1]$ constituídas por elementos de $\mathscr{W} \cup \{0\}$? Descreveremos abaixo alguns resultados que respondem essa pergunta.

Em 1966, Gurariy [58] mostrou que o conjunto $\mathscr{W} \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de $\mathcal{C}[0,1]$ cuja dimensão é infinita ; neste caso, dizemos que $\mathscr{W}$ é *lineável*. Quase quatro décadas depois, Fonf, Gurariy e Kadec [55] provaram que existe um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{C}[0,1]$ contido em $\mathscr{W} \cup \{0\}$; neste caso, dizemos que $\mathscr{W}$ é *espaçável*. Ainda no sentido de verificar a existência de estruturas lineares em $\mathscr{W}$, um resultado muito interessante foi dado por Rodríguez-Piazza [75]. Antes de exibir o resultado, lembre que sabemos do clássico teorema de Banach-Mazur que na classe dos espaços de Banach separáveis, o espaço $\mathcal{C}[0,1]$ é um espaço de Banach universal, i.e., ele é por si mesmo separável e contém cópias isométricas de todos os espaços de Banach separáveis. Posto isso, uma pergunta natural seria se, dado um espaço de Banach separável E, existe uma isometria linear $T : E \to \mathcal{C}[0,1]$ tal que $T(E) \subset \mathscr{W} \cup \{0\}$? O resultado de Rodríguez-Piazza, acima indicado, responde esta pergunta positivamente.

Por fim, para encerrar a discussão sobre os resultados referentes ao conjunto $\mathscr{W}$, enunciamos um resultado de Bayart e Quarta [24]. Eles mostraram que existe uma álgebra infinitamente gerada por geradores algebricamente independentes $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}[0,1]$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathscr{W} \cup \{0\}$. Neste caso, dizemos que $\mathscr{W}$ é *fortemente algebrável*. Enfatizamos que as definições de lineável, espaçável e fortemente algebrável serão descritas com detalhes no Capítulo 1, Seção 1.8.

Resultados de lineabilidade, espaçabilidade e algebrabilidade vêm sendo explorados nas mais diversas áreas da Análise. Por exemplo, existem resultados em Análise Complexa [3–5, 7, 14, 21, 25, 26, 62–64], Dinâmica Complexa e Linear [31–33, 54, 77], Teoria de Operadores [17, 57, 73], Espaços de Sequências [12, 20, 39, 41–43], dentre outros [2, 15, 18–20, 26, 40, 42]. Para um compilado mais detalhado dos resultados e técnicas gerais da área, indicamos as referências [10, 30].

A investigação da existência de estruturas lineares e algébricas está diretamente ligada a dificuldade de exibir o objeto matemático exótico. Não diferente disto, esta tese segue essa filosofia. Estudamos conjuntos de objetos que, em geral, são de difícil construção. Nesses tipos de conjuntos, procuramos investigar tanto a existência de estruturas lineares quanto a de estruturas algébricas (caso faça sentido). Com relação à existência de estruturas algébricas, estudamos o conceito introduzido por Bartoszewicz e Glab [20]. Nos parágrafos seguintes introduziremos os dois principais conjuntos de objetos que investigamos, assim como suas propriedades exóticas.

O primeiro conjunto de objetos que investigamos é aquele que é constituído por séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal. Uma *série de Dirichlet* D é uma série formal da forma $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, onde s é uma variável complexa e a_n são escalares complexos. Os domínios de convergência pontual, uniforme e absoluta de uma série de Dirichlet são semiplanos verticais [47, 74]. Mais especificamente, para uma série de Dirichlet D sempre existem valores $\sigma_c(D), \sigma_u(D)$ e $\sigma_a(D)$ em $[-\infty, \infty]$ tais que, para cada $\varepsilon > 0$, a série D converge pontualmente, uniformemente ou absolutamente nos semi-planos $[\text{Re} > \sigma_c(D) + \varepsilon], [\text{Re} > \sigma_u(D) + \varepsilon]$ e $[\text{Re} > \sigma_a(D) + \varepsilon]$ respectivamente, e não converge pontualmente, uniformemente ou absolutamente em nenhum ponto dos semiplanos $[\text{Re} < \sigma_c(D) - \varepsilon]$, $[\text{Re} < \sigma_u(D) - \varepsilon]$ e $[\text{Re} < \sigma_a(D) - \varepsilon]$ respectivamente. Ademais, os valores $\sigma_c(D), \sigma_u(D)$ e $\sigma_a(D)$ são respectivamente denominados abscissas de convergência pontual, uniforme e absoluta.

A partir de agora, sempre que considerarmos uma série de Dirichlet D, ela não será convergente e nem divergente em todos os pontos. Como veremos nas preliminares desta tese, isso garantirá que os valores $\sigma_c(D), \sigma_u(D)$ e $\sigma_a(D)$ devem ser números reais, e satisfazem as desigualdades

$$\sigma_c(D) \leq \sigma_u(D) \leq \sigma_a(D).$$

O problema da abscissa de convergência absoluta de Bohr [35, 36] consiste em determinar o número

$$S = \sup_{D \in \mathfrak{D}} \left[\sigma_a(D) - \sigma_u(D)\right].$$

Este problema foi proposto por Harald Bohr no início do século vinte. Em 1913 ele mostrou em [35] que $S \leq 1/2$. Bohr não conseguiu mostrar que $S = 1/2$. No entanto, desenvolveu várias ferramentas que posteriormente seriam usadas para resolver essa questão. Em 1931, Bohnenblust e Hille, em posse dos resultados desenvolvidos por Bohr, mostraram em [38] que $S = 1/2$. Mais ainda, Bohnenblust e Hille verificaram que o supremo que determina o número S é atingido, i.e., existe uma série de Dirichlet D tal que $\sigma_a(D) - \sigma_u(D) = 1/2$. As séries de Dirichlet que satisfazem essa condição são ditas possuírem *faixa de Bohr maximal*.

Com relação à diferença entre as outras abscissas de convergência, a distância máxima na qual uma série de Dirichlet converge pontualmente, mas não converge absolutamente (resp. não converge uniformemente) é no máximo 1. Além disso, vale que:

$$\sup_{D \in \mathfrak{D}} \left[\sigma_a(D) - \sigma_c(D)\right] = \sup_{D \in \mathfrak{D}} \left[\sigma_u(D) - \sigma_c(D)\right] = 1.$$

Na verdade existe uma série de Dirichlet D (veja Observação 2.6.3) tal que

$$\sigma_a(D) - \sigma_c(D) = \sigma_u(D) - \sigma_c(D) = 1.$$

A busca em resolver o problema da abscissa de convergência absoluta de Bohr, desencadeou outras ideias, com ramos em Análise Funcional (funções holomorfas em espaços de dimensão infinita) e Análise Harmônica (espaços de Hardy no toro de dimensão infinita). Indicamos [36, 38, 47, 48, 74] para um estudo mais completo sobre esses temas.

O segundo conjunto que investigamos é o das funções holomorfas com conjunto de cluster grande. A teoria de conjuntos de cluster foi formulada pela primeira vez por Painlevé em 1895 [71], o qual procurava descrever as singularidades de funções analíticas em pontos de um certo domínio. Mais precisamente, dado um espaço vetorial topológico (E, τ) e U um subconjunto de E, o *conjunto de cluster* de uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ num ponto $z_0 \in U$ é o conjunto $Cl(f, z_0)$ de todos os limites de pontos de $f(z)$ quando $z \xrightarrow{\tau} z_0$.

Em 1961 estudos relacionados aos conjuntos de cluster foram considerados por Scharck (um nome fictício escolhido por oito brilhantes matemáticos daquela época) em [76]. Dentre outros resultados, eles verificaram que o conjunto de cluster de uma função holomorfa limitada $f \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ em $z_0 \in \mathbb{T}$ coincide com o conjunto das avaliações $\varphi(f)$ de elementos φ no espectro da álgebra $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ que cumprem $\varphi(id) = z_0$, onde id representa a função identidade em $\mathbb{C}$. Este resultado é uma versão mais fraca do famoso problema de Corona [11], e problemas desse tipo são atualmente conhecidos como Problemas de Valores de Cluster. Problemas de Valores de Cluster em holomorfia de dimensão infinita vêm sendo bastante explorados em anos recentes; por exemplo, veja [11, 12, 60, 70].

Existe também um conceito chamado de *conjunto de cluster grande*, que diz respeito à quão grande pode ser o conjunto de cluster $Cl(f, z_0)$ de uma função f em um ponto z_0. Visto que o conjunto de cluster de uma função holomorfa limitada num ponto é sempre compacto (veja Teorema 1.9.3), no máximo podemos esperar que estes conjuntos de cluster contenham um disco aberto. Neste caso em particular, a função f tem um comportamento aleatório próximo do ponto z_0. Um estudo sobre isso é realizado em [7].

Ainda tratando sobre conjuntos de cluster, existe o conceito de conjunto de cluster radial. O *conjunto de cluster radial* de f em um ponto z_0 da esfera unitária S de E é o conjunto $Clr(f, z_0)$ de todos os limites de pontos de $f(tz_0)$ quando $t \to 1$, onde $t > 0$. O Teorema de Fatou em [52] assegura que para toda função holomorfa limitada $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, o limite $\lim_{t \to 1} f(tz)$ existe para quase todo ponto z do toro $\mathbb{T}$. Além disso, existem generalizações do Teorema de Fatou para $\mathbb{C}^n$ [78, Theorem 9, p. 37]. Por outro lado, em [66] é mostrado que para cada conjunto discreto D da esfera unitária de $\mathbb{C}^n$, existe uma função holomorfa e limitada f na bola unitária aberta de $\mathbb{C}^n$ tal que o conjunto de cluster radial de f em todo ponto de D contém um disco aberto fixo. Logo, para os pontos z pertencentes a D o limite radial $\lim_{t \to 1} f(tz)$ não existe. Isso nos leva de certa forma, a pensar nestes tipos de resultados como uma contraparte do Teorema de Fatou.

O objetivo principal desta tese é estudar conjuntos formados pelos dois objetos supramencionados. A saber, conjuntos de séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal, e conjuntos de funções holomorfas limitadas com conjunto de cluster grande em todos os pontos possíveis.

Os capítulos da tese estão organizados como descrição a seguir. Ressaltamos que após a Introdução há uma seção que abrange as principais notações que usaremos em todo o trabalho. Ademais, nos Capítulos 2 e 3 trataremos exclusivamente dos resultados de nossas pesquisas.

No Capítulo 1, trataremos alguns conceitos preliminares que consideramos essenciais para esta tese. Englobando os tópicos de funções holomorfas em espaços de Banach, séries de potências, séries de Dirichlet, abscissas de convergência de uma série de Dirichlet, conjuntos de cluster, sequências interpolantes, Álgebras de Banach, lineabilidade, espaçabilidade, algebrabilidade, dentre outros tópicos gerais.

No Capítulo 2, apresentaremos os resultados que envolvem as abscissas de convergência de uma série de Dirichlet. Mais especificamente, primeiro consideramos a norma uniforme e um conjunto $\mathscr{M}$ das séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal. Mostramos os seguintes resultados: (i) $\mathscr{M}$ contém (a menos do vetor nulo) uma cópia isométrica de ℓ_1; (ii) $\mathscr{M}$ contém um conjunto G_δ-denso na álgebra das séries de Dirichlet que são limites uniformes de polinômios de Dirichlet; (iii) $\mathscr{M}$ é fortemente $\aleph_0$-algebrável. Também, investigamos $\mathscr{M}$ como um subconjunto do espaço de Hilbert de séries de Dirichlet cujos coeficientes possuem quadrado somáveis (veja essa terminologia na Seção 1.6). Neste caso, verificamos que $\mathscr{M}$ contém (a menos do vetor nulo) uma cópia isométrica de ℓ_2. Ainda envolvendo abscissas de convergência de séries de Dirichlet, estudamos o conjunto $\mathscr{N}$ (resp. o conjunto $\mathscr{L}$) das séries de Dirichlet cuja largura da faixa onde elas convergem, mas não convergem uniformemente (resp. não convergem absolutamente), é máxima igual a 1. Concluímos que os conjuntos $\mathscr{N}$ e $\mathscr{L}$ são ambos lineáveis.

No Capítulo 3, consideramos a álgebra de Banach constituída pelas funções holomorfas limitadas definidas sobre a bola (centrada na origem) unitária aberta de um espaço de Banach complexo e munida com a norma do supremo. Nesta álgebra, investigamos o conjunto das funções que possuem cluster grande (cluster total) em todos os pontos possíveis. Mostramos que ambos os conjunto contém (a menos do vetor nulo) uma cópia isomorfa de ℓ_1 e, ademais, as funções que possuem cluster grande em todos os pontos possíveis é pontual fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável. Como uma aplicação desses resultados, e ainda considerando a norma do supremo, foi possível comprovar a existência de estruturas lineares e algébricas inseridas no conjunto $\mathscr{I}$ das séries de Dirichlet limitadas definidas no semiplano $[\mathrm{Re} > 0]$ e que possuem conjuntos de cluster grande em todos os pontos possíveis. Especificamente, vimos que $\mathscr{I}$ contém (a menos do vetor nulo) uma cópia isomorfa de ℓ_1, e é pontual fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável. Também, em dimensão finita, consideramos o conjunto $\mathcal{L}_M$ (resp. $\mathcal{T}_M$) formado por funções holomorfas limitadas que possuem conjuntos de cluster radial grande (resp. total) em cada ponto de um subconjunto enumerável M da esfera. Nestas condições, mostramos que o conjunto $\mathcal{L}_M \cap \mathcal{T}_M$ contém (a menos do vetor nulo) uma cópia isomorfa de ℓ_1, e que $\mathcal{L}_M$ é pontual fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável. Por fim, estudamos no caso unidimensional, o conjunto $\mathcal{J}_M$ das funções holomorfas limitadas cujos conjuntos de cluster radial tem a cardinalidade do continuum em cada ponto de um subconjunto M do toro $\mathbb{T}$. Neste caso, vimos que se M tem medida de Lebesgue unidimensional nula, então $\mathcal{J}_M$ é fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável.

Para finalizar, indicamos as referências [50, 67] para um estudo sobre funções holomorfas em dimensão infinita. Para um estudo de séries de Dirichlet, indicamos [47, 74]. E para conceitos referentes aos espaços de Banach, indicamos [49].

Definições de notações gerais

Devido à vasta quantidade de símbolos e notações que poderiam gerar ambiguidade ou confusão neste trabalho, e preocupados em evitar isto, apresentaremos em detalhes algumas definições básicas e notações que usaremos.

Índices. O símbolo $\mathbb{N}$ representa o conjunto de todos os números naturais $\{1, 2, 3, \ldots\}$. O conjunto de todos os números reais será denotado por $\mathbb{R}$. O símbolo $\mathbb{R}_+^*$ denotará o conjunto dos números reais estritamente positivos. O conjunto dos números racionais será denotado por $\mathbb{Q}$. Também escreveremos $\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{Q}$. Ademais, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\,; \quad \mathbb{N}^n = \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n-\text{vezes}}; \quad \mathbb{N}_0^n = \underbrace{\mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0}_{n-\text{vezes}}\,;$$
$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)\,; \quad \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}_0^n\right) \times \mathbf{0}\,; \quad \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{vezes}}\,.$$

O conjunto $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ é formado por todas as sequências infinitas $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $\alpha_k \in \mathbb{N}_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e os números α_k's são diferente de zero apenas para um número finito de termos nas posições iniciais. Os elementos deste conjunto, são chamados multi-índices e serão denotados por α. Eles tem a seguinte forma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots)$. Para um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ escreveremos $|\alpha| = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, e o chamaremos *comprimento de* α. Visto que apenas um número finito de α_k's são diferentes de zero, segue que esse comprimento é finito. O suporte de um multi-índices α é o conjunto $\operatorname{supp}(\alpha) = \{k \in \mathbb{N} : \alpha_k \neq 0\}$. Consideraremos $\mathbb{N}_0^n$ como subespaço de $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ identificando o elemento $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ com o elemento $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$.

Análise complexa. O conjunto dos números complexos é denotado por $\mathbb{C}$. Escreveremos um número complexo arbitrário por z ou s. Também identificaremos o número complexo s por $(\sigma, t) = \sigma + it$ com $\sigma, t \in \mathbb{R}$ onde $i^2 = -1$. A parte real de s será denotada por $\operatorname{Re} s$. Os símbolos $\mathbb{D}$ e $\overline{\mathbb{D}}$ denotam respectivamente, os discos unitários aberto e fechado do plano complexo, e a fronteira de ambos esses conjuntos será denotada por $\mathbb{T}$. O conjunto $\mathbb{T}$ será chamado de *toro*. Mais precisamente,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}\,; \quad \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}\,;$$
$$\mathbb{T} = \{\mathrm{e}^{it} : t \in \mathbb{R}\} = \{2^{it} : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Para um ponto $b \in \mathbb{C}$ e um número real qualquer $r > 0$, o disco aberto e o disco fechado de centro em b e raio r serão denotados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_r(b) &= \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-b| < r\}\,; \\ \overline{\mathbb{D}}_r(b) &= \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-b| \leq r\}\,. \end{aligned}$$

Dado um número $a \in \mathbb{R}$, o símbolo $\mathbb{C}_a$ representa o conjunto de todos os números complexos z tais que $\mathrm{Re}\, z > a$. O eixo imaginário do plano complexo será denotado por $i\mathbb{R}$, e o fecho do semiplano complexo será denotado por $\overline{\mathbb{C}}_0$. Mais especificamente,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_a =& \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\, z > a\}\,; \quad i\mathbb{R} = \{it \,:\, t \in \mathbb{R}\}\,; \\ \overline{\mathbb{C}}_0 =& \mathbb{C}_0 \cup i\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, o símbolo $\mathbb{C}^n$ representa o conjunto de todos os vetores $(z_1, \ldots, z_n)$ tais que $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Também usaremos a notação z para representar um vetor de $\mathbb{C}^n$. Para cada vetor $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, consideraremos a norma do máximo $z \in \mathbb{C}^n \longmapsto \|z\| \in \mathbb{R}$ onde $\|z\| = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|$. O disco aberto e unitário de $\mathbb{C}^n$ é o conjunto de todos os vetores $z \in \mathbb{C}^n$ tais que $\|z\| < 1$. Em símbolos, temos o seguinte

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n =& \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n-\text{vezes}}\,; \quad \|z\| = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|\,; \\ \mathbb{D}^n =& \{z \in \mathbb{C}^n \,:\, \|z\| < 1\}\,. \end{aligned}$$

De modo mais geral, para um vetor $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ e $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ com $r_j > 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, o símbolo $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}(b)$ representa o conjunto de todos os vetores $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tais que $|z_j - b_j| < r_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Similarmente, o *politoro* em n-variáveis é o conjunto de todos os $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ tais que $|w_j| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$, e ele será denotado por $\mathbb{T}^n$. Em suma, escreveremos

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\mathbf{r}}(b) =& \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,:\, |z_j - b_j| < r_j\,, j = 1, \ldots, n\}\,; \\ \mathbb{T}^n =& \{(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_i| = 1\}\,. \end{aligned}$$

Para $b = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$ escrevamos $\mathbf{r}\mathbb{D}^n := \mathbb{D}_{\mathbf{r}}(b)$. O símbolo $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ representará o conjunto $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots$, isto é,

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} := \{(z_j)_{j=1}^{\infty} \,:\, z_j \in \mathbb{C} \ \text{ para todo } \ j \in \mathbb{N}\}.$$

A soma e multiplicação no conjunto $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ são as usuais coordenada à coordenada.

Para um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ e uma sequência $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ de números complexos, escreveremos $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \ldots$. Note que como α tem comprimento finito, o produto acima também o é. Se a sequência z acima for finita, digamos que $z = (z_j)_{j=1}^{n}$, podemos supor que ela seja da forma $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ sugerindo que $z_j = 0$ para todo $j \geq n+1$. Logo, para a sequência finita $z = (z_j)_{j=1}^{n}$, teremos $z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$. Convencionamos $0^0 = 1$. Também, para $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ escrevemos

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{\alpha} := \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_n^{\alpha_n}.$$

Séries de Dirichlet Seja $a \in \mathbb{R}$. Com relação à uma série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, onde s é uma variável complexa e a_n são escalares complexos, trataremos sobre três tipos de convergências. Agora esclareceremos algumas terminologias sobre essas convergências. A primeira é a convergência pontual, para este tipo de convergência considere a sequência de somas parciais

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s} \right)_{N=1}^{\infty}. \tag{1}$$

Nesta caso, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge pontualmente em s se a sequência em (1) for convergente; se para cada $s \in \mathbb{C}_a$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge pontualmente, diremos que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *converge pontualmente* no semiplano complexo $\mathbb{C}_a$. A segunda é a convergência uniforme, para este caso, note que podemos considerar às seguintes funções $D_N : \mathbb{C}_a \longrightarrow \mathbb{C}$, onde $D_N(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$. Quando a sequência de funções $(D_N)_{N=1}^{\infty}$ convergir uniformemente no semiplano complexo $\mathbb{C}_a$, diremos que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *converge uniformemente* em $\mathbb{C}_a$. A terceira é a convergência absoluta, neste caso, considere a seguinte sequência de somas parciais

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n| n^{-\sigma} \right)_{N=1}^{\infty}. \tag{2}$$

Quando a sequência em (2) convergir, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, onde $s := \sigma + it$ com $t \in \mathbb{R}$, converge absolutamente em s; se para cada $s := \sigma + it \in \mathbb{C}_a$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge absolutamente, diremos que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *converge absolutamente* no semiplano complexo $\mathbb{C}_a$.

Teoria dos números. A sequência dos números primos $\mathfrak{p}_1 = 2\,, \mathfrak{p}_2 = 3\,, \mathfrak{p}_3 = 5\,, \dots$ será denotada por $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_k)_{k=1}^{\infty}$. Dado um número complexo s arbitrário, usaremos a notação $\mathfrak{p}^{-s}$ para significar

$$\mathfrak{p}^{-s} = (\mathfrak{p}_1^{-s}, \mathfrak{p}_2^{-s}, \dots, \mathfrak{p}_k^{-s}, \dots).$$

A função $n \in \mathbb{N} \longmapsto \Omega(n) \in \mathbb{N}_0$, conta o número de divisores primos de n incluindo multiplicidades. A igualdade $n = \mathfrak{p}^{\alpha}$, com $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, significa a decomposição de n em números primos, isto é, $n = \mathfrak{p}^{\alpha} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{\alpha_k}$. Logo, se $\mathfrak{p}^{\alpha}$ é a decomposição de n em números primos, então $\Omega(n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = |\alpha|$.

Espaços normados. Para um espaço normado $(E, \|\cdot\|_E)$ os símbolos B_E, $\overline{B}_E$ e S_E denotam, respectivamente, a bola aberta, a bola fechada e a esfera de E, todos esses conjuntos são unitários e centrados na origem. Além disso, para um ponto arbitrário $a \in E$ e um número real $r > 0$, o símbolo $B(a,r)$ denotará o conjunto de todos os elementos $x \in E$ tais que $\|x - a\| < r$. Precisamente, temos

$$\begin{aligned} B_E =& \{x \in E \, : \|x\|_E < 1\} \, ; \;\; \overline{B}_E = \{x \in E \, : \|x\|_E \leq 1\} \, ; \\ S_E =& \{x \in E \, : \|x\|_E = 1\} \, ; \;\; B(a,r) = \{x \in E : \|x - a\|_E < r\} \, . \end{aligned}$$

O espaço vetorial dual topológico de E é o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos $x^* : E \longrightarrow \mathbb{C}$ e será representado por E^*, ou seja,

$$E^* = \big\{x^* : E \longrightarrow \mathbb{C} \, : x^* \text{ é linear e contínuo}\big\}.$$

O conjunto E^* munido com a norma

$$\|x^*\|_{E^*} = \sup_{x \in \overline{B}_E} |x^*(x)|$$

se torna um espaço vetorial normado. De modo análogo, o bidual topológico de E é o conjunto $E^{**} = (E^*)^*$. Os símbolos B_E^{**}, $\overline{B}_E^{**}$ e S_E^{**} representam, respectivamente, a bola aberta, a bola fechada e a esfera unitária de E^{**} e todos esses conjuntos são unitários e centrados na origem, isto é,

$$\begin{aligned} B_E^{**} =& \{x^{**} \in E^{**} \, : \|x^{**}\|_{E^{**}} < 1\} \, ; \;\; \overline{B}_E^{**} = \{x^{**} \in E^{**} \, : \|x^{**}\|_{E^{**}} \leq 1\} \, ; \\ S_E^{**} =& \{x^{**} \in E^{**} \, : \|x^{**}\|_{E^{**}} = 1\} \, . \end{aligned}$$

Por simplicidade, em nosso trabalho omitiremos alguns sub-índices em certas notações. Ao invés de escrevermos $B_E, \overline{B}_E, S_E$ para denotar a bola aberta, a bola fechada e a esfera de E escreveremos apenas $B, \overline{B}$ e S. O mesmo se aplica para B_E^{**}, $\overline{B}_E^{**}$ e S_E^{**}, isto é, escreveremos apenas B^{**}, $\overline{B}^{**}$ e S^{**}. Isso será estendido para a notação de norma, ou seja, ao invés de escrevermos $\|\cdot\|_E$ para denotar a norma de um espaço normado E, usaremos a notação $\|\cdot\|$. Isso não causará ambiguidade.

Por fim, muitas das vezes consideraremos uma rede (ou sequência) $(z_\alpha)_\alpha \subset B$ e um ponto $z \in \overline{B}^{**}$, e escreveremos que $z_\alpha \xrightarrow{w^*} z$ na topologia fraca estrela, mas estaremos pensando na seguinte convergência $J_E(z_\alpha) \xrightarrow{w^*} z$, onde J_E é o mergulho canônico

$$\begin{aligned} J_E :& E \longrightarrow E^{**} \\ & x \longmapsto J_E(x) : E^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \qquad\qquad\qquad \varphi \longmapsto J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \end{aligned}$$

e E um espaço normado.

Espaços de sequências. Os espaços de sequências ℓ_∞ e c_0 são definidos respectivamente, por

$$\ell_\infty := \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \ : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$
$$c_0 := \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \ : \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \right\},$$

ambos os espaços se tornam Banach com a norma $\|(x_n)_{n=1}^\infty\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Os espaços de sequências ℓ_p's, com $1 \leq p < \infty$, são definidos por

$$\ell_p := \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \ : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Esses espaços com a norma

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

tornam-se espaços de Banach.

Por fim, para cada $1 \leq p < \infty$, consideramos os espaços de Marcinkiewicz $\ell_{p,\infty}$'s, definidos por

$$\ell_{p,\infty} := \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \ : \sup_{n \in \mathbb{N}} n^{\frac{1}{p}} x_n^* < \infty \right\},$$

onde

$$x_n^* := \inf \left\{ \sup_{j \in \mathbb{N} \setminus J} |x_j| \ : J \subset \mathbb{N}, \#J < n \right\}.$$

A sequência $x^* = (x_n^*)_{n=1}^\infty$ é dita ser um *reordenamento decrescente* da sequência $x = (x_n)_{n=1}^\infty$.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Na primeira seção deste capítulo apresentaremos conceitos básicos de aplicações multilineares e polinômios m-homogêneos. Na segunda seção abordaremos algumas definições e alguns resultados de funções holomorfas, séries de potências e funções analíticas. Nas seções três, quatro e cinco trataremos um tópico central de nosso trabalho: as séries de Dirichlet e suas abscissas de convergência. Na sexta seção, discutiremos um pouco sobre um "casamento perfeito" entre Álgebra e Análise; a saber, as Álgebras de Banach. Na sétima seção, definiremos lineabilidade, espaçabilidade e algebrabilidade. Na oitava seção, focaremos no estudo de conjunto de cluster e sequências interpolantes. A seção nove é dedicada para estabelecer alguns resultados gerais que serão usados no decorrer deste trabalho.

1.1 Aplicações m-lineares e polinômios m-homogêneos em espaços de Banach

Nesta seção, E denota um espaço vetorial normado (salvo contrário) sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ será $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Do mais, indicamos [67] como principal referência sobre os tópicos aqui abordados.

Definição 1.1.1. Sejam E um espaço vetorial e $m \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $A : E^m \longrightarrow \mathbb{K}$ é *m-linear* se é linear em cada coordenada, isto é, se para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$ e vetores $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m \in E$ fixados, a aplicação

$$x \in E \longmapsto A(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}$$

é um funcional linear.

Proposição 1.1.2. [67, Proposition 1.2] *Seja $A : E^m \longrightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação m-linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *A é contínua.*

(b) *A é contínua na origem.*

(c) $\|A\| = \sup\{|A(x_1, \ldots, x_m)| : x_j \in E \text{ e } \max_{1\leq j\leq m} \|x_j\| \leq 1\} < \infty$.

O espaço vetorial de todas as aplicações m-lineares e contínuas $A : E^m \longrightarrow \mathbb{K}$ será denotado por $\mathcal{L}(^m E)$. Segue da Proposição 1.1.2 que a aplicação $A \in \mathcal{L}(^m E) \longmapsto \|A\| \in \mathbb{R}$ está bem definida. Além disso, pode-se demonstrar que $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(^m E)$.

Proposição 1.1.3. [67, Proposition 1.3] *O espaço normado* $(\mathcal{L}(^m E), \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach.*

1.2 Polinômio m-homogêneos em espaços de Banach

Definição 1.2.1. Sejam E um espaço vetorial e $m \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $P : E \longrightarrow \mathbb{K}$ é um *polinômio m-homogêneo* se existe uma aplicação m-linear $A : E^m \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $P(x) = A(x, \ldots, x)$ para todo $x \in E$.

Proposição 1.2.2. [67, Collorary 2.3] *Seja $P : E \longrightarrow \mathbb{K}$ um polinômio m-homogêneo. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *O polinômio $P : E \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.*

(b) $\|P\| = \sup\{|P(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.

O espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos contínuos $P : E \longrightarrow \mathbb{K}$ será denotado por $\mathscr{P}_m(E)$. Convencionaremos $\mathscr{P}_m(E) = \mathbb{C}$ quando $m = 0$. Segue da Proposição 1.2.2 que a aplicação $P \in \mathscr{P}_m(E) \longmapsto \|P\| \in \mathbb{R}$ está bem definida e, além disso, pode-se mostrar que ela é uma norma em $\mathscr{P}_m(E)$. Isso permite enunciar o seguinte resultado.

Proposição 1.2.3. [67, Corollary 2.3] *O espaço normado* $(\mathscr{P}_m(E), \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach.*

1.3 Funções holomorfas definidas em espaços de Banach

As funções holomorfas definidas em espaços de Banach complexos generalizam a noção de funções holomorfas de uma variável complexa. Em especial trataremos o caso de séries de potências e funções analíticas em B_{c_0}. Nesta seção, E denota um espaço normado complexo, salvo contrário. Nossas principais referências acerca dos temas abordados nesta seção foram [47, 67].

Definição 1.3.1. Seja U um subconjunto aberto de E. Dado $a \in U$, uma aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ é *holomorfa* em a se existem uma bola aberta $B(a, r) \subset U$ e uma sequência de polinômios $(P_m)_{m=0}^{\infty}$ com $P_m \in \mathscr{P}_m(E)$ tal que

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x - a) \text{ para cada } x \in B(a, r),$$

onde a convergência é uniforme em $B(a,r)$. Caso f seja holomorfa em todo ponto de U, simplesmente dizemos que f é *holomorfa* (ou holomorfa em U).

Em alguns casos a definição de funções holomorfas em espaços normados pode ser apresentada da seguinte maneira.

Definição 1.3.2. Seja U um subconjunto aberto de E. Uma aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ é *holomorfa* (ou $\mathbb{C}$-*diferenciável*) em um ponto $a \in U$ se existir um funcional linear $a^* \in E^*$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - a^*(h)}{\|x - a\|} = 0\,. \tag{1.1}$$

Caso f seja holomorfa em cada $a \in U$, dizemos que f é *holomorfa* em U e denotamos por $df(a)$ o único funcional linear a^* que satisfaz (1.1), aquele é chamado de *diferencial de f em a*.

É de se esperar que o leitor questione se as duas últimas definições são equivalentes. A resposta para está pergunta é sim! Para uma referência veja [69, Theorem 1.2], e para uma demonstração mais geral veja [67, Theorem 14.7]. O espaço de todas as funções holomorfas em U será denotado por $\mathcal{H}(U)$. Uma pergunta natural que surge ao começarmos o estudo de funções holomorfas é se holomorfia implica em continuidade. A proposição abaixo responde essa pergunta.

Proposição 1.3.3. [67, Lemma 5.6] *Seja $U \subset E$ aberto. Se $f \in \mathcal{H}(U)$, então f é contínua em U.*

O seguinte resultado é conhecido como o Princípio da Aplicação Aberta, ele estabelece uma propriedade adicional que ganhamos quando trabalhamos com funções holomorfas.

Proposição 1.3.4. [67, Proposition 5.8] *Seja U um subconjunto aberto e conexo de E. Então para cada $f \in \mathcal{H}(U)$ o conjunto $f(V)$ é aberto em $\mathbb{C}$ sempre que V é um subconjunto aberto de U.*

A partir de agora, trabalharemos com funções holomorfas e limitadas na bola unitária aberta centrada na origem de um espaço normado. Seja B a bola aberta e unitária centrada na origem de E. Denotaremos o conjunto de todas as funções holomorfas e limitadas em B por $\mathcal{H}_\infty(B)$, isto é,

$$\mathcal{H}_\infty(B) = \{f : B \longrightarrow \mathbb{C}\ : f\ \text{ é holomorfa e limitada}\}.$$

É claro que a aplicação $f \in \mathcal{H}_\infty(B) \longmapsto \|f\| \in \mathbb{R}$, onde

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in B\}, \tag{1.2}$$

está bem definida. Além disso, pode-se mostrar que $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{H}_\infty(B)$. Isso permite enunciar o seguinte resultado.

Proposição 1.3.5. [47, Theorem 2.14] *O espaço normado* $(\mathcal{H}_\infty(B), \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach.*

Observação 1.3.6. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideraremos $\mathscr{P}_m(E)$ como um subespaço fechado de $\mathcal{H}_\infty(B)$ pela isometria linear $P \in \mathscr{P}_m(E) \longmapsto P\mid_B \in \mathcal{H}_\infty(B)$.

A partir de agora, focaremos nas funções holomorfas e limitadas definidas na bola unitária aberta do espaço de Banach c_0. Para isso, precisamos de algumas definições e resultados preliminares.

Definição 1.3.7. Seja $(c_i)_{i\in I}$ uma família de escalares complexos, onde I é um conjunto de índices enumerável. Dizemos que $(c_i)_{i\in I}$ é *somável* se a rede ordenada $\left(\sum_{i\in F} c_i\right)_{F\subset I \text{ finito}}$ converge, isto é, se existe $s \in \mathbb{C}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto finito $F_0 \subset I$ com $\left|\sum_{i\in F} c_i - s\right| < \varepsilon$ para todo conjunto finito $F \subset I$ com $F_0 \subset F$. Neste caso, escrevemos $s = \sum_{i\in I} c_i$ e dizemos que s é a soma de $(c_i)_{i\in I}$.

A proposição a seguir estabelece algumas equivalências sobre quando uma família $(c_i)_{i\in I}$ é somável.

Proposição 1.3.8. *Seja* $(c_i)_{i\in I}$ *uma família de escalares complexos, onde* I *é um conjunto de índices enumerável. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *A família* $(c_i)_{i\in I}$ *é somável;*

(b) *Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe um conjunto finito* $F_0 \subset I$ *tal que* $\left|\sum_{i\in F} c_i\right| < \varepsilon$ *para todo* $F \subset I$ *com* $F \cap F_0 = \emptyset$*;*

(c) *Tem-se* $\sup\limits_{\substack{F\subset I\\ \text{finito}}} \sum\limits_{i\in F} |c_i| < \infty$. *Além disso,*

$$\sum_{i\in I} |c_i| = \sup_{\substack{F\subset I\\ \text{finito}}} \sum_{i\in F} |c_i| < \infty;$$

(d) *A família* $(c_i)_{i\in I}$ *é incondicionalmente somável, isto é, para toda bijeção* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$ *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)}$ *converge e, neste caso, tem-se* $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)} = \sum_{i\in I} c_i$.

Precisaremos da seguinte definição.

Definição 1.3.9. Uma *série de potências em infinitas variáveis* é uma série da forma $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha$, com $z^\alpha := \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} z_k^{\alpha_k}$, onde $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ é uma família de escalares complexos (pode ser ou não somável) e $z = (z_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de números complexos.

Voltando a tratar sobres às funções holomorfas e limitadas na bola unitária aberta de c_0, consideramos os dois resultados a seguir.

Teorema 1.3.10. [47, Theorem 2.19] *Para toda* $f \in \mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$ *existe uma única família de coeficientes* $(c_\alpha(f))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ *tal que* $f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha(f) z^\alpha$ *para todo* $z \in B_{c_{00}}$.

Teorema 1.3.11. [47, Theorem 2.32] *A função* $P : c_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ *é um polinômio* m*-homogêneo se, e somente se,* P *é uma função holomorfa cuja família de coeficientes monomiais* $(c_\alpha(P))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ *satisfaz:* $c_\alpha(P) \neq 0$ *somente se* $|\alpha| = m$ *para cada* $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$.

O resultado a seguir, de certa forma, apresenta alguns critérios para que tenhamos uma "recíproca" do Teorema 1.3.10, ele é conhecido como Critério de Hilbert.

Teorema 1.3.12. [47, Theorem 2.21] *Seja* $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ *uma família de escalares tal que*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} |c_\alpha z^\alpha| < \infty, \ \ \textit{para todos } N \in \mathbb{N}, \ \ z \in \mathbb{D}^N \tag{1.3}$$

e

$$\sup_N \sup_{z\in\mathbb{D}^N} \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha z^\alpha \right| < \infty. \tag{1.4}$$

Então existe uma única $f \in \mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$ *tal que* $c_\alpha(f) = c_\alpha$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$*. Além disso,*

$$\|f\| = \sup_N \sup_{z\in\mathbb{D}^N} \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha z^\alpha \right|.$$

O Critério de Hilbert permite enxergar o conjunto $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$ como um subconjunto das séries de potências. Para ver isso, precisamos definir o seguinte conjunto

$$\mathfrak{P}_\infty = \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \ : (c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \ \ \text{satisfaz } (1.3) \text{ e } (1.4) \right\}. \tag{1.5}$$

O conjunto $\mathfrak{P}_\infty$ se torna um espaço vetorial quando munido com a soma e a multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} d_\alpha z^\alpha &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} (c_\alpha + d_\alpha) z^\alpha, \\ \lambda \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} (\lambda\, c_\alpha) z^\alpha, \ \ \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Além disso, a aplicação $\|\cdot\| : \mathfrak{P}_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\left\| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \right\| = \sup_N \sup_{z\in\mathbb{D}^N} \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha z^\alpha \right|,$$

está bem definida e também é uma norma em $\mathfrak{P}_\infty$. Logo, isso nos permite enunciar o seguinte teorema, cuja demonstração é uma consequência direta dos Teoremas 1.3.10 e 1.3.12.

Teorema 1.3.13. *Existe uma isometria entre os espaços normados $\mathfrak{P}_\infty$ e $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$. Em particular, $\mathfrak{P}_\infty$ é um espaço de Banach.*

Trataremos a seguir um caso mais especial de funções holomorfas, a saber, as funções analíticas. No entanto, para deixar este conceito claro ao leitor, precisamos voltar a atenção para o espaço $\mathbb{C}^N$.

Definição 1.3.14. Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N) \in \mathbb{R}^N$ com $r_1 > 0, \ldots, r_N > 0$. Dizemos que uma função $f : \mathbf{r}\mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ é *analítica* em 0 se existir uma família de coeficientes $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ satisfazendo

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha z^\alpha$$

para cada $z \in \mathbf{r}\mathbb{D}^N$.

O teorema a seguir, estabelece uma fato crucial envolvendo as funções analíticas e holomorfas em $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$.

Teorema 1.3.15. [47, Theorem 2.8] *Sejam $N \in \mathbb{N}$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N) \in \mathbb{R}^N$ com $r_1 > 0, \ldots, r_N > 0$ e uma função $f : \mathbf{r}\mathbb{D}^N \longrightarrow \mathbb{C}$. Então f é holomorfa se, e somente se, existe uma única família de coeficientes $(c_\alpha(f))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ tal que $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha(f) z^\alpha$ para todo $z \in \mathbf{r}\mathbb{D}^N$.*

Em resumo, o Teorema 1.3.15 afirma que em espaços de dimensão finita, uma função é holomorfa se, e somente se, é analítica. Agora, aproveitando o "gancho" da última definição, definiremos funções analíticas em c_0.

Definição 1.3.16. Dizemos que uma função $f : B_{c_0} \longrightarrow \mathbb{C}$ é *analítica* em 0 sempre que existe uma família de coeficientes $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ satisfazendo

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha,$$

com a convergência absoluta para cada $z \in B_{c_0}$.

Em polidiscos $\mathbf{r}\mathbb{D}^N$ de $\mathbb{C}^N$, os conceitos de funções holomorfas e analíticas são equivalentes, como visto no Teorema 1.3.15. Isso motiva o seguinte questionamento: a função $f : B_{c_0} \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica se, e somente se, f é holomorfa? A condição necessária é respondida na afirmativa quando incluímos a hipótese de f ser limitada, como pode ser visto no resultado a seguir.

Proposição 1.3.17. [47, Corollary 2.23] *Se $f : B_{c_0} \longrightarrow \mathbb{C}$ é limitada em B_{c_0} e analítica em 0, então $f \in \mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$.*

Por outro lado, uma função $f \in \mathcal{H}(B_{c_0})$ pode não ser analítica. Um exemplo é apresentado em [47, Proposition 4.4]. Também é demonstrado em [45] que o conjunto de todas as funções $f \in \mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$ que não são analíticas em 0 contém (a menos da função nula) um espaço vetorial de dimensão infinita.

1.4 Séries de Dirichlet

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados sobre séries de Dirichlet que conectam Análise, Álgebra e Teoria dos números. Nossas principais referências sobre os tópicos desta seção foram [9, 47], mas também indicamos [8, 14, 21–24, 34–38, 48, 74].

Definição 1.4.1. Uma *série de Dirichlet* formal é uma série da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, onde $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ é uma variável complexa e $a_n \in \mathbb{C}$ são escalares. Para um número $N \in \mathbb{N}$, diremos que a série de Dirichlet da forma $\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$ é um *polinômio de Dirichlet de comprimento* N.

Exemplo 1.4.2. São exemplos de séries de Dirichlet:

(a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, a qual converge se Re $s > 1$.

(b) A série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mathfrak{p}_n^{-s}$, que converge se Re $s > 0$.

Uma ideia da demonstração do item (a) pode ser descrita da seguinte maneira. Seja $s \in \mathbb{C}$ com Re $s > 1$. Logo, existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que Re $s > \sigma > 1$. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$ é convergente, segue do Teorema 1.4.3 que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ também é convergente, pois Re $s > \sigma$.

Uma demonstração similar àquela apresentada no início da demonstração do Lema 2.6.2 pode ser dada para o item (b).

O conjunto de todas as séries de Dirichlet formais será denotado por $\mathfrak{D}$. Mais precisamente,

$$\mathfrak{D} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \ : s \in \mathbb{C} \ \text{ é uma variável complexa e } a_n \in \mathbb{C} \ \text{ são escalares} \right\}.$$

Este conjunto com a soma e a multiplicação por escalar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) n^{-s}$$

$$\lambda \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) n^{-s}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}$$

torna-se um espaço vetorial.

Teorema 1.4.3. [[74, Lemma 4.1.1] ou [47, Lemma 1.2]] *Suponha que uma série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge em um ponto $s_0 \in \mathbb{C}$. Então esta série converge para cada $s \in \mathbb{C}$ tal que Re $s >$ Re s_0. Além disso, converge uniformemente em cada cone*

$$C_\theta = \left\{ s \in \mathbb{C} \, : \, \frac{|s - s_0|}{Re\,(s - s_0)} \leq \frac{1}{\cos\theta} \right\},$$

onde $0 \leq \theta < \cos(\pi/2)$.

As séries de Dirichlet e as funções holomorfas estão relacionadas. Exemplo disto é o resultado a seguir, que é central na teoria de séries de Dirichlet.

Teorema 1.4.4. [47, Theorem 1.1] *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ uma série de Dirichlet (que não diverge em todo ponto). Então existe um número real σ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge pontualmente no semiplano complexo $\mathbb{C}_\sigma$ e diverge para cada $s \in \mathbb{C}$ com Re $s < \sigma$. Além disso, a função $f : \mathbb{C}_\sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ é holomorfa.*

Teorema 1.4.5. [8, Theorem 11.3] *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ séries de Dirichlet que convergem absolutamente no semiplano complexo $\mathbb{C}_\sigma$, onde $\sigma \in \mathbb{R}$ é fixado. Se existe uma sequência $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s_k} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{k\to\infty}$ Re $s_k = +\infty$, então $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

A partir de agora, abordaremos sobre funções holomorfas limitadas no semiplano complexo $\mathbb{C}_0$ e que podem ser representadas pontualmente por uma séries de Dirichlet. O conjunto de todas essas funções holomorfas será denotado por $\mathscr{H}_\infty$. A saber,

$$\mathscr{H}_\infty = \Big\{ D \, : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C} \, : \, D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \text{ para cada } s \in \mathbb{C}_0, \\ a_n \in \mathbb{C} \text{ são escalares e } \sup_{s \in \mathbb{C}_0} |D(s)| < \infty \Big\}.$$

Dadas $D_1, D_2 \in \mathscr{H}_\infty$ temos $D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ e $D_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ para todo $s \in \mathbb{C}_0$. Assim, o conjunto $\mathscr{H}_\infty$ com as seguintes operações de soma e multiplicação por escalar

$$(D_1 + D_2)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) n^{-s}$$
$$(\lambda\, D_1)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) n^{-s}, \;\; \lambda \in \mathbb{C}$$

torna-se um espaço vetorial. Do mais, a aplicação $D \in \mathscr{H}_\infty \longmapsto \|D\| \in \mathbb{R}$, dada por $\|D\| = \sup\limits_{s \in \mathbb{C}_0} |D(s)|$, está bem definida e é uma norma para $\mathscr{H}_\infty$.

Teorema 1.4.6. [47, Theorem 1.17] *O espaço normado $(\mathscr{H}_\infty, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.*

O conjunto de todas as funções $f : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas e limitadas, será denotado por $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0)$. A inclusão $\mathscr{H}_\infty \subset \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0)$ se deve ao Teorema 1.4.4. Então é plausível que o leitor questione: toda função holomorfa e limitada $f : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ pode ser representada por uma série de Dirichlet? A resposta é NÃO, isto é, $\mathscr{H}_\infty \subsetneq \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_0)$. Dois exemplos para isso são os seguintes: As funções $f, g : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas respectivamente por $f(s) = \frac{s-1}{s+1}$ e $g(s) = e^{-s}$ são ambas holomorfas e limitadas em $\mathbb{C}_0$, porém nenhuma delas pode ser representada por uma série de Dirichlet em cada ponto de $\mathbb{C}_0$. Uma demonstração que justifica esses, e outros exemplos, podem ser encontrados em [47, Final da p. 32] e [74, p. 140].

Agora façamos um esclarecimento. As funções D pertencentes a $\mathscr{H}_\infty$ são funções que em cada ponto $s \in \mathbb{C}_0$ podem ser representadas por uma série de Dirichlet $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$. Por isso, algumas vezes escreveremos que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty$ ao invés de escrever que a função $D \in \mathscr{H}_\infty$. Além disso, para $D \in \mathscr{H}_\infty$ usaremos a notação $D(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ e para $D \in \mathfrak{D}$ usamos a notação $D = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$, onde $s \in \mathbb{C}$ é uma variável aleatória.

Proposição 1.4.7. [47, Proposition 1.19] *Para cada série de Dirichlet* $D(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty$ *tem-se*

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|D\|.$$

Em particular, $|a_n| \leq \|D\|$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Agora, definiremos outros resultados centrais da teoria das séries de Dirichlet. Para isso, precisamos definir a transformada de Bohr. Antes disso, denotemos por $\mathfrak{P}$ o conjunto de todas as séries de potências formais de infinitas variáveis, isto é,

$$\mathfrak{P} = \Big\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \ : z \text{ é uma variável e } (c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \text{ uma família de escalares} \Big\}.$$

O conjunto $\mathfrak{P}$ torna-se um espaço vetorial quando munido com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas em (1.6). Através do Teorema da Decomposição em Números Primos, a transformada de Bohr estabelece uma conexão entre as séries de Dirichlet e as séries de potências de infinitas variáveis.

Definição 1.4.8. A *transformada de Bohr* é a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} : \mathfrak{P} &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha &\xrightarrow{a_n = c_\alpha,\ n := \mathfrak{p}^\alpha} \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^s}. \end{aligned}$$

Com relação à Definição 1.4.8, façamos alguns comentários. Dado um índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N, 0, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, pelo Teorema da Decomposição em Números Primos, existe um único natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $n := \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_N^{\alpha_N} := \mathfrak{p}^\alpha$. Logo, a correspondência bijetiva $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \leftrightarrow n \in \mathbb{N}$ nos permite verificar que a aplicação $\mathfrak{B} : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{D}$ é linear e bijetiva (também é um homomorfismo de álgebra, mas isso será tratado no Teorema 1.7.5, assim como alguns detalhes de como funciona a transformada de Bohr). A inversa da transformada de Bohr é chamada de *Bohr lift* e denotada por $\mathfrak{L}$. Relembramos que devido ao Teorema 1.3.13, o espaço de Banach $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$ é confundido com o espaço de Banach $\mathfrak{P}_\infty$. É provável que o leitor já tenha percebido que $\mathfrak{P}_\infty$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{P}$. Isso abre caminho para apresentar uma consequência fabulosa das ideias de Bohr.

Teorema 1.4.9. [47, Theorem 3.8] *A seguinte igualdade isométrica é válida por meio da transformada de Bohr $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0}) = \mathscr{H}_\infty$. Mais precisamente, existe uma única bijeção linear isométrica de $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$ em $\mathscr{H}_\infty$ tal que $\mathfrak{B}(f)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, com $c_\alpha(f) = a_n$ onde $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ e $n = \mathfrak{p}^\alpha$, para toda $f \in \mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$. Além disso, $f(\mathfrak{p}^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ para cada $s \in \mathbb{C}_0$.*

Prosseguiremos agora com o objetivo de estabelecer mais resultados envolvendo a transformada de Bohr. No entanto, precisamos de algumas definições preliminares. Antes disso, relembramos que $\Omega(n)$ conta a quantidade de números primos que divide n incluindo multiplicidades.

Definição 1.4.10. Dado $m \in \mathbb{N}_0$, diremos que:

(a) Uma série de Dirichlet $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathfrak{D}$ é *m-homogênea* quando $a_n \neq 0$ somente se $\Omega(n) = m$.

(b) Uma série de potência $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \in \mathfrak{P}$ é *m-homogênea* quando $c_\alpha \neq 0$ somente se $|\alpha| = m$.

O subespaço vetorial de $\mathfrak{D}$ formado por todas as séries de Dirichlet m-homogêneas será denotado por $\mathfrak{D}_m$. Similarmente, escreveremos o subespaço vetorial de $\mathfrak{P}$ formado por todas as séries de potências m-homogêneas por $\mathfrak{P}_m$. Além disso, podemos considerar o subespaço $\mathscr{H}_\infty^m$ de $\mathscr{H}_\infty$ formado por todas as séries de Dirichlet limitadas em $\mathbb{C}_0$ que são m-homogêneas, isto é,

$$\mathscr{H}_\infty^m = \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty \ : \ a_n \neq 0 \text{ somente } \Omega(n) = m \Big\}.$$

A Observação 1.3.6 diz que o espaço dos polinômios m-homogêneos $\mathscr{P}_m(c_0)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$, isso juntamente com os Teoremas 1.3.10 e 1.3.11 nos permite considerar

$$\mathscr{P}_m(c_0) = \{ P \in \mathcal{H}_\infty(B_{c_0}) \ : c_\alpha(P) \neq 0 \text{ somente se } |\alpha| = m \}.$$

Ademais, como para $n = \mathfrak{p}^\alpha$ tem-se $|\alpha| = m$ se, e somente se, $\Omega(n) = m$, a transformada de Bohr apresentada ao leitor na Definição 1.4.8 leva $\mathfrak{P}_m$ em $\mathfrak{D}_m$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{|\mathfrak{P}_m} : \mathfrak{P}_m \quad & \longrightarrow \quad \mathfrak{D}_m \\ \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha z^\alpha \quad & \xrightarrow{a_n = c_\alpha,\ n := \mathfrak{p}^\alpha} \quad \sum_{\Omega(n) = m} \frac{a_n}{n^s} \end{aligned}$$

é uma bijeção linear. Logo, podemos enunciar o seguinte resultado, que é válido por meio da transformada de Bohr.

Teorema 1.4.11. [47, Theorem 3.12] *A seguinte igualdade isométrica é válida por meio da transformada de Bohr $\mathscr{P}_m(c_0) = \mathscr{H}_\infty^m$. Mais precisamente, existe uma única bijeção linear isométrica de $\mathscr{P}_m(c_0)$ em $\mathscr{H}_\infty^m$ tal que para todo $P \in \mathscr{P}_m(c_0)$ tem-se $\mathfrak{B}(P)(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$, onde $c_\alpha(P) = a_n$ se $n = \mathfrak{p}^\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, $|\alpha| = m$ e $a_n = 0$ caso contrário. Além disso, $P(\mathfrak{p}^{-s}) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ para cada $s \in \mathbb{C}_0$.*

Proposição 1.4.12. [47, Corollary 3.13] *Sejam $m \in \mathbb{N}_0$, $D(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty$ e $D_m(s) = \sum_{\Omega(n)=m} a_n n^{-s}$. Então:*

(a) *Para todo m tem-se $D_m \in \mathscr{H}_\infty^m$ e $\|D_m\| \leq \|D\|$.*

(b) *Para todo $\sigma > 0$ a convergência $D(s) = \sum_{m=0}^\infty D_m(s)$ é uniforme em $\mathbb{C}_\sigma$.*

O subespaço vetorial de $\mathscr{H}_\infty$ formado por todas as séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ tais que n depende apenas dos N primeiros números primos, será denotado por $\mathscr{H}^{(N)}$. Mais precisamente,

$$\mathscr{H}^{(N)} = \left\{ \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty \ : a_n \neq 0 \ \text{ somente se } \ n \ \text{ depende de } \ \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_N \right\}.$$

Como consequência do Teorema 1.3.15, podemos identificar cada espaço $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}^N)$ com o espaço $\mathscr{H}_\infty^{(N)}$.

Teorema 1.4.13. [47, Theorem 3.7] *A seguinte igualdade isométrica $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}^N) = \mathscr{H}_\infty^{(N)}$ é válida por meio da transformada de Bohr. Mais precisamente, existe uma única bijeção linear isométrica de $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}^N)$ em $\mathscr{H}_\infty^{(N)}$ tal que $\mathfrak{B}(f)(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$, onde $a_n = c_\alpha(f)$ se $n = \mathfrak{p}^\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(N)}$ e $a_n = 0$ caso contrário. Além disso,*

$$f(\mathfrak{p}_1^{-s}, \ldots, \mathfrak{p}_N^{-s}) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}, \tag{1.7}$$

para cada $s \in \mathbb{C}_0$.

Encerraremos esta seção abordando as séries de Dirichlet que são uniformemente contínuas em $\mathbb{C}_0$. O símbolo $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ representa o fecho em $\mathscr{H}_\infty$ de todos os polinômios de Dirichlet. Mais exatamente,

$$\mathscr{A}(\mathbb{C}_0) = \overline{\{\sum_{n=1}^N a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty \ : N \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}.$$

Claro que $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ é um espaço de Banach. Ademais, em $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ as séries de Dirichlet podem ser estendidas continuamente para uma função em $\overline{\mathbb{C}}_0$.

Teorema 1.4.14. [9, Theorem 2.3] *Para $f : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *f é limite uniforme em $\mathbb{C}_0$ de uma sequência de polinômios de Dirichlet.*

(b) *f é pontualmente representada por uma série de Dirichlet em $\mathbb{C}_0$ e f é uniformemente contínua.*

Apresentaremos a seguir mais uma consequência da transformada de Bohr. Denotemos por $\mathcal{A}_u(B_{c_0})$ o fecho em $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$ do espaço gerado por todos os polinômios m-homogêneos, ou seja,

$$\mathcal{A}_u(B_{c_0}) = \overline{\{\textstyle\sum_{m=0}^{N} P_m \in \mathcal{H}_\infty(B_{c_0}) \,:\, N \in \mathbb{N}_0 \text{ e } P_m \in \mathscr{P}_m(c_0)\}}^{\|\cdot\|}.$$

Tem-se que $\mathcal{A}_u(B_{c_0})$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$, e portanto é um espaço de Banach. Além disso, tem-se o seguinte.

Teorema 1.4.15. [9, Theorem 2.4] *O espaço de Banach $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{A}_u(B_{c_0})$ por meio da transformada de Bohr.*

Motivados pelo Problema da Abscissa de Convergência Absoluta de Bohr (veja [47, p. 230]), outro problema interessante é descrever o conjunto

$$\operatorname{mon}\mathfrak{J} := \left\{ w \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,:\, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha w^\alpha| < \infty \text{ para toda } \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \in \mathfrak{J} \right\}, \tag{1.8}$$

onde $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{P}_\infty$. Antes de apresentarmos um resultado envolvendo esses tipos de conjuntos, recordamos que os espaços de Marcinkiewicz $\ell_{\frac{2m}{m-1},\infty}$'s são definidos por

$$\ell_{\frac{2m}{m-1},\infty} := \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \,:\, \sup_{n\in\mathbb{N}} n^{\frac{m-1}{2m}} x_n^* < \infty \right\},$$

onde

$$x_n^* := \inf\left\{ \sup_{j\in\mathbb{N}\setminus J} |x_j| \,:\, J \subset \mathbb{N}, \#J < n \right\}.$$

Além disso, devido ao Teorema 1.3.11, podemos considerar $\mathscr{P}_m(c_0)$ como um subconjunto de $\mathfrak{P}_\infty$. Neste sentido, enunciamos o seguinte teorema.

Teorema 1.4.16. [47, Theorem 10.15] *Para cada $m \geq 2$ tem-se mon $\mathscr{P}_m(c_0) = \ell_{\frac{2m}{m-1},\infty}$.*

O Teorema 1.4.16 nos ajudará no principal lema do Capítulo 2, a saber, o Lema 2.2.6.

1.5 As abscissas de convergência de uma série de Dirichlet

Esta seção é dedicada as abscissas de convergência de uma série de Dirichlet. Em grande parte, abordaremos a abscissa de convergência absoluta. Afinal, dedicaremos praticamente todo o segundo capítulo deste trabalho a ela. Nossas principais referência são [47, 74].

Para cada série de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathfrak{D}$, com $s = \sigma + it$ e $N \in \mathbb{N}$, escreveremos

$$A_N(D) = \sum_{n=1}^{N} |a_n| \, ; \;\; U_N(D) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{it} \right| \, ;$$
$$A_N^*(D) = \sum_{n=1}^{N} a_n \, .$$

Além disso, associaremos a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, com $s = \sigma + it$, as seguintes abscissas

$$\sigma_c = \inf \left\{ \sigma > 0 \, : \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \text{ converge} \right\},$$
$$\sigma_u = \inf \left\{ \sigma > 0 \, : \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \text{ converge uniformemente em } \mathbb{C}_\sigma \right\},$$
$$\sigma_a = \inf \left\{ \sigma > 0 \, : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} \text{ converge} \right\}.$$

A partir de agora escreveremos $\sigma_c(D)$ ao invés de σ_c, $\sigma_u(D)$ ao invés de σ_u e $\sigma_a(D)$ ao invés de σ_a para denotar as abscissas de uma série de Dirichlet $D \in \mathfrak{D}$.

Definição 1.5.1. Para cada $D \in \mathfrak{D}$ os números $\sigma_c(D), \sigma_u(D)$ e $\sigma_a(D)$ são chamados respectivamente de *abscissa de convergência pontual*, *abscissa de convergência uniforme* e *abscissa de convergência absoluta* da série de Dirichlet D.

Exemplo 1.5.2. Para $D_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, Re $s > 1$, e $D_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathfrak{p}_n^{-s}$, Re $s \geq 0$, temos

$$\sigma_c(D_1) = \sigma_u(D_1) = \sigma_a(D_1) = 1$$

e

$$\sigma_c(D_2) = 0, \;\; \sigma_u(D_2) = \sigma_a(D_2) = 1.$$

Com efeito, segue do Exemplo 1.4.2 que $\sigma_c(D_1) \geq 1$. Se acontecesse $\sigma_c(D_1) > 1$, existiria $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma_c(D_1) > \sigma > 1$. Daí, como a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$ é convergente segue do Lema 1.4.3, que para $s \in \mathbb{C}$, com $\sigma_c(D_1) >$ Re $s > \sigma$, a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ converge e isso contraria a definição de $\sigma_c(D)$. Logo, $\sigma_c(D_1) = 1$. Analogamente, pode-se mostrar que $\sigma_a(D_1) = 1$. Ademais, pela definição das abscissas de convergências, temos que $\sigma_c(D_1) \leq \sigma_u(D_1) \leq \sigma_a(D_1)$, o que implica $\sigma_c(D_1) = \sigma_u(D_1) = \sigma_a(D_1) = 1$. Para uma demonstração das igualdades com relação a série de Dirichlet D_2 veja [47, Proof of Proposition 1.5, p. 16].

Vejamos a seguir alguns resultados que envolvem as abscissas de convergência.

Proposição 1.5.3. [47, Proposition 1.6] *Para cada $D \in \mathfrak{D}$ as abscissas de convergência*

$\sigma_c(D)$, $\sigma_u(D)$ e $\sigma_a(D)$ satisfazem

$$\sigma_c(D) \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\log |A_N^*|}{\log N}, \quad \sigma_u(D) \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\log U_N}{\log N}$$
$$\sigma_a(D) \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\log A_N}{\log N}.$$

Em cada caso, se a abscissa de convergência é não negativa, então tem-se a igualdade.

O próximo teorema dentre outras propriedades, estabelece uma relação importante para a abscissa de convergência uniforme de uma série de Dirichlet, ele é conhecido como o Teorema Fundamental de Bohr.

Teorema 1.5.4. [47, Theorem 1.13] *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ uma série de Dirichlet (que não diverge em todo ponto). Suponha que a função $g : \mathbb{C}_{\sigma_c(D)} \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, seja estendida para uma função holomorfa e limitada f em $\mathbb{C}_0$. Então a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge uniformemente em $\mathbb{C}_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ e portanto sua abscissa de convergência uniforme é menor ou igual a zero. Além disso, existe uma constante universal $C > 0$ tal que para toda série de Dirichlet e todo $x \geq 2$ temos*

$$\sup_{s\in\mathbb{C}_0} \left| \sum_{n\leq x} a_n n^{-s} \right| \leq C \ln(x) \sup_{s\in\mathbb{C}_0} |f(s)|.$$

Seja $z_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{C}$ arbitrário. Para uma série de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, consideremos a série de Dirichlet transladada $D_{z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z_0}} \frac{1}{n^s}$. Logo, as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{aligned}
&\sigma_c(D_{z_0}) = \sigma_c(D) - \sigma_0\,;\ \sigma_u(D_{z_0}) = \sigma_u(D) - \sigma_0\,;\ \sigma_a(D_{z_0}) = \sigma_a(D) - \sigma_0\,;\\
&\sigma_u(D_{z_0}) - \sigma_c(D_{z_0}) = \sigma_u(D) - \sigma_c(D)\,;\ \sigma_a(D_{z_0}) - \sigma_c(D_{z_0}) = \sigma_a(D) - \sigma_c(D)\,;\\
&\sigma_a(D_{z_0}) - \sigma_u(D_{z_0}) = \sigma_a(D) - \sigma_u(D). \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Isso significa que ao transladarmos uma série de Dirichlet, as diferenças entre as suas abscissas de convergência não mudam. Uma justificativa para (1.9) é encontrada em [47, p. 17].

Proposição 1.5.5. [47, Propositions 1.3 e 1.5] *A distância máxima entre as abscissas de convergência absoluta e pontual, e a distância máxima entre as abscissas de convergência uniforme e pontual, não excede 1. Além disso,*

$$\sup_{D\in\mathfrak{D}} [\sigma_a(D) - \sigma_c(D)] = \sup_{D\in\mathfrak{D}} [\sigma_u(D) - \sigma_c(D)] = 1$$

e o supremo é atingido.

Quando uma série de Dirichlet $D \in \mathfrak{D}$ não diverge em todos os pontos $s \in \mathbb{C}$, obtemos pelo Teorema 1.4.4, Proposição 1.5.5 e da definição das abscissas de convergência de uma série de Dirichlet que $\sigma_c(D) \leq \sigma_u(D) \leq \sigma_a(D)$.

Façamos um esclarecimento. Uma série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ é determinada de maneira única pela sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Logo, para $D \in \mathscr{H}_\infty$ os símbolos $\sigma_c(D), \sigma_u(D)$ e $\sigma_a(D)$ denotam as abscissas de convergência da única (isso pode ser obtido usando o Teorema 1.4.5) série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ tal que $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ para todo $s \in \mathbb{C}_0$. Posto isso, iniciaremos a discussão com relação ao problema da abscissa de convergência absoluta de Bohr.

O PROBLEMA DA ABSCISSA DE CONVERGÊNCIA ABSOLUTA DE BOHR CONSISTIA EM DETERMINAR O NÚMERO:

$$S := \sup_{D \in \mathfrak{D}} \left[\sigma_a(D) - \sigma_u(D)\right]. \tag{1.10}$$

Este problema foi resolvido por Bohnenblust–Hille em 1931 no trabalgo [38]. Uma versão com notações mais modernas do resultado apresentado por ele é a seguinte:

Teorema 1.5.6 (Bohnenblust–Hille)**.** [47, Theorem 4.1] *Tem-se $S = 1/2$. Além disso, existe $D \in \mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ tal que $\sigma_u(D) = 0$ e $\sigma_a(D) = 1/2$, isto é, o supremo é de fato o máximo. Ademais, para cada $0 \leq \sigma \leq 1/2$, existe uma série de Dirichlet $D \in \mathfrak{D}$ tal que $\sigma_a(D) - \sigma_u(D) = \sigma$.*

Proposição 1.5.7. [47, Proposition 1.24]

$$S = \sup_{D \in \mathscr{H}_\infty} \sigma_a(D).$$

Também para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos os números

$$S^m := \sup_{D \in \mathfrak{D}_m} \sigma_a(D) - \sigma_u(D).$$

De modo similar à demonstração em [47, Proposition 1.24], obtemos

$$S^m = \sup_{D \in \mathscr{H}_\infty^m} \sigma_a(D).$$

Finalizamos esta seção com um teorema que descreve o valor exato de S^m para $m \geq 2$.

Teorema 1.5.8. [47, Theorem 6.3] *Para cada $m \geq 2$ tem-se $S^m = (m-1)/2m$. E o supremo é de fato o máximo, ou seja, existe $D \in \mathscr{H}_\infty^m$ tal que $\sigma_u(D) = 0$ e $\sigma_a(D) = (m-1)/2m$. Além disso, para cada $0 \leq \sigma \leq (m-1)/2m$, existe uma série de Dirichlet $D \in \mathfrak{D}_m$ tal que $\sigma_a(D) - \sigma_u(D) = \sigma$.*

1.6 O espaço de Hilbert das séries de Dirichlet

Nesta seção trataremos de uma nova abscissa de convergência e definiremos um espaço de Hilbert de séries de Dirichlet. Nossas principais referências foram [47, 74].

Definamos o conjunto de todas as séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathfrak{D}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ por $\mathscr{H}_2$. Mais precisamente,

$$\mathscr{H}_2 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} : \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \Big\|_2 := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \Big)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Além disso, $\mathscr{H}_2$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} \Big\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Note que podemos enxergar $\mathscr{H}_\infty$ como subespaço vetorial de $\mathfrak{D}$ via a aplicação linear $D \in \mathscr{H}_\infty \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathfrak{D}$, onde $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ para todo $s \in \mathbb{C}_0$. Logo, segue da Proposição 1.4.7 que podemos enxergar a seguinte inclusão $\mathscr{H}_\infty \subset \mathscr{H}_2$. Esta inclusão é estrita. Por exemplo, dado $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$, segue que a translação $D_z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} n^{-s}$ da série de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ pertence a $\mathscr{H}_2$, mas $D_z \notin \mathscr{H}_\infty$ (podemos tomar s tal que $\operatorname{Re}(z+s) < 1$).

Em [47, Remark 1.23] a abscissa de convergência uniforme de uma série de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ é reformulada da seguinte maneira:

$$\sigma_u(D) = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} n^{-s} \in \mathscr{H}_\infty \right\}. \tag{1.11}$$

À luz dessa reformulação, é definido em $\mathscr{H}_2$ uma nova abscissa de convergência de uma série Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$. A saber,

$$\sigma_{\mathscr{H}_2}(D) := \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} n^{-s} \in \mathscr{H}_2 \right\},$$

chamada de $\mathscr{H}_2$-abscissa. O *problema da convergência absoluta de Bohr* para $\mathscr{H}_2$ consiste em determinar o número

$$S_2 = \sup_{D \in \mathfrak{D}} \left[\sigma_a(D) - \sigma_{\mathscr{H}_2}(D) \right].$$

Com argumento de translação similar ao da demonstração de [47, Proposition 1.24] tem-se

$$S_2 = \sup_{D \in \mathscr{H}_2} \sigma_a(D). \tag{1.12}$$

Ademais, mesmo o conjunto $\mathscr{H}_2$ sendo maior do que $\mathscr{H}_\infty$ vale o seguinte resultado:

Teorema 1.6.1. [47, Remark 11.3] *Temos* $S_2 = 1/2$.

1.7 Álgebras de Banach

Nesta seção discutiremos sobre às álgebras de Banach uma "combinação" de Álgebra e Análise Funcional. Para um estudo mais completo sobre esse conteúdo indicamos [67].

Definição 1.7.1. Sejam $\mathcal{A}$ um espaço vetorial complexo e $(x,y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longmapsto x \cdot y \in \mathcal{A}$ uma aplicação. Diremos que o par $(\mathcal{A}, \cdot)$ é uma *álgebra complexa* se as seguintes condições são satisfeitas

$$(\mathbf{a})\ \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\,;\ \ (\mathbf{b})\ \ (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z\,;$$
$$(\mathbf{c})\ \ \lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y)\,;$$

para todos $x, y, z \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se além disso a condição: $(\mathbf{d})\ \ x \cdot y = y \cdot x$ é satisfeita, diremos que $(\mathcal{A}, \cdot)$ é uma *álgebra complexa comutativa.*

Para simplificar a notação escreveremos xy ao invés de $x \cdot y$ e apenas $\mathcal{A}$ para denotar a álgebra $(\mathcal{A}, \cdot)$. O elemento unidade de $\mathcal{A}$ (quando existe) é o elemento $e \in \mathcal{A}$ que satisfaz $xe = ex = x$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Definição 1.7.2. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa e $\|\cdot\| : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma norma satisfazendo:

(a) $\|x\,y\| \leq \|x\|\,\|y\|$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$.

(a) Se $\mathcal{A}$ possui elemento unidade e então $\|e\| = 1$.

Neste caso, dizemos que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ é uma *álgebra normada.* Ademais, caso o espaço $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ for um espaço vetorial normado completo, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra de Banach.*

Exemplo 1.7.3. O espaço vetorial de todas as séries de Dirichlet $\mathfrak{D}$ torna-se uma álgebra com o produto de Dirichlet

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k\ell=n} a_k b_\ell\right) n^{-s},$$

cujo elemento unidade é $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n1} n^{-s}$.

Exemplo 1.7.4. O espaço vetorial de todas as séries de potências $\mathfrak{P}$ torna-se uma álgebra com o produto

$$\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha\right) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} d_\alpha z^\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \left(\sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_\beta d_\gamma\right) z^\alpha.$$

Uma série de potência $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha$ é determinada pela família de coeficientes $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N}_0)}}$, e da mesma forma uma série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ é determinada pela sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Em ambos os casos "ignoramos" as variáveis z e s respectivamente. Posto isso, se conhecemos uma série de potências, então podemos encontrar uma séries de Dirichlet associada a esta série de potência, e isso pode ser feito por meio da transformada de Bohr. Não encontramos um referência com a demonstração de que a transformada de Bohr $\mathfrak{B} : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{D}$ é um homomorfismo de álgebra, por isso apresentaremos uma.

Teorema 1.7.5. *A transformada de Bohr $\mathfrak{B} : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{D}$ é um homomorfismo de álgebra.*

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e séries de potências

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} d_\alpha z^\alpha \in \mathfrak{P}.$$

Dados $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N, 0 \ldots), \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N, 0 \ldots)$. Agora, definamos $\beta + \gamma := (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_N + \gamma_N, 0 \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$. Logo, pela transformada de Bohr temos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha\right) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right), \ a_n = c_\alpha, \ n := \mathfrak{p}^\alpha, \\ \mathfrak{B}\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} d_\alpha z^\alpha\right) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}\right), \ b_n = d_\alpha, \ n := \mathfrak{p}^\alpha. \end{aligned}$$

Com isso, segue as seguintes propriedades de $\mathfrak{B}$.

(a) MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}\left(\lambda \cdot \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha\right) = \mathfrak{B}\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} (\lambda c_\alpha) z^\alpha\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) n^{-s} \\ &= \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \lambda \cdot \mathfrak{B}\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha\right). \end{aligned}$$

(b) SOMA:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{B}\left[\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha\right) + \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} d_\alpha z^\alpha\right)\right] = \mathfrak{B}\left[\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} (c_\alpha + d_\alpha) z^\alpha\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) n^{-s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}\right) \\ &= \mathfrak{B}\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha\right) + \mathfrak{B}\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} d_\alpha z^\alpha\right). \end{aligned}$$

(c) MULTIPLICATIVIDADE: Para concluir que $\mathfrak{B}$ é multiplicativa, seja $\alpha := \beta + \gamma$. Assim, $n = \mathfrak{p}^\alpha = \mathfrak{p}^\beta \mathfrak{p}^\gamma = k \cdot \ell$, logo escrevendo $k := \mathfrak{p}^\beta$ e $\ell := \mathfrak{p}^\gamma$, obtemos pela transformada de Bohr que $a_k = c_\beta$ e $b_\ell = d_\gamma$. Portanto

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}\left[\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha\right)\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} d_\alpha z^\alpha\right)\right] &= \mathfrak{B}\left[\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}\left(\sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_\beta d_\gamma\right) z^\alpha\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k\ell=n} a_k b_\ell\right) n^{-s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}\right) \\
&= \mathfrak{B}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha\right)\cdot\mathfrak{B}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} d_\alpha z^\alpha\right).
\end{aligned}$$

Isso encerra a demonstração. ■

Exemplo 1.7.6. Seja E um espaço normado e B a bola aberta e unitária de E. Segue da Proposição 1.3.5 que o conjunto $\mathcal{H}_\infty(B)$ é uma álgebra de Banach com unidade quando consideramos o produto usual de funções e a norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in B\}$.

A versão completa do Teorema 1.3.13 é a seguinte:

Teorema 1.7.7. *Existe uma isometria multiplicativa entre os espaços normados $\mathfrak{P}_\infty$ e $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$. Em particular, $\mathfrak{P}_\infty$ é uma álgebra de Banach.*

Exemplo 1.7.8. O espaço $\mathscr{H}_\infty$ é uma álgebra de Banach. Para uma demonstração disso, veja [47, Theorem 1.17]. Como consequência, segue que o espaço de Banach $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ é uma álgebra de Banach. De fato, a transformada de Bohr da Definição 1.4.8 é um isomorfismo de álgebra entre $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{D}$. Relembre que $\mathcal{A}_u(B_{c_0})$ é uma subálgebra fechada de $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$; logo, pelo Teorema 1.4.15, tem-se que $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ é uma subálgebra fechada de $\mathscr{H}_\infty$, e portanto uma álgebra de Banach.

Note também que pelo Teorema 1.4.15 tem-se $\mathscr{H}_\infty^m \subset \mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$. No entanto, $\mathscr{H}_\infty^m$ não é uma álgebra devido o produto não ser fechado em $\mathscr{H}_\infty^m$. Para finalizar esta seção apresentaremos o Teorema de Extensão de Aron-Berner. Relembramos que estamos a adotando $x \approx J_E(x)$, onde $J_E : E \longrightarrow E^{**}$ é o mergulho canônico.

Teorema 1.7.9. [46, Theorem 5] *Para toda função $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$ existe uma única extensão $\widetilde{f} \in \mathcal{H}_\infty(B^{**})$, isto é, existe uma função limitada e holomorfa $\widetilde{f} : B^{**} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(x) = \widetilde{f}(x)$ para todo $x \in B$. Além disso, a correspondência $f \in \mathcal{H}_\infty(B) \longrightarrow \widetilde{f} \in \mathcal{H}_\infty(B^{**})$ é uma isometria linear multiplicativa.*

1.8 Lineabilidade, espaçabilidade e algebrabilidade

Nesta seção apresentaremos as primeiras definições e resultados mais básicos conectados aos conceitos de lineabilidade, algebrabilidade e espaçabilidade. Nossa principal referência foi [10]. Também indicamos [2, 7, 20, 53] para um estudo mais completo sobre esse tema.

Definição 1.8.1. Sejam X um espaço vetorial topológico, M um subconjunto de X e α um número cardinal.

(a) M é *α-lineável* se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão α.

(b) M é *α-espaçável* se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial fechado de dimensão α.

(c) M é *espaçável maximal* se é $dim(X)$-espaçável.

A cardinalidade do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ será denotada por $\aleph_0$ (aleph zero), e a cardinalidade do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ será denotada por $\mathfrak{c}$ (continnum). Às vezes por simplicidade, quando existir um espaço vetorial de dimensão infinita contido em $M \cup \{0\}$, diremos apenas que M é lineável; e, se além disso, este espaço vetorial for fechado, diremos que M é espaçável. Note que espaçável implica lineável.

Observação 1.8.2. Se X é um espaço métrico separável infinito e $\mathcal{C}(X)$ é o conjunto de todas as funções contínuas $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, então a dimensão do espaço vetorial $\mathcal{C}(X)$ é de cardinalidade $\mathfrak{c}$. Seja $M \subset X$ enumerável tal que M é denso em X. Digamos que $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Note que a aplicação linear $T : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(M)$ definida por $T(f) = f|_M$ é injetiva. Também é injetiva a aplicação $U : \mathcal{C}(M) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definida por $U(f) = (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$. Logo, a composta $U \circ T : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ é injetiva. Como $\#\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$ então $dim(\mathcal{C}(X)) \leq \#\mathcal{C}(X) \leq \mathfrak{c}$. Segue de [10, Proposition III.5] que $dim(\mathcal{C}(X)) = \mathfrak{c}$. Em particular, os espaços vetoriais $\mathscr{H}_\infty$, $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$, $\mathscr{H}_\infty^m$ e $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$ tem dimensão com cardinalidade $\mathfrak{c}$.

Definição 1.8.3. Sejam I um conjunto de índices, $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa comutativa e $G = \{x_i : i \in I\}$ uma família de elementos em $\mathcal{A}$. Dizemos que um subconjunto $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ de G é *algebricamente independente* se $Q \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ e $Q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = 0$ implicar Q nulo. Diremos que G é *algebricamente independente* se, para todo subconjunto finito J de I, o conjunto $\{x_i : i \in J\}$ for algebricamente independente.

Definição 1.8.4. Sejam I um conjunto de índices e $\{\Theta_i : i \in I\}$ uma família arbitrária de conjuntos. Diremos que $(\Theta_i)_{i \in I}$ é uma família *quase disjunta* se para quaisquer $i_1, i_2 \in I$, com $i_1 \neq i_2$, tivermos que a interseção $\Theta_{i_1} \cap \Theta_{i_2}$ é finita.

Exemplo 1.8.5. [1, p.596] Existe uma família $\{\Theta_i : i \in I\}$ quase disjunta de $\mathbb{N}$ com $\#I = \mathfrak{c}$ e Θ_i infinito para cada $i \in I$.

Para o exemplo a seguir não encontramos uma referência, por isso resolvemos exibir a demonstração.

Exemplo 1.8.6. Seja I um conjunto de índices tal que $\#I = \mathfrak{c}$, e seja $\{\Theta_i : i \in I\}$ uma família quase disjunta de subconjuntos infinitos dos números naturais. Para cada $i \in I$, definamos os funcionais lineares $\varphi_{\Theta_i} : c_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\varphi_{\Theta_i}\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n \in \Theta_i} 2^{-n} x_n$. Vejamos que o conjunto

$$G = \{\varphi_{\Theta_i} : i \in I\} \subset (c_0)^* \subset \mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$$

é algebricamente independente. Para isso, sejam $i_1, \ldots, i_N \in I$ onde $N \in \mathbb{N}$. Afirmamos que: para cada $(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ existe $x \in c_0$ satisfazendo $\varphi_{\Theta_{i_\ell}}(x) = z_\ell$ para cada $\ell = 1, \ldots, N$. Note que esta afirmação é suficiente para concluir que G é algebricamente independente. De fato, seja $Q \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ tal que $Q(\varphi_{\Theta_{i_1}}, \ldots, \varphi_{\Theta_{i_N}}) = 0$. Sem qualquer cerimônia, podemos escrever

$$Q(\varphi_{\Theta_{i_1}}, \ldots, \varphi_{\Theta_{i_N}}) = \sum_{j=1}^{L} c_j \varphi_{\Theta_{i_1}}^{\alpha_{1j}} \varphi_{\Theta_{i_2}}^{\alpha_{2j}} \cdots \varphi_{\Theta_{i_N}}^{\alpha_{Nj}},$$

onde $L \geq 1, c_j \in \mathbb{C}$ e $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{Nj}) \in \mathbb{N}_0^N$ para cada $j = 1, \ldots, L$. Desta forma, temos

$$\sum_{j=1}^{L} c_j \varphi_{\Theta_{i_1}}^{\alpha_{1j}}(x) \varphi_{\Theta_{i_2}}^{\alpha_{2j}}(x) \cdots \varphi_{\Theta_{i_N}}^{\alpha_{Nj}}(x) = 0 \tag{1.13}$$

para todo $x \in c_0$. Segue pela afirmação que para cada $(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ existe $x \in c_0$ tal que

$$\varphi_{\Theta_{i_1}}^{\alpha_{1j}}(x) \varphi_{\Theta_{i_2}}^{\alpha_{2j}}(x) \cdots \varphi_{\Theta_{i_N}}^{\alpha_{Nj}}(x) = z_1^{\alpha_{1j}} z_2^{\alpha_{2j}} \cdots z_n^{\alpha_{Nj}} \tag{1.14}$$

para cada $j = 1, \ldots, L$. Logo, obtemos de (1.13) e (1.14) que o polinômio $\widetilde{Q} \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ dado por

$$\widetilde{Q}(z_1, \ldots, z_N) = \sum_{j=1}^{L} c_j z_1^{\alpha_{1j}} z_2^{\alpha_{2j}} \cdots z_n^{\alpha_{Nj}}$$

satisfaz

$$\widetilde{Q}(z_1, \ldots, z_N) = 0$$

para todo $(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$. Isso implica que $c_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, L$ e portanto $Q = 0$.

Para completar essa demonstração, resta demostrar a afirmação. Como os conjuntos $\Theta_{i_1}, \ldots, \Theta_{i_N}$ são quase disjuntos, ou seja, tem interseção finita dois a dois, podemos escolher números naturais $n_{i_1} < \cdots < n_{i_N}$ tais que $n_{i_\ell} \in \Theta_{i_\ell}$ e $n_{i_\ell} \notin \Theta_{i_p}$ se $p \neq \ell$. Para cada $\ell = 1, \ldots, N$, definamos a sequência $x_\ell = (x_{\ell,n})_{n=1}^{\infty} \in c_0$ por $x_{\ell,n} = 2^n z_\ell$ se $n = n_{i_\ell}$ e $x_{\ell,n} = 0$ caso contrário. Assim,

$$\varphi_{\Theta_{i_\ell}}(x) = \sum_{n \in \Theta_{i_\ell}} 2^{-n} x_n = 2^{-n_\ell} 2^{n_\ell} z_\ell = z_\ell$$

para cada $\ell = 1, \ldots, N$, e portanto isso mostra o desejado.

A álgebra gerada por um subconjunto G de $\mathcal{A}$ será denotada por $\mathcal{A}(G)$. Mais precisamente,

$$\mathcal{A}(G) = \{P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_N}) \,:\, N \in \mathbb{N}\,, P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N] \text{ não possui o termo constante e } x_{i_1}, \ldots, x_{i_N} \in G\}\,.$$

Definição 1.8.7. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa comutativa, M um subconjunto de $\mathcal{A}$ e α um número cardinal. Dizemos que M é *fortemente α-algebrável* se existe um subconjunto algebricamente independente G de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}(G) \subset M \cup \{0\}$ e $\#G = \alpha$.

Os conceitos de espaçabilidade e algebrabilidade são estudados em diferentes áreas da matemática, e esta tese é mais um exemplo desta afirmação. Como um aperitivo ao leitor apresentaremos o teorema a seguir.

Teorema 1.8.8. [24, Theorem 5] *O conjunto de todas as séries de Dirichlet $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{it}$ diverge para todo $t \in \mathbb{R}$ é fortemente 1-algebrável.*

Aproveitemos este momento para estabelecer uma terminologia. Para isso usaremos como exemplo um espaço normado arbitrário $(E, \|\cdot\|)$ e um subconjunto $M \subset E$. O leitor verá em algumas seções adiante, algo similar a seguinte afirmação: **O conjunto M contém uma cópia isomorfa (ou isométrica) de ℓ_1**. Esclareço o que queremos dizer.

($*$) O conjunto M será visto como um subconjunto de $(E, \|\cdot\|)$. Além disso, existirá uma aplicação linear e contínua $T : (\ell_1, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \|\cdot\|)$ que será um isomorfismo (ou isomorfismo isométrico) sobre sua imagem e $T(\ell_1) \subset M$.

Novamente, quando dissermos "O conjunto M contém uma cópia isomorfa (ou isométrica) de ℓ_1", estaremos pensado em algo similar como ($*$).

Finalizaremos esta seção com um teorema que estabelece critérios de algebrabilidade. Com o intuito de enunciar este resultado, fixemos algumas notações. Denotemos por $\mathcal{E}$ a família das *funções do tipo exponencial* $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, isto é, as funções da forma

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \exp(\beta_i s),$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta_1, \ldots, \beta_k$ distintos e $\exp(s) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}$ para todo $s \in \mathbb{C}$. Eis o resultado:

Teorema 1.8.9. [10, Theorem 7.5.1] *Sejam G um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ uma família de funções definidas em G e tomando valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Se existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(G)$ não é enumerável e $\varphi \circ f \in \mathcal{F}$ para toda $\varphi \in \mathcal{E}$, então $\mathcal{F}$ é fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável. Dito de outra maneira, se $H \subset (0, +\infty)$ é um conjunto com $\#H = \mathfrak{c}$ e é linearmente independente sobre o* *corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, então*

$$\{\exp\circ(rf) : r \in H\}$$

é um sistema de geradores algebricamente independentes de uma álgebra contida em $\mathcal{F} \cup \{0\}$.

1.9 Conjuntos de cluster e sequências interpolantes

Esta seção prepara o leitor para o tópico de conjunto de cluster. Esse tema é uma segunda parte de nossa pesquisa e será abordado no Capítulo 3. Além disso, veremos alguns resultados de sequências interpolantes. Para um estudo mais completo dos assuntos desta seção, indicamos [7,11,25,27,29,53,60,61,70,76].

Relembramos que adotando $x \approx J_E(x)$, onde $J_E : E \longrightarrow E^{**}$ é o mergulho canônico e também a partir de agora, adotaremos a notação $f \approx \widetilde{f}$, onde $\widetilde{f}$ é a extensão de Aron-Berner de f apresentada no Teorema 1.7.9.

Definição 1.9.1. Sejam E um espaço de Banach, $z \in \overline{B}^{**}$ e $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$.

(a) O *conjunto de cluster* da função f em z é o conjunto

$$Cl(f,z) := \{\mu \in \mathbb{C} \, : \, \text{existe uma rede } (z_\alpha)_\alpha \subset B\,, \\ z_\alpha \xrightarrow{w^*} z \text{ e } f(z_\alpha) \to \mu\}. \tag{1.15}$$

(b) O conjunto de cluster $Cl(f,z)$ é dito ser *grande* quando contém um disco aberto.

(c) O conjunto de cluster $Cl(f,z)$ é dito ser *total* se $Cl(f,z) = \overline{f(B)}$.

Observação 1.9.2. Em [12, p. 4] verifica-se a seguinte caracterização para o conjunto de cluster:

$$Cl(f,z) = \{\mu \in \mathbb{C} : \text{ existe uma rede } (x_\alpha^{**}) \subset B^{**}, x_\alpha \xrightarrow{w^*} z \text{ e } \widetilde{f}(x_\alpha^{**}) \to \mu\}. \tag{1.16}$$

O conjunto de cluster de uma função $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$ em z é compacto e conexo, como afirmado no próximo teorema, cuja demonstração é encontrada em [11, Lemma 2.1].

Teorema 1.9.3. *Sejam $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$ e $z \in \overline{B}^{**}$. Então o conjunto de cluster $Cl(f,z)$ é compacto e conexo. Além disso, se $z \in B$, então $f(z) \in Cl(f,z)$.*

Veremos a seguir alguns resultados relativos às funções que têm conjuntos de cluster grande. Antes disso, precisamos introduzir uma notação. Sejam X um subespaço fechado de $\mathcal{H}_\infty(B)$ e $M \subset \overline{B}^{**}$. Escreveremos

$$\mathcal{F}_M(X) = \{f \in X : \cap_{z\in M} Cl(f,z) \text{ contém um disco centrado em } 0\}.$$

O conjunto $\mathcal{F}_M(X)$ foi estudado em [7]. No entanto, no último capítulo deste trabalho, apresentaremos alguns resultados inéditos sobre ele. Para uma demonstração dos itens (a) e (b) do próximo resultado veja [7, Lemma 2.7].

Lema 1.9.4. (a) *Sejam* $E = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ *e* $M \subset S$. *Então* $\mathcal{F}_M(X) = \mathcal{F}_{\overline{M}}(X)$.

(b) *Sejam* E *um espaço de Banach de dimensão infinita e* $M \subset \overline{B}^{**}$. *Então* $\mathcal{F}_M(X) = \mathcal{F}_{\overline{M}^{w^*}}(X)$.

(c) *Sejam* E *um espaço de Banach de dimensão infinita e* $M \subset \overline{B}^{**}$. *Então*

$$\bigcap_{x\in M} Cl(f,x) = \bigcap_{x\in \overline{M}^{w^*}} Cl(f,x).$$

A demonstração do item (c) do Lema 1.9.4 é encontrada na demonstração em [7, Lemma 2.7].

Teorema 1.9.5. [7, Lemma 2.6]

(a) *Sejam* $E = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ *e* $M \subset S$ *um conjunto enumerável. Então* $\mathcal{F}_M(X)$ *é fortemente* $\mathfrak{c}$*-algebrável.*

(b) *Sejam* E *um espaço de Banach de dimensão infinita e* $M \subset \overline{B}^{**}$ *um conjunto enumerável. Então o conjunto* $\mathcal{F}_M(X)$ *é fortemente* $\mathfrak{c}$*-algebrável.*

Identificando $S \hookrightarrow \overline{B}^{**}$ via mergulho canônico, apresentaremos o seguinte resultado.

Teorema 1.9.6. [7, Theorem 1.1] *Se* $E = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$, *então o conjunto* $\mathcal{F}_S(\mathcal{H}_\infty(B))$ *é fortemente* $\mathfrak{c}$*-algebrável.*

Teorema 1.9.7. [7, Theorem 1.2] *Se* E *é um espaço de Banach de dimensão infinita e separável, então o conjunto* $\mathcal{F}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B))$ *é fortemente* $\mathfrak{c}$*-algebrável.*

O clássico Teorema de Fatou [52], assegura que para toda função holomorfa limitada $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, o limite $\lim\limits_{t\to 1} f(tz)$ existe para quase todo ponto z de $\mathbb{T}$. Existem generalizações do Teorema de Fatou para $\mathbb{C}^n$ [78, Theorem 9, p. 37]. Note que no Teorema de Fatou a aproximação de um ponto z do toro $\mathbb{T}$ é radial, isso é diferente (mais restrito) de quando pensamos no conjunto de cluster $Cl(f,z)$ cuja aproximação do ponto z é arbitrária. Dito isso, apresentaremos a seguinte definição.

Definição 1.9.8. Sejam E um espaço de Banach, $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$ e $x \in S$. O *conjunto de cluster radial* de f no ponto x é o conjunto

$$\begin{aligned} Clr(f,x) = \{\mu \in \mathbb{C} \ : \ &\text{existe uma sequência } (t_k)_{k=1}^{\infty} \subset (0,1) \text{ tal que} \\ &\lim_{k\to\infty} t_k = 1 \ \text{ e } \ \lim_{k\to\infty} f(t_k x) = \mu\}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Note que $Clr(f,x) \subset Cl(f,x)$ sempre que $x \in S$.

Precisamos do Teorema 1.9.9 para podermos apresentar mais um resultado acerca de conjuntos de cluster radial.

Teorema 1.9.9. [68, Section 26, Exercise 11] *Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Se $\mathcal{P}$ é uma coleção de subconjuntos fechados e conexos de X que é simplesmente ordenado com a ordem de inclusão. Então $Y = \bigcap_{A \in \mathcal{P}} A$ é conexo.*

Teorema 1.9.10. *Sejam $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$ e $z_0 \in S$. Então o conjunto de cluster radial $Clr(f, z_0)$ é compacto e conexo.*

Demonstração. Para cada $0 < r < 1$ denotemos $B(z_0, r) \cap B$. A notação $[0, z_0]$ representa o segmento de reta da origem da bola B até o ponto z_0. Mostraremos que

$$Clr(f, z_0) = \bigcap_{0<r<1} \overline{f((B(z_0, r) \cap B) \cap ([0, z_0] \setminus \{z_0\}))}. \tag{1.18}$$

Antes disso, note que por (1.18) o conjunto $Clr(f, z_0)$ é compacto. Ademais, como $r_1 < r_2$ implica

$$\overline{f((B(z_0, r_1) \cap B) \cap ([0, z_0] \setminus \{z_0\}))} \subset \overline{f((B(z_0, r_2) \cap B) \cap ([0, z_0] \setminus \{z_0\}))},$$

segue do Teorema 1.9.9 que $Clr(f, z_0)$ é conexo. Logo, para demonstrar o teorema é suficiente verificar a igualdade (1.18).

Seja $\mu \in Clr(f, z_0)$. Logo, existe uma sequência $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n z_0) = \mu$. Seja $0 < r < 1$ fixado arbitrariamente. Como $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|t_n - 1| < r$ para todo $n \geq n_0$. Daí, $\|t_n z_0 - z_0\| = |t_n - 1| < r$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, $t_n z_0 \in (B(z_0, r) \cap B) \cap ([0, z_0] \setminus \{z_0\})$ para todo $n \geq n_0$. Visto que $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n z_0) = \mu$, obtemos que $\mu \in \overline{f((B(z_0, r) \cap B) \cap ([0, z_0] \setminus \{z_0\}))}$. Sendo $0 < r < 1$ escolhido arbitrariamente, concluímos que $\mu \in \bigcap\limits_{0<r<1} \overline{f((B(z_0, r) \cap B) \cap ([0, z_0] \setminus \{z_0\}))}$. Da mesma forma $\mu \in Clr(f, z_0)$ foi escolhido arbitrariamente, logo

$$Clr(f, z_0) \subset \bigcap_{0<r<1} \overline{f((B(z_0, r) \cap B) \cap ([0, z_0] \setminus \{z_0\}))}. \tag{1.19}$$

Agora, seja $\mu \in \bigcap\limits_{0<r<1} \overline{f((B(z_0, r) \cap B) \cap ([0, z_0] \setminus \{z_0\}))}$. Em particular,

$$\mu \in \overline{f((B(z_0, 1/n) \cap B) \cap ([0, z_0] \setminus \{z_0\}))}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe $t_n \in (0,1)$ tal que

$$t_n z_0 \in (B(z_0, 1/n) \cap B) \cap ([0, z_0] \setminus \{z_0\}) \text{ e } |\mu - f(t_n z_0)| < \frac{1}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, o que implica

$$|t_n - 1| = \|t_n z_0 - z_0\| < 1/n \ \text{ e } \ |\mu - f(t_n z_0)| < \frac{1}{n} \tag{1.20}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue de (1.20) que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n z_0) = \mu$. Logo, $\mu \in Clr(f, z_0)$. Como μ foi escolhido arbitrariamente, obtemos

$$\bigcap_{0<r<1} \overline{f((B(z_0, r) \cap B) \cap ([0, z_0] \setminus \{z_0\}))} \subset Clr(f, z_0). \tag{1.21}$$

Segue de (1.19) e (1.21) a igualdade em (1.18). Isso encerra a demonstração. ■

O teorema abaixo pode ser visto como uma contraparte do Teorema de Fatou.

Teorema 1.9.11. [66, Theorem 1.2] *Sejam $E = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ e $M \subset S$ um conjunto discreto. Então existem $f \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}^n)$ e $\delta > 0$ tais que $\mathbb{D}_\delta(0) \subset \cap_{x\in M} Clr(f, x)$.*

Teorema 1.9.12. [44, Lemma 1, p. 24] *Seja $M \subset \mathbb{T}$ um conjunto de medida de Lesbegue unidimensional nula. Então existe $f \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ tal que $\|f\| \leq 1$ e satisfaz:*

(a) $\lim\limits_{t\to 1} |f(t\mathrm{e}^{it})| = 1$ *para todo* $\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{T} \setminus M$.

(b) $\liminf\limits_{t\to 1} |f(t\mathrm{e}^{it})| = 0$ *e* $\limsup\limits_{t\to 1} |f(t\mathrm{e}^{it})| = 1$ *para cada* $\mathrm{e}^{it} \in M$.

Agora, discutiremos um pouco sobre as sequências interpolantes.

Definição 1.9.13. Uma sequência $(x_k^{**})_{k=1}^\infty \subset B^{**}$ (resp. $\overline{B}^{**}$) é uma *sequência interpolante* para um subespaço X de $\mathcal{H}_\infty(B)$ (resp. $\mathcal{A}_u(B)$), se para toda sequência $(\alpha_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$, existir uma função $f \in X$ tal que $\tilde{f}(x_k^{**}) = \alpha_k$ para cada k, onde $\widetilde{f}$ é a extensão de Aron-Berner de f.

Teorema 1.9.14 (Condição de Hayman-Newman)**.** [59, p. 203] *Seja $(z_k)_{k=1}^\infty$ uma sequência em $\mathbb{D}$ tal que $(1 - |z_{k+1}|)/(1 - |z_k|) < c < 1$. Então $(z_k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência interpolante para $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$.*

A condição de Hayman-Newman motiva o resultado a seguir.

Teorema 1.9.15. [56, Corollary 8] *Seja $(x_k)_{k=1}^\infty$ uma sequência em B tal que $(1 - \|x_{k+1}\|)/(1 - \|x_k\|) < c$ para algum $0 < c < 1$. Então $(x_k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência interpolante para $\mathcal{H}_\infty(B)$.*

O próximo resultado é conhecido. No entanto, como não encontramos uma referência para sua demonstração, exibiremos uma.

Lema 1.9.16. *Sejam X um subespaço fechado de $\mathcal{H}_\infty(B)$ e $(x_k^{**})_{k=1}^\infty \subset B^{**}$ uma sequência interpolante para X. Então existe uma constante $C \geq 1$ tal que para cada sequência $(a_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}$ existe $f \in X$ tal que $\|\tilde{f}\| \leq C$ e $\tilde{f}(x_k^{**}) = a_k$ para todo k.*

Demonstração. Seja $T : X \to \ell_\infty$ um operador linear definido por $T(f) = (\tilde{f}(x_k^{**}))_{k=1}^\infty$. O operador T é contínuo, além disso, é sobrejetor, pois a sequência $(x_k^{**})_{k=1}^\infty$ é interpolante para a álgebra X. Segue do teorema da aplicação aberta que $T(B_X)$ é aberto. Além disso, $0 \in T(B_X)$, logo existe $C \geq 1$ tal que

$$B_{\ell_\infty} \subset C \cdot T(B_X) \subset C \cdot T\left(\overline{B}_X\right) = T\left(C \cdot \overline{B}_X\right).$$

Portanto, para cada sequência $(a_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}$ existe $f \in C \cdot \overline{B}_X$ tal que

$$(\widetilde{f}(x_k^{**}))_{k=1}^\infty = T(f) = (a_k)_{k=1}^\infty$$

e isso encerra a demonstração do lema. ■

A menor constante $C > 0$ que satisfaz a condição do Lema 1.9.16 é chamada de *constante de interpolação* para $(x_k^{**})_{k=1}^\infty$. Por exemplo, a sequência $(e_k)_{k=1}^\infty \subset \overline{B}_{\ell_2}$ é uma sequência interpolante para $\mathscr{P}_2(\ell_2) \subset \mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$, com constante de interpolação igual a 1. Com efeito, é suficiente notar que para cada sequência $(a_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}$ podemos definir $P : \overline{B}_{\ell_2} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $P((\lambda_k)_{k=1}^\infty) = \sum_{k=1}^\infty a_k \lambda_k^2$. A demonstração disso é realizada no Exemplo 3.1.2.

Em (1.15) apresentamos a definição de conjunto de cluster de funções na álgebra $\mathcal{H}_\infty(B)$. Agora, por analogia, apresentaremos a definição de conjunto de cluster de funções na álgebra $\mathscr{H}_\infty^{(1)}$. Manteremos o mesmo símbolo para representar o conjunto de cluster em ambas as álgebras. No entanto, ressaltamos que isso não causará ambiguidade.

Definição 1.9.17. Sejam $D \in \mathscr{H}_\infty^{(1)}$ e $s \in \overline{\mathbb{C}}_0$. O *conjunto de cluster* de D em s é o conjunto

$$\begin{aligned} Cl(D,s) = \{\mu \in \mathbb{C} \,:\, & \text{ existe uma sequência } (s_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}_0, \\ & \lim_{k\to\infty} s_k = s \text{ e } \lim_{k\to\infty} D(s_k) = \mu\}. \end{aligned}$$

Claro que se $s \in \mathbb{C}_0$, então o conjunto de cluster $Cl(D,s)$ é um conjunto unitário; a saber, $Cl(D,s) = \{D(s)\}$.

1.10 Resultados gerais

Alguns resultados isolados usados neste trabalho serão inseridos nesta seção. Isso foi feito com o objetivo de deixar o entendimento mais simples ao leitor. Que fique claro, esses resultados não são inéditos. Em alguns deles, apenas fizemos adequações para este trabalho. Sugerimos ao leitor [47, 68] para mais detalhes.

De modo formal, escreveremos uma série de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathfrak{D}$ por

$$\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} = \sum_{m=0}^\infty \sum_{\Omega(n)=m} a_n n^{-s}. \tag{1.22}$$

Além disso, para todo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$ definamos

$$D_\lambda = \lambda_1 D + \lambda_2 D^2 + \cdots + \lambda_k D^k,$$

onde $D^j := \underbrace{D \cdot D \cdots D}_{j-vezes}$, $j \in \mathbb{N}$, cujo produto que consideramos é o Dirichlet. Também definamos

$$\widetilde{\Omega}(D) = \{m \in \mathbb{N} : \text{existe } n \in \mathbb{N}, \Omega(n) = m, a_n \neq 0\}.$$

Da forma que escrevemos a série em (1.22), ainda não estamos preocupados em convergência. No entanto, quando isso for levado em consideração, a igualdade em (1.22) é válida para toda série de Dirichlet em $\mathscr{H}_\infty$, pois a convergência é garantida pela Proposição 1.4.12. Dito isso, vejamos algumas propriedades de $\widetilde{\Omega}(D)$.

Proposição 1.10.1. *As seguintes propriedades são válidas para quaisquer séries de Dirichlet $D_m \in \mathfrak{D}_m$ e $D_n \in \mathfrak{D}_n$.*

(a) $D_m \cdot D_n \in \mathfrak{D}_{m+n}$.

(b) $\min(\widetilde{\Omega}(D_m + D_n)) = \min\{m, n\}$ *se* $m \neq n$.

(c) $\max(\widetilde{\Omega}(D_m + D_n)) = \max\{m, n\}$ *se* $m \neq n$.

Demonstração. Sejam $D_m \in \mathfrak{D}_m$ e $D_n \in \mathfrak{D}_n$. Os itens (b) e (c) são consequências imediatas da definição de $\widetilde{\Omega}$. Para a demonstração de (a), notemos que de acordo com a aplicação Bohr lift $\mathfrak{L}$, existem um polinômio m-homogêneo P_m e um polinômio n-homogêneo P_n tais que $\mathfrak{L}(D_m) = P_m$ e $\mathfrak{L}(D_n) = P_n$, onde P_m e P_n estão definidos em c_0. Logo, $P_m \cdot P_n$ é um polinômio $(m+n)$-homogêneo e portanto pela transformada de Bohr $D_m \cdot D_n = \mathfrak{B}(P_m \cdot P_n) \in \mathfrak{D}_{m+n}$. ■

Lema 1.10.2. *Sejam $D, D_1, D_2, \ldots \in \mathscr{H}_\infty$ e $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{C}^k$ tais que $(D_q)_{q=1}^\infty$ converge para D em $\mathscr{H}_\infty$ e $(\lambda_q)_{q=1}^\infty$ converge para λ em $\mathbb{C}^k$. Então $\left((D_q)_{\lambda_q}\right)_{q=1}^\infty$ converge para D_λ em $\mathscr{H}_\infty$.*

Demonstração. Para cada $q \in \mathbb{N}$, escreveremos $\lambda_q = (\lambda_{q,1}, \ldots, \lambda_{q,k})$ e $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ ambos pertencente a $\mathbb{C}^k$. Segue das convergências

$$\lim_{q\to\infty} D_q = D \text{ e } \lim_{q\to\infty} \lambda_q = \lambda,$$

que

$$\lim_{q\to\infty} D_q^j = D^j \text{ e } \lim_{q\to\infty} \lambda_{q,j} = \lambda_j$$

para cada $j = 1, \ldots, k$. Portanto,

$$\lim_{q\to\infty} (D_q)_{\lambda_q} = \sum_{j=1}^{k} \lim_{q\to\infty} \left(\lambda_{q,j} D_q^j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j D^j = D_\lambda.$$

Isso mostra o desejado. ■

Proposição 1.10.3. [47, Proposition 3.4] *Seja* $\{1, \theta_1, \ldots, \theta_N\}$ *um conjunto* $\mathbb{Z}$*-linearmente independente de números reais. Então a sequência* $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ *definida por*

$$z_j = (\exp(2\pi i j \theta_1), \ldots, \exp(2\pi i j \theta_N))$$

é densa em $\mathbb{T}^N$*. Em particular, o conjunto*

$$\{(\mathfrak{p}_1^{it}, \ldots, \mathfrak{p}_N^{it}) : t \in \mathbb{R}\} \text{ é denso em } \mathbb{T}^N.$$

Lema 1.10.4. *O conjunto* $\{2^{-(p+ir)} : (p, r) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}\}$ *é denso em* $\overline{\mathbb{D}}$*.*

Demonstração. Seja $\mu = |\mu|e^{i\theta} \in \mathbb{D}$, onde $0 \leq \theta < 2\pi$. Recorde que $\mathbb{T} = \{2^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ e $|\mu| = 2^{\log_2 |\mu|}$, onde $\log_2$ significa logaritmo (real) na base 2. Desta forma, para algum $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\mu = |\mu|e^{i\theta} = |\mu|2^{it} = 2^{\log_2 |\mu|}2^{it} = 2^{\log_2 |\mu| + it}.$$

Lembre que $\log_2 |\mu| < 0$, pois $|\mu| < 1$. Logo, sejam $(p_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}_+$ e $(q_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ sequências de números racionais, tais que $\lim\limits_{k\to\infty} -(p_k + iq_k) = \log_2 |\mu| + it$. Assim,

$$\lim_{k\to\infty} 2^{-(p_k+iq_k)} = 2^{\log_2 |\mu| + it} = \mu,$$

o que é suficiente para concluir a demonstração do lema. ■

Lema 1.10.5. *Existe uma família (disjunta)* $\{\Theta_k : k \in \mathbb{N}\}$ *formada por progressões aritméticas infinitas.*

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos $\Theta_k := \left\{2^k + n2^{k+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Afirmamos que a família $\{\Theta_k : k \in \mathbb{N}\}$ satisfaz a propriedade desejada. Com efeito, se existissem $\ell, k \in \mathbb{N}$ tais que $\Theta_\ell \cap \Theta_k \neq \emptyset$, então existiriam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $2^\ell + n_1 2^{\ell+1} = 2^k + n_2 2^{k+1}$, o que implicaria $2^\ell(2n_1 + 1) = 2^k(2n_2 + 1)$. Se $\ell \neq k$, podemos supor (sem perda de generalidade) que $\ell < k$, logo $2n_1 + 1 = 2^{k-\ell}(2n_2 + 1)$. Isso é um absurdo, pois $2n_1 + 1$ é ímpar e $2^{k-\ell}(2n_2 + 1)$ é par. Portanto $\ell = k$. Isso encerra a demonstração do lema. ■

Lema 1.10.6. [79, Lema 2.1] *Sejam* Θ *e* I *conjuntos quaisquer e* $\alpha \geq \beta$ *números cardinais infinitos satisfazendo* $\#\Theta = \alpha$ *e* $\#I = \beta$*. Então existe uma partição (disjunta)* $\{\Theta_i : i \in I\}$ *de* Θ *tal que* $\#\Theta_i = \beta$ *para cada* $i \in I$*.*

Relembre que para cada $x \in [2, +\infty]$ tem-se que $\pi(x) := \#\{p : p \leq x, \ p \text{ primo}\}$.

Teorema 1.10.7 (Teorema dos Números Primos)**.** [8, Theorem 4.5 and Chapter 13] *Seja* $(\mathfrak{p}_k)_{k=1}^{\infty}$ *a sequência de números primos. Então as seguintes afirmações são válidas:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$

(b) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\mathfrak{p}_k}{k \log k} = 1.$

Proposição 1.10.8. *Seja $(\mathfrak{p}_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de números primos. Para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C > 0$ tal que $\mathfrak{p}_k \leq Ck^{1+\varepsilon}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pela regra de L' Hospital obtemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\varepsilon}} = 0. \tag{1.23}$$

Então, segue do Teorema 1.10.7 (b) e de (1.23) que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathfrak{p}_k}{k^{1+\varepsilon}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\mathfrak{p}_k}{k \log k} \frac{\log k}{k^{\varepsilon}} \right) = 0.$$

Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que $\mathfrak{p}_k \leq Ck^{1+\varepsilon}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso mostra o desejado. ∎

Lema 1.10.9. *Sejam $\Theta \subsetneq \mathbb{N}$ infinito e $k, n, u, v \in \mathbb{N}$. Se u e k tem apenas fatores primos $\mathfrak{p}_i$ com $i \in \Theta$ e n, v tem apenas fatores primos $\mathfrak{p}_i$ com $i \in \mathbb{N} \setminus \Theta$, então $k = u$ e $n = v$ se $nk = uv$.*

Demonstração. Sejam $k, n, u, v \in \mathbb{N}$ satisfazendo as hipóteses do lema. Note que $\frac{uv}{k} = n \in \mathbb{N}$, logo $k|uv$, e como k e v são coprimos segue que $k|u$. Similarmente, $\frac{nk}{u} = v \in \mathbb{N}$, logo $u|nk$, e como u e n são coprimos segue que $u|k$. Assim, $k = u$. Analogamente, obtemos que $n = v$. Isso encerra a demonstração. ∎

Lema 1.10.10. [47, Lemma 4.7] *Existe uma sequência $(R_k)_{k=1}^{\infty}$ de polinômios m-homogêneos contínuos satisfazendo*

$$\|R_k : \ell_{\infty}^{p^k} \to \mathbb{C}\|_{\infty} \leq p^{k\frac{m+1}{2}}, k \in \mathbb{N},$$

e

$$\eta := \inf\{|c_{\alpha}(R_k)| : k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^{p^k}, |\alpha| = m\} > 0.$$

Teorema 1.10.11. [51, Theorem 4.8] *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo e seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se existe uma sequência $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ de pontos distintos que converge para $z \in \Omega$ e satisfazendo $f(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f = 0$.*

Definição 1.10.12. Um espaço vetorial topológico E é dito ser um *espaço de Baire* se para toda sequência $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos fechados em E com interior vazio a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tem interior vazio.

Lema 1.10.13. [68, Lemma 48.1] *Um espaço vetorial topológico E é um espaço de Baire se, e somente se, para toda sequência $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos abertos e densos em E a interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é densa em E.*

Teorema 1.10.14 (Teorema de Baire)**.** [68, Theorem 48.2] *Todo espaço de Banach E é um espaço de Baire.*

Definição 1.10.15. Um subconjunto M de um espaço vetorial topológico E é G_δ se for interseção enumerável de conjuntos abertos em E, isto é, se existir uma sequência $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos abertos em E tal que $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Se além disso o conjunto M seja denso em E, diremos que M é um conjunto G_δ-*denso* em E.

Note que pelo Lema 1.10.13 tem-se que em um espaço de Baire todo conjunto G_δ-denso em E é denso em E. Em particular, são não vazios. Finalizaremos este capítulo com uma variação do Teorema de Josefson-Nissenzweig.

Teorema 1.10.16. [49, Ch. XII, Ex. 2] *Se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, então a esfera S^* de E^* é sequencialmente densa em $\overline{B}^*$ na topologia fraca estrela (E^*, w^*).*

Capítulo 2

Álgebras e espaços de Banach de séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal

Neste capítulo, trataremos dos resultados (inéditos) relacionados as abscissas de convergência de uma série de Dirichlet. Esses resultados são do artigo em [6]. A Seção 2.1 é dedicada a algumas definições e notações já conhecidas. Na Seção 2.2, formalizamos a definição de algumas subálgebras de $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$, e apresentaremos alguns resultados técnicos sobre essas subálgebras. Mostramos na Seção 2.3, a existência de estrutura linear em um subconjunto das séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal. Na Seção 2.4, apresentaremos alguns lemas técnicos. Trataremos na Seção 2.5, sobre a existência de estrutura algébrica num conjunto das séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal. Na Seção 2.6, investigamos a existência de estrutura linear no conjunto das séries de Dirichlet $D \in \mathscr{H}_\infty$ tais que a diferença máxima entre as abscissas $\sigma_a(D)$ (resp. $\sigma_u(D)$) e $\sigma_c(D)$ seja 1. A última seção é dedicada aos "bastidores" da nossa pesquisa. Por fim, nossas principais referências neste capítulo foram [24, 45, 47, 48]. No entanto, também estudamos os trabalhos [9, 10, 14, 21, 22, 38] como uma complementação.

2.1 Preliminares

Como mencionado na Introdução, o problema da abscissa de convergência absoluta de Bohr, consiste em investigar o número

$$S := \sup_{D \in \mathfrak{D}} \left[\sigma_a(D) - \sigma_u(D)\right].$$

Mais precisamente, saber se $S = 1/2$. Hoje, devido a Bohnenblust–Hille (veja Teorema 1.5.6), sabemos que isso é verdade e, além disso, este supremo é atingido, isto é, existe uma série de Dirichlet $D \in \mathfrak{D}$ tal que $\sigma_a(D) - \sigma_u(D) = 1/2$. Até a conclusão disto, passaram-se mais de 15 anos, o que indica a dificuldade do problema, e por consequência, da sua solução. Neste trabalho, investigamos a existência de estruturas lineares e algébricas no conjunto

$$\mathscr{M} = \{D \in \mathscr{A}(\mathbb{C}_0) : \sigma_a(D) = 1/2\}.$$

De modo mais específico, trataremos de responder a seguinte pergunta:

(I) o conjunto $\mathscr{M} \cup \{0\}$ contém estruturas lineares e algébricas?

Este capítulo, em grande parte, é dedicado a responder a pergunta (I) e os principais resultados nele abordados são os Teoremas 2.3.1, 2.3.3 e 2.5.3. Também abordaremos sobre a lineabilidade dos conjuntos

$$\mathscr{N} = \{D \in \mathscr{H}_\infty : \sigma_u(D) - \sigma_c(D) = 1\}$$

e

$$\mathscr{L} = \{D \in \mathscr{H}_\infty : \sigma_a(D) - \sigma_c(D) = 1\}.$$

Precisamos estabelecer algumas notações. Para um número complexo $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ e toda série de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathfrak{D}$, escreveremos

$$A_N(D, s) = \sum_{n=1}^{N} |a_n| n^{-\sigma}\,, N \in \mathbb{N}.$$

Note que para $\delta > 0$

$$\lim_{N\to\infty} A_N(D, \delta) = \infty \quad \text{implica} \quad \sigma_a(D) \geq \delta. \tag{2.1}$$

Se para um subconjunto infinito $\Theta \subset \mathbb{N}$, escrevemos

$$D_\Theta(s) = \sum_{n\in\Theta}^{\infty} a_n n^{-s},$$

então

$$A_N(D, \delta) \geq A_N(D_\Theta, \delta) \tag{2.2}$$

para todo $\delta > 0$. Logo, se $0 < \delta < \sigma_a(D_\Theta)$ é arbitrário, então $\lim\limits_{N\to\infty} A_N(D_\Theta, \delta) = \infty$, o que implica de (2.2) que $\lim\limits_{N\to\infty} A_N(D, \delta) = \infty$. Isso combinado com (2.1) fornece $\sigma_a(D) \geq \delta$. Fazendo $\delta \to \sigma_a(D_\Theta)$ obtemos

$$\sigma_a(D) \geq \sigma_a(D_\Theta) \tag{2.3}$$

para toda série de Dirichlet D e todo subconjunto infinito $\Theta \subset \mathbb{N}$.

Observação 2.1.1. Sabemos que $S = \sup\limits_{D\in\mathscr{H}_\infty} \sigma_a(D) = 1/2$. Então, para demonstrar que uma série $D \in \mathscr{H}_\infty$ satisfaz $\sigma_a(D) = 1/2$ é suficiente mostrar que $\sigma_a(D) \geq 1/2$.

2.2 Álgebra $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$

No Capítulo 1, apresentamos as álgebras $\mathscr{H}_\infty$ e $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$. Além disso, sabemos que $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ é uma subálgebra fechada de $\mathscr{H}_\infty$. Nesta seção formalizaremos a definição de uma subálgebra de $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$. O leitor verá nos Lemas 2.2.5 e 2.2.11, a importância dessa subálgebra na obtenção dos resultados que envolvem espaçabilidade e algebrabilidade.

Definição 2.2.1. Para cada subconjunto $\Theta \subset \mathbb{N}$ não-vazio, consideramos o conjunto

$$\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{A}(\mathbb{C}_0) : a_n = 0 \text{ se } \mathfrak{p}_i | n \text{ para algum } i \notin \Theta \right\}.$$

Em particular, quando $\Theta = \mathbb{N}$ temos $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) = \mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$.

Exemplo 2.2.2. A série de Dirichlet $\displaystyle\sum_{i\in\Theta} \mathfrak{p}_i^{-2}\mathfrak{p}_i^{-s} \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ para cada subconjunto $\Theta \subset \mathbb{N}$.

O teorema a seguir mostra que $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ é uma subálgebra fechada de $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$.

Teorema 2.2.3. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *O conjunto $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ é fechado na soma, multiplicação por escalar e produto de Dirichlet, todos induzidos de $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$, ou seja, $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ é uma subálgebra de $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$.*

(b) *$\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ é uma subálgebra fechada de $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$.*

Demonstração. (a) Sejam $D_1, D_2 \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ quaisquer. Digamos que

$$D_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \text{ e } D_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

onde $b_n = a_n = 0$ se $\mathfrak{p}_i|n$ para algum $i \notin \Theta$. Logo,

$$D_1 + D_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) n^{-s} \text{ e } \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda\, a_n) n^{-s}, \tag{2.4}$$

o que implica $b_n + a_n = 0$ e $\lambda a_n = 0$ se $\mathfrak{p}_i|n$ para algum $i \notin \Theta$. Isso mostra que $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ é fechado na soma e na multiplicação por escalar. Para verificar que $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ é fechado no produto de Dirichlet (ver Exemplo 1.7.3), seja

$$D_1 \cdot D_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k\ell=n} a_k b_\ell \right) n^{-s}.$$

Escrevamos $c_n = \sum_{k\ell=n} a_k b_\ell$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sejam $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tais que $n = k\ell$. Se $i \notin \Theta$ satisfaz $\mathfrak{p}_i \mid n$, então $\mathfrak{p}_i \mid k$ ou $\mathfrak{p}_i \mid \ell$, em qualquer caso teremos $a_k b_\ell = 0$ e portanto $c_n = \sum_{k\ell=n} a_k b_\ell = 0$. Assim, $c_n = 0$ se $\mathfrak{p}_i \mid n$ para algum $i \notin \Theta$, ou seja, $D_1 \cdot D_2 \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$.

(b) Seja $(D_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ que converge para D em $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$D_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} n^{-s} \text{ e } D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

onde $a_{k,n} = 0$ (para todo k) se $\mathfrak{p}_i | n$ para algum $i \notin \Theta$. Segue da Proposição 1.4.7 que

$$|a_{k,n} - a_n| \leq \|D_k - D\| \tag{2.5}$$

para todos $k, n \in \mathbb{N}$. Logo, obtemos da convergência $D_k \xrightarrow{k\to\infty} D$ em $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ e de (2.5) que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k,n} = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, se $\mathfrak{p}_i | n$ para algum $i \notin \Theta$, então $a_{k,n} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e portanto $a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{k,n} = 0$. Isso mostra que $D \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$, o que completa a demonstração do teorema. ■

Relembre que para cada $k \in \mathbb{N}$, todo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$ e toda série de Dirichlet $D \in \mathscr{H}_\infty$, usaremos a notação:

$$D_\lambda := \lambda_1 D + \lambda_2 D^2 + \cdots + \lambda_k D^k.$$

Lema 2.2.4. *Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $\Theta \subset \mathbb{N}$. As aplicações $S : \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \times \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ e $A_N : \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas, respectivamente, por*

$$S(D, \lambda) = D_\lambda$$

e

$$A_N(D, \sigma) = \sum_{n=1}^{N} |a_n| n^{-\sigma} \;\; \textit{para} \;\; D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

são contínuas.

Demonstração. A continuidade de S segue como consequência imediata do Lema 1.10.2. Posto isso, mostraremos a continuidade de A_N. Seja $(D, \sigma) \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \times \mathbb{R}_+$. Suponha que existam sequências $(D_q)_{q=1}^\infty \subset \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ e $(\sigma_q)_{q=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ tais que $(D_q)_{q=1}^\infty$ converge para D em $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ e $(\sigma_q)_{q=1}^\infty$ converge para σ em $\mathbb{R}_+$. Escrevemos

$$D_q = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,q} n^{-s} \;\text{ e }\; D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

para cada $q \in \mathbb{N}$. Segue da Proposição 1.4.7 que $|a_{n,q} - a_n| \leq \|D_q - D\|$ para todos $n, q \in \mathbb{N}$, o que implica $\lim\limits_{q\to\infty} |a_{n,q}| = |a_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\lim_{q\to\infty} A_N(D_q, \sigma_q) = \sum_{n=1}^{N} \lim_{q\to\infty} \left(|a_{n,q}| n^{-\sigma_q}\right) = \sum_{n=1}^{N} |a_n| n^{-\sigma} = A_N(D, \sigma).$$

Isso mostra que A_N é contínua. Portanto a demonstração está completa. ■

O lema a seguir fornece, sob certas condições, uma das propriedades que ganhamos ao trabalhar com as álgebras $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$'s. Ele é fundamental para os principais resultados deste capítulo.

Lema 2.2.5. *Seja $(\Theta_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos infinitos e dois a dois disjuntos dos números naturais. Consideremos uma sequência $(D_k)_{k=1}^{\infty}$ de séries de Dirichlet satisfazendo: $D_k \in \mathscr{A}_{\Theta_k}(\mathbb{C}_0)$ é não constante para cada $k \in \mathbb{N}$. Então o conjunto $G = \{D_k : k \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto algebricamente independente de $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$.*

Demonstração. Segue do Teorema 1.4.15 que a restrição da transformada de Bohr $\mathfrak{B}|_{\mathcal{A}_u(B_{c_0})} : \mathcal{A}_u(B_{c_0}) \to \mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ é um isomorfismo de álgebra. Posto isso, seja $f_k = \mathfrak{L}(D_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Definiremos o conjunto $X = \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$. Neste caso, é suficiente mostrar que X é um subconjunto algebricamente independente de $\mathcal{A}_u(B_{c_0})$, antes disso, iremos invocar algumas ferramentas essenciais para esta demonstração.

Pelo Teorema 1.3.10, temos

$$f_k(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha(f_k) z^\alpha, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

para todo $z \in B_{c_{00}}$ (relembre a definição deste conjunto na lista de símbolos). Note também que dados $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N, 0, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ satisfazendo

$$n = \mathfrak{p}^\alpha = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \ldots \mathfrak{p}_N^{\alpha_N} \text{ e } \operatorname{supp}(\alpha) := \{k : \alpha_k \neq 0\} \not\subset \Theta_k, \tag{2.7}$$

existe algum $i \in \operatorname{supp}(\alpha) \setminus \Theta_k$ tal que $\mathfrak{p}_i | n$. Então, escrevendo $D_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} n^{-s}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, segue do Teorema 1.4.9 que $c_\alpha(f_k) = a_{k,n}$ onde $n = \mathfrak{p}^\alpha$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e como $a_{k,n} = 0$ se $\mathfrak{p}_i | n$ para algum $i \notin \Theta_k$, obtemos de (2.6) e (2.7) que

$$f_k(z) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ \operatorname{supp}(\alpha) \subset \Theta_k}} c_\alpha(f_k) z^\alpha, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

para todo $z \in B_{c_{00}}$. Finalmente estamos preparados para verificar que X é algebricamente independente.

Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ um polinômio tal que $Q(f_1, \ldots, f_N) = 0$. Para cada $\ell = 1, \ldots, N$ temos que f_ℓ é não constante, logo existem $\alpha^\ell \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \setminus \{0\}$ tais que $\operatorname{supp}(\alpha^\ell) \subset \Theta_\ell$ e $c_{\alpha^\ell}(f_\ell) \neq 0$. Defina $L := \max\left\{j \;:\; j \in \bigcup_{\ell=1}^{N} A_\ell\right\}$, onde $A_\ell := \operatorname{supp}(\alpha^\ell)$. Agora, definamos aplicações $\pi_\ell : \mathbb{D}^L \longrightarrow B_{c_0}$ por

$$\pi_\ell\left((z_j)_{j=1}^{L}\right) = (\chi_{A_\ell}(j) z_j)_{j=1}^{\infty} \tag{2.9}$$

para cada $\ell = 1, \ldots, N$. Visto que $\alpha^\ell \neq 0$ e $c_{\alpha^\ell}(f_\ell) \neq 0$, então a aplicação

$$(z_j)_{j=1}^{L} \in \mathbb{D}^L \longmapsto c_{\alpha_\ell}(f_\ell) \left[\pi_\ell\left((z_j)_{j=1}^{L}\right)\right]^{\alpha_\ell} \in \mathbb{C}$$

é não constante (ressaltamos que a definição $\left[\pi_\ell\left((z_j)_{j=1}^{L}\right)\right]^{\alpha_\ell}$ é a mesma definida para z^α na Seção de Definições de Notações Gerais). Segue daí e de (2.8) que $f_\ell \circ \pi_\ell : \mathbb{D}^L \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa não constante para cada $\ell = 1, \ldots, N$. Logo, pelo Teorema da Aplicação

Aberta, existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{D}_\delta((f_\ell \circ \pi_\ell)(0)) \subset Im(f_\ell \circ \pi_\ell)$ para todo $\ell = 1, \dots, N$.

Fixado $\lambda_\ell \in \mathbb{D}_\delta((f_\ell \circ \pi_\ell)(0))$ para cada $\ell = 1, \dots, N$, existe $w_\ell = (w_{1,\ell}, \dots, w_{L,\ell}) \in \mathbb{D}^L$ tal que $f_\ell(\pi_\ell(w_\ell)) = \lambda_\ell$. Seja $v_0 := \pi_1(w_1) + \cdots + \pi_N(w_N)$. Note que $\mathrm{supp}\,(\pi_\ell(w_\ell)) \subset \Theta_\ell$ para cada $\ell = 1, \dots, N$, e os conjuntos Θ_ℓ são disjuntos aos pares, por hipótese. Segue de (2.8) que

$$\begin{aligned} f_\ell(v_0) &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ \mathrm{supp}(\alpha) \subset \Theta_\ell}} c_\alpha(f_\ell) \left(\pi_1(w_1) + \cdots + \pi_N(w_N)\right)^\alpha \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ \mathrm{supp}(\alpha) \subset \Theta_\ell}} c_\alpha(f_\ell) \pi_\ell(w_\ell)^\alpha \\ &= f_\ell(\pi_\ell(w_\ell)) = \lambda_\ell, \end{aligned}$$

para cada $\ell = 1, \dots, N$. Logo, $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = Q(f_1(v_0), \dots, f_N(v_0)) = 0$. Uma vez que isto é válido para cada $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ do conjunto aberto $\mathbb{D}_\delta(f_1(0)) \times \cdots \times \mathbb{D}_\delta(f_N(0))$, concluímos que $Q = 0$. Isso é suficiente para concluir que X é algebricamente independente, e portanto G também o é. ■

O próximo lema é essencial para a continuação dos resultados que envolvem a álgebra $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$. Ressaltamos que a sua demonstração é realizada para subconjuntos $\Theta \subset \mathbb{N}$ que contêm progressões aritméticas infinitas. Não sabemos (até o momento que escrevo estas linhas) se o resultado é válido para subconjuntos $\Theta \subset \mathbb{N}$ infinitos quaisquer. Também, aproveitamos para agradecer a Alberto Conejero, Juan B. Seoane-Sepúlveda e Pablo Sevilla-Peris pelo trabalho em [45], pois a ideia da demonstração do Lema 2.2.6, surgiu dos estudos realizados no mesmo. Além deles, agradecemos a Santiago Muro que nos ajudou a melhorar o Lema 2.2.6.

Lema 2.2.6. *Sejam $(j_k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de números naturais e $L > 0$ tais que $k \leq j_k \leq L \cdot k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Então para $m \geq 2$ e $\Theta \subset \mathbb{N}$, com $(j_k)_{k=1}^\infty \subset \Theta$, existe um polinômio $P \in \mathscr{P}_m(c_0)$ suportado em Θ (i.e., $c_\alpha(P) = 0$ sempre que $\mathrm{supp}(\alpha) \not\subset \Theta$) tal que para todo $\varepsilon > 0$, temos*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha| = m}} |c_\alpha(P)| \frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{\frac{1}{(\frac{2m}{m-1} + \varepsilon)(1+\varepsilon)}}} = \infty. \tag{2.10}$$

Demonstração. É suficiente supor $\Theta = \{j_k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$. Pelo Teorema 1.4.16, temos

$$\mathrm{mon}\, \mathscr{P}_m(c_0) = \ell_{\frac{2m}{m-1}, \infty}. \tag{2.11}$$

Consideremos a sequência $w = (w_\ell)_{\ell=1}^\infty$ definida por

$$w_\ell := \begin{cases} \ell^{-\frac{m-1}{2m}} \cdot \ln \ell & \text{se } \ell \in \Theta; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $w \in c_0$. Por definição, a sequência $(w_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ é decrescente, então a sequência reordenamento decrescente $w^* = (w_k^*)_{k=1}^{\infty}$ de w é da forma $w^* = \left(j_k^{-\frac{m-1}{2m}} \cdot \ln j_k\right)_{k=1}^{\infty}$. Agora, note que

$$\begin{aligned} k^{\frac{m-1}{2m}} w_k^* &= k^{\frac{m-1}{2m}} j_k^{-\frac{m-1}{2m}} \ln j_k = \left(\frac{k}{j_k}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \ln j_k \\ &\geq (1/L)^{\frac{m-1}{2m}} \ln j_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty, \end{aligned}$$

Logo, $w \notin \ell_{\frac{2m}{m-1},\infty}$ e por (2.11), concluímos que $w \notin \operatorname{mon} \mathscr{P}_m(c_0)$. Segue que existe um polinômio $P \in \mathscr{P}_m(c_0)$ tal que

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} |c_\alpha(P) w^\alpha| = \infty. \tag{2.12}$$

Note que podemos supor o polinômio m-homogêneo P suportado em Θ, isto é, $c_\alpha(P) = 0$ sempre que $\operatorname{supp}(\alpha) \not\subset \Theta$, pois caso exista $c_\alpha(P) \neq 0$ com $\operatorname{supp}(\alpha) \not\subset \Theta$, então $c_\alpha(P) w^\alpha = 0$. Com isso, ao considerarmos a família

$$\{c_\alpha \,:\, \alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\} := \{c_\alpha(P) \,:\, c_\alpha(P) \neq 0 \text{ se } \operatorname{supp}(\alpha) \subset \Theta\},$$

o polinômio m-homogêneo $\widetilde{P}$ cuja família de coeficientes seja $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$, satisfaz

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} |c_\alpha(\widetilde{P}) w^\alpha| = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} |c_\alpha(P) w^\alpha| = \infty. \text{ (pois } \operatorname{supp}(\alpha) \not\subset \Theta \Rightarrow c_\alpha(P) w^\alpha = 0)$$

Agora, vejamos que o polinômio P satisfaz (2.10). Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Além disso, seja $0 < \delta < (m-1)/2m$ tal que $1/[(2m/(m-1)+\varepsilon)(1+\varepsilon)] = (m-1)/2m - \delta$. Do mais, pelo Teorema 1.10.7 (b), existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\frac{1}{k \cdot \ln k} \leq C_1 \cdot \mathfrak{p}_k^{-1}, \tag{2.13}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} \left(j_k^\delta/(\ln j_k)^{(m-1)/2m+1-\delta}\right) = +\infty$, existe k_0 tal que $k \geq k_0$ implica $\left(j_k^\delta/(\ln j_k)^{(m-1)/2m+1-\delta}\right) \geq 1$. Daí, segue de (2.13) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{p}_{j_k}^{((m-1)/2m)-\delta}} &\geq \frac{1}{(C_1 \cdot j_k \cdot \ln j_k)^{(m-1)/2m-\delta}} \\ &= j_k^{-(m-1)/2m} \ln j_k \frac{j_k^\delta}{(\ln j_k)^{(m-1)/2m+1-\delta}} \frac{1}{C_1^{(m-1)/2m-\delta}} \\ &\geq w_{j_k} \cdot \frac{1}{C_1^{(m-1)/2m}}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

para todo para $k \geq k_0$. Por outro lado, $w_k = 0$ se $k \notin \Theta$ então, isso agregado a (2.14), permite concluir que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{\mathfrak{p}_k^{((m-1)/2m)-\delta}} \geq C_2 \cdot w_k, \tag{2.15}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, segue de (2.12) e (2.15) que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}} |c_\alpha(P)| \frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{\frac{1}{(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon)(1+\varepsilon)}}} &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}} |c_\alpha(P)| \frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{((m-1)/2m-\delta}} \\
&\geq C_2 \cdot \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}} |c_\alpha(P) w^\alpha| = \infty.
\end{aligned}$$

Isso encerra a demonstração do lema. ■

Exemplo 2.2.7. Sejam $u, v \in \mathbb{N}$ e $L = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left[\frac{u}{k} + v\right]$. Se $\Theta := \{u + kv \ : \ k \in \mathbb{N}\}$, então $k \leq u + kv \leq L \cdot k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, o Lema 2.2.6 é válido para progressões aritméticas infinitas.

Exemplo 2.2.8. O Lema 2.2.6 não é válido para qualquer subconjunto infinito Θ dos números naturais. Para isso, escolha $\Theta = \{k^2 \ : k \in \mathbb{N}\}$. Pelo Teorema 1.10.7 (b), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{k \cdot \ln\, k} \geq C \cdot \frac{1}{\mathfrak{p}_k}, \tag{2.16}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Definamos a sequência $w = (w_\ell)_{\ell=1}^\infty$ por

$$w_\ell := \begin{cases} \dfrac{1}{\ell \ln\, \ell} & \text{se } \ell \in \Theta; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $w \in c_0$. Ademais, a sequência $(w_{k^2})_{k=1}^\infty$ é decrescente, então a sequência reordenamento decrescente $w^* = (w_k^*)_{k=1}^\infty$ de w é da forma $w^* = \left(1/\left(k^2 \cdot \ln\, k^2\right)\right)_{k=1}^\infty$. Escolha $\varepsilon > 0$ e $0 < 2\delta < (m-1)/2m$ tais que $1/[(2m/(m-1)+\varepsilon)(1+\varepsilon)] = (m-1)/2m - \delta$. Como $0 < 2\delta < (m-1)/2m$, obtemos

$$\begin{aligned}
k^{\frac{m-1}{2m}} w_k^* = k^{\frac{m-1}{2m}} \frac{1}{\left(k^2 \cdot \ln\, k^2\right)^{\frac{m-1}{2m}-\delta}} &= \left(\frac{k}{k^2}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \frac{1}{\left(k^{-2\delta} \cdot \ln\, k^2\right)^{\frac{m-1}{2m}-\delta}} \\
= \frac{1}{\left(k^{\frac{m-1}{2m}-2\delta} \cdot \ln\, k^2\right)^{\frac{m-1}{2m}-\delta}} &\xrightarrow{k\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

o que implica $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left[k^{\frac{m-1}{2m}}\cdot w_k^*\right]<\infty$. Segue de (2.16), que a sequência $z=(z_\ell)_{\ell=1}^\infty$ definida por

$$z_\ell := \begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{p}_\ell} & \text{se } \ell\in\Theta; \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

que pertence a c_0, satisfaz $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left[k^{\frac{m-1}{2m}}\cdot z_k^*\right]<\infty$, isto é, $z=(z_\ell)_{\ell=1}^\infty\in\ell_{\frac{2m}{m-1},\infty}$. Pelo Teorema 1.4.16, concluímos que $z\in\operatorname{mon}\mathscr{P}_m(c_0)$, ou seja, $\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}}|c_\alpha(P)z^\alpha|<\infty$, para todo $P\in\mathscr{P}_m(c_0)$. Portanto

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{|\alpha|=m\\\operatorname{supp}(\alpha)\subset\Theta}}|c_\alpha(P)|\frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{\frac{1}{(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon)(1+\varepsilon)}}} &= \sum_{\substack{|\alpha|=m\\\operatorname{supp}(\alpha)\subset\Theta}}|c_\alpha(P)|\frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{\frac{m-1}{2m}-\delta}}\\ &\le \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}}|c_\alpha(P)|\frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{\frac{m-1}{2m}-\delta}} = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}}|c_\alpha(P)z^\alpha|<\infty,\end{aligned}$$

para todo $P\in\mathscr{P}_m(c_0)$. Isso mostra o desejado.

Uma primeira consequência do Lema 2.2.6 é o seguinte resultado.

Lema 2.2.9. *Para todo subconjunto infinito $\Theta\subset\mathbb{N}$ contendo uma progressão aritmética infinita e todos naturais $m\ge 2$, existe uma série de Dirichlet $D\in\mathscr{H}_\infty^m\cap\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ satisfazendo $\|D\|\le 1/2$ e $\lim\limits_{N\to\infty}A_N(D,\delta)=\infty$ para cada $\delta<\delta_m$, onde $\delta_m=(m-1)/2m$.*

Demonstração. Sejam $m\ge 2$ fixados e seja $\varepsilon>0$ arbitrário. Definamos os seguintes números

$$\delta_m=\frac{m-1}{2m} \ \text{ e } \ \delta(\varepsilon,m)=\frac{1}{(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon)(1+\varepsilon)}.$$

Pelo Lema 2.2.6 existe um polinômio m-homogêneo $P\in\mathscr{P}_m(c_0)$ tal que $c_\alpha(P)=0$ se $\operatorname{supp}(\alpha)\not\subset\Theta$ e

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\\|\alpha|=m}}|c_\alpha(P)|\frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{\delta(\varepsilon,m)}}=\infty.$$

Logo, para este polinômio P, existe pelo Teorema 1.4.11 uma série de Dirichlet $D_1(s)=\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}\in\mathscr{H}_\infty^m$ satisfazendo $a_n=c_\alpha(P)$, onde $n=\mathfrak{p}^\alpha$. Sabendo que $c_\alpha(P)=0$ se $\operatorname{supp}(\alpha)\not\subset\Theta$, podemos usar a mesma justificativa de (2.7) e concluir que $a_n=0$ se $\mathfrak{p}_i|n$ para algum $i\notin\Theta$. Lembre que $\mathscr{H}_\infty^m\subset\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$. Logo, concluímos que $D_1\in\mathscr{H}_\infty^m\cap\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$.

Agora, veja que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\delta(\varepsilon,m)}} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{(\mathfrak{p}^{\alpha})^{\delta(\varepsilon,m)}} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} |c_\alpha(P)| \frac{1}{(\mathfrak{p}^{\alpha})^{\delta(\varepsilon,m)}} = \infty,$$

o que implica $\delta(\varepsilon, m) < \sigma_a(D_1)$. Note que $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrário. Daí,

$$\delta_m = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon, m) \leq \sigma_a(D_1).$$

Segue do Teorema 1.5.8 que $\sigma_a(D_1) = \delta_m$ e, como $\delta_m > \delta$, obtemos $\lim\limits_{N\to\infty} A_N(D_1, \delta) = \infty$. Logo, definindo $D := \dfrac{D_1}{2\|D_1\|}$, concluímos que

$$\|D\| \leq \frac{1}{2}, \;\; D \in \mathscr{H}_\infty^m \cap \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \;\text{ e }\; \lim_{N\to\infty} A_N(D, \delta) = \infty,$$

para cada $\delta < \delta_m$. Isso encerra a demonstração do lema. ∎

Definição 2.2.10. Seja $\Theta \subset \mathbb{N}$ não vazio. Diremos que uma série de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathscr{H}_2$ está *suportada* em Θ quando $a_n \neq 0$ somente se $n \in \Theta$.

Lema 2.2.11. *Sejam Θ_1 e Θ_2 subconjuntos disjuntos dos naturais e $D_1, D_2 \in \mathscr{H}_2$. Se D_1 está suportada em Θ_1 e D_2 está suportada em Θ_2 então $\langle D_1, D_2 \rangle = 0$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno de $\mathscr{H}_2$.*

Demonstração. Sejam

$$D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \text{ e } D_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}.$$

Como os conjuntos Θ_1 e Θ_2 são disjuntos, segue que para $a_n \neq 0$ tem-se $b_n = 0$, e para $b_n \neq 0$ tem-se $a_n = 0$. Logo,

$$\langle D_1, D_2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n = 0.$$

Isso mostra o desejado. ∎

2.3 Espaçabilidade do conjunto das séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal

Nesta seção apresentaremos os principais resultados concernentes à espaçabilidade do conjunto $\mathscr{M}$. Em particular, respondemos parcialmente a pergunta (I).

Teorema 2.3.1. *O conjunto $\mathscr{M}$ é maximal espaçável em $\mathscr{H}_\infty$. Mais precisamente, existe uma cópia isométrica de ℓ_1 em $\mathscr{H}_\infty$ que está contida $\mathscr{M} \cup \{0\}$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.10.5, podemos fixar uma família (disjunta) $\{\Theta_{k,m} : k, m \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ formada por progressões aritméticas infinitas. Segue do Lema 2.2.6 que para $k, m \in \mathbb{N}$ com $m \geq 2$, existe um polinômio m-homogêneo e contínuo $P_{k,m} \in \mathscr{P}_m(c_0)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} |c_\alpha(P_{k,m})| \frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{\frac{1}{(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon)(1+\varepsilon)}}} = \infty \tag{2.17}$$

e $c_\alpha(P_{k,m}) = 0$ se $\operatorname{supp}(\alpha) \not\subset \Theta_{k,m}$. Seja $T : \ell_1 \longrightarrow \mathcal{A}_u(B_{c_0})$ a transformação linear definida por

$$T\left((\lambda_k)_{k=1}^\infty\right) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \sum_{m=2}^\infty \frac{1}{2^{m-1}} \frac{P_{k,m}}{\|P_{k,m}\|}. \tag{2.18}$$

Note que T está bem definida. Mostraremos a seguir que T é uma isometria sobre sua imagem. De fato, dada uma sequência $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$, temos

$$\|T((\lambda_k)_{k=1}^\infty)\| = \left\| \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \sum_{m=2}^\infty \frac{1}{2^{m-1}} \frac{P_{k,m}}{\|P_{k,m}\|} \right\| \leq \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|. \tag{2.19}$$

Para obter a outra desigualdade, sejam $N, M \in \mathbb{N}$. Para este caso, precisaremos de uma sequência $(z_{k,m}^l)_{l=1}^\infty \subset B_{c_0}$ satisfazendo

$$\operatorname{supp}(z_{k,m}^l) \subset \Theta_{k,m}, \quad l \in \mathbb{N}, \ \text{ e } \lim_{l\to\infty} P_{k,m}(z_{k,m}^l) = \|P_{k,m}\|_\infty e^{-i\theta_k}, \tag{2.20}$$

para cada $k = 1, \ldots, N$ e cada $m = 2, \ldots, M$. Dito isso, suponha $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\theta_k}$, $0 \leq \theta_k < 2\pi$. Como $P_{k,m}$ é suportado em $\Theta_{k,m}$, então para cada $k = 1, 2, \ldots, N$ e cada $m = 2, 3, \ldots, M$, podemos escolher sequências $(x_{k,m}^l)_{l=1}^\infty \subset B_{c_0}$ tal que

$$\lim_{l\to\infty} \left|P_{k,m}\left(x_{k,m}^l\right)\right| = \|P_{k,m}\| \ \text{ e } \operatorname{supp}(x_{k,m}^l) \subset \Theta_{k,m}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Donde fazendo $z_{k,m}^l := x_{k,m}^l \cdot e^{i\frac{\theta_k}{m}}$ para todos $k, l, m \in \mathbb{N}$ com $m \geq 2$, obtemos que a sequência $(z_{k,m}^l)_{l=1}^\infty$ satisfaz (2.20).

Pelo Teorema 1.3.10, temos

$$P_{k,m}(z) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} \\ |\alpha|=m}} c_\alpha(P_{k,m}) z^\alpha = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \operatorname{supp}(\alpha)\subset\Theta_{k,m}}} c_\alpha(P_{k,m}) z^\alpha \tag{2.22}$$

para todo $z \in B_{c_{00}}$. Logo, definindo $z_l := \sum_{k=1}^N \sum_{m=2}^M z_{k,m}^l \in B_{c_0}$ para cada $l \in \mathbb{N}$, segue de (2.20), (2.22) e pelo fato de $\Theta_{k,m}$'s terem suporte disjuntos que

$$P_{k,m}(z_l) = P_{k,m}(z_{k,m}^l) \ \text{ para todos } \ k, l, m. \tag{2.23}$$

Assim, obtemos de (2.20) e (2.23) que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{P_{k,m}}{\|P_{k,m}\|}\right\| &\geq \left|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{P_{k,m}(z_l)}{\|P_{k,m}\|}\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\sum_{m=2}^{M}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{P_{k,m}(z^l_{k,m})}{\|P_{k,m}\|}\right| \\ &\xrightarrow{l\to\infty} \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|\left(1-\frac{1}{2^{M-1}}\right).\end{aligned}$$

Como M foi escolhido arbitrário, segue que

$$\|T\left((\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\right)\| \geq \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|\left(1-\frac{1}{2^{M-1}}\right) \xrightarrow{M\to\infty} \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|.$$

De modo semelhante, N também foi escolhido arbitrário, o que implica $\|T\left((\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\right)\| \geq \|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\|$. Em posse também da desigualdade em (2.19), concluímos que

$$\|T\left((\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\right)\| = \|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\|$$

para toda sequência $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$. Isso mostra que T é uma isometria sobre sua imagem.

Ora, visto que T é uma isometria sobre a sua imagem, segue do Teorema 1.4.15 que a composta $\mathfrak{B}\circ T : \ell_1 \longrightarrow \mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ também é uma isometria sobre a sua imagem. Posto isso, para encerrar a demonstração, vejamos que $\sigma_a((\mathfrak{B}\circ T)\left((\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\right)) = 1/2$ para cada $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1 \setminus \{0\}$. Com efeito, sejam $\varepsilon > 0$ e $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1 \setminus \{0\}$. Escolhemos $k_0 \in \mathbb{N}$ com $\lambda_{k_0} \neq 0$ e escrevemos

$$(\mathfrak{B}\circ T)\left((\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Pelo Teorema 1.3.10, temos

$$T\left((\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\right)(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{1}{\|P_{k,m}\|}\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \mathrm{supp}(\alpha)\subset\Theta_{k,m}}} c_\alpha(P_{k,m})z^\alpha$$

para cada $z \in c_{00}$. Os polinômios $P_{k,m}$ têm suportes mutualmente disjuntos. Daí, pelo Teorema 1.4.9 obtemos que

$$a_n = |\lambda_k|2^{1-m}\frac{|c_\alpha(P_{k,m})|}{\|P_{k,m}\|}, \;\; n = \mathfrak{p}^\alpha, \;\; |\alpha| = m, \;\; \mathrm{supp}(\alpha) \subset \Theta_{k,m}.$$

Logo de (2.17), para todo $m \geq 2$ e todo $\varepsilon > 0$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{n^{\frac{1}{(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon)(1+\varepsilon)}}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{\substack{|\alpha|=\ell \\ \text{supp}(\alpha)\subset\Theta_{k,\ell}}} |\lambda_k| 2^{1-\ell} \frac{|c_\alpha(P_{k,\ell})|}{\|P_{k,\ell}\|_\infty} \frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{\frac{1}{(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon)(1+\varepsilon)}}}$$

$$\geq \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \text{supp}(\alpha)\subset\Theta_{k_0,m}}} |\lambda_{k_0}| 2^{1-m} \frac{|c_\alpha(P_{k_0,m})|}{\|P_{k_0,m}\|_\infty} \frac{1}{(\mathfrak{p}^\alpha)^{\frac{1}{(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon)(1+\varepsilon)}}} = \infty.$$

Isso mostra que

$$\sigma_a((\mathfrak{B}\circ T)\left((\lambda_k)_{k=1}^\infty\right)) > \frac{1}{(\frac{2m}{m-1}+\varepsilon)(1+\varepsilon)},$$

e como $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ são arbitrários, isso demonstra que $\sigma_a((\mathfrak{B}\circ T)\left((\lambda_k)_{k=1}^\infty\right)) \geq 1/2$. Note que $\mathscr{M}$ é espaçável maximal, pois $\mathscr{M}$ é $\mathfrak{c}$-espaçável (contém uma cópia isométrica de ℓ_1 a menos da sequência nula), e de acordo com a Observação 1.8.2 temos $dim(\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)) = \mathfrak{c}$. Portanto o teorema está demonstrado. ■

Teorema 2.3.2. *Para cada $m \geq 2$, o conjunto*

$$\mathscr{M}_m := \left\{ D \in \mathscr{H}_\infty^m \, : \sigma_a(D) = \frac{m-1}{2m} \right\}$$

contém (a menos da função nula) uma cópia isométrica de ℓ_1. Em particular, é espaçável maximal.

Demonstração. De fato, considerando as mesmas notações usadas na demonstração do teorema anterior, para cada $m \geq 2$ fixado, definamos a transformação linear $T : \ell_1 \longrightarrow \mathscr{P}_m(c_0)$ por

$$T\left((\lambda_k)_{k=1}^\infty\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{P_{k,m}}{\|P_{k,m}\|}.$$

Note que T está bem definida e que $\|T\left((\lambda_k)_{k=1}^\infty\right)\| \leq \|(\lambda_k)_{k=1}^\infty\|$. Para a desigualdade contrária podemos considerar a mesma sequência $(z_{k,m}^l)_{l=1}^\infty \subset B_{c_0}$ satisfazendo (2.20), e para cada $l \in \mathbb{N}$ a sequência $z_l = \sum_{k=1}^N z_{k,m}^l$. Daí, obteremos de modo similar ao Teorema 2.3.1 que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{P_{k,m}}{\|P_{k,m}\|} \right\| \geq \left| \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \frac{P_{k,m}(z_{k,m}^l)}{\|P_{k,m}\|} \right| \xrightarrow{l\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|.$$

Isso mostra que $\|T\left((\lambda_k)_{k=1}^\infty\right)\| \geq \|(\lambda_k)_{k=1}^\infty\|$. Logo, T é uma isometria. De modo similar ao realizado na demonstração do Teorema 2.3.1, obtemos que $\mathfrak{B}\circ T : \ell_1 \longrightarrow \mathscr{H}_\infty^m$ é uma isometria e para toda sequência $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1 \setminus \{0\}$ tem-se $\sigma_a((\mathfrak{B}\circ T)\left((\lambda_k)_{k=1}^\infty\right)) = \frac{m-1}{2m}$. Em resumo, para cada $m \geq 2$ o conjunto das séries de Dirichlet m-homogêneas $D \in \mathscr{H}_\infty^m$ tais que $\sigma_a(D) = \frac{m-1}{2m}$ contém uma cópia isométrica de ℓ_1 (a menos da sequência nula). Em particular, $\mathscr{M}_m$ é espaçável maximal. ■

Também temos a espaçabilidade de $\mathscr{M}$ como subconjunto de $\mathscr{H}_2$. Note que a espaçabilidade de $\mathscr{M}$ como subconjunto de $\mathscr{H}_2$ não é uma consequência do Teorema 2.3.1. De fato, $\mathscr{H}_2$ é reflexivo por ser espaço de Hilbert, e como ℓ_1 não é reflexivo, não pode existir uma cópia de ℓ_1 em $\mathscr{H}_2$ (caso contrário ℓ_1 seria reflexivo). Dito isso, nosso resultado para $\mathscr{H}_2$ é o seguinte.

Teorema 2.3.3. *O conjunto $\mathscr{M}$ é maximal espaçável em $\mathscr{H}_2$. Mais precisamente, existe uma cópia isométrica de ℓ_2 em $\mathscr{H}_2$ que está contida $\mathscr{M} \cup \{0\}$.*

Demonstração. Seja $\{\Theta_{k,m} : k, m \in \mathbb{N}\}$ uma família (de subconjuntos disjuntos aos pares) de $\mathbb{N}$ formada por progressão aritméticas infinitas. Segue do Lema 2.2.9 que para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $m \geq 3$ existem séries de Dirichlet $D_{k,m} \in \mathscr{H}_\infty^m \cap \mathscr{A}_{\Theta_{k,m}}(\mathbb{C}_0)$ satisfazendo

$$\sigma_a(D_{k,m}) = \frac{m-1}{2m}.$$

Lembre que $\mathscr{H}_\infty^m \cap \mathscr{A}_{\Theta_{k,m}}(\mathbb{C}_0) \subset \mathscr{H}_2$, logo normalizando em $\mathscr{H}_2$ essas série de Dirichlet $D_{k,m}$'s podemos supor que

$$D_{k,m} \in \mathscr{H}_2, \ \ \|D_{k,m}\|_{\mathscr{H}_2} = 1 \ \text{ e } \ \sigma_a(D_{k,m}) = \frac{m-1}{2m},$$

para todos $k \in \mathbb{N}$ e $m \geq 3$.

Definamos a aplicação linear $T : \ell_2 \longrightarrow \mathscr{H}_2$ por

$$T\left((\lambda_k)_{k=1}^\infty\right) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \sum_{m=3}^\infty \frac{D_{k,m}}{2^{(m-2)/2}}.$$

Note que T está bem definida. Além disso, segue do Lema 2.2.11 que o conjunto

$$\{D_{k,m} : k \in \mathbb{N}, m \geq 3\} \ \text{ é ortonormal em } \ \mathscr{H}_2 \tag{2.24}$$

(lembre que $\Theta_{k,m}s$ são pares disjuntos). Logo, dada uma sequência $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$, obtemos das propriedades de produto interno e de (2.24) que

$$\begin{aligned}
\left\| T\left((\lambda_k)_{k=1}^\infty\right) \right\|_{\mathscr{H}_2}^2 &= \left\| \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \sum_{m=3}^\infty \frac{D_{k,m}}{2^{\frac{m-2}{2}}} \right\|_{\mathscr{H}_2}^2 \\
&= \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^2 \sum_{m=3}^\infty \frac{1}{2^{m-2}} \|D_{k,m}\|_{\mathscr{H}_2}^2 \\
&= \|(\lambda_k)_k\|_{\ell_2}^2.
\end{aligned}$$

Isso mostra que T é uma isometria sobre a sua imagem.

Para completar a demonstração, vejamos que $T(\ell_2)\backslash\{0\} \subset \mathscr{M}$. Para isso, seja $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2 \setminus \{0\}$. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{k_0} \neq 0$. Com isso, segue de (2.3) e da definição de T que para cada $m \geq 3$ tem-se

$$\sigma_a\left(T((\lambda_k)_{k=1}^{\infty})\right) \geq \sigma_a(D_{k_0,m}) = \frac{m-1}{2m} \xrightarrow{m\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Logo, segue de (1.12) que $\sigma_a\left(T((\lambda_k)_{k=1}^{\infty})\right) = 1/2$, o que mostra o desejado. Isto completa a demonstração do teorema. ■

Os dois últimos teoremas asseguram a existência de estrutura linear e topologicamente relevante no conjunto $\mathscr{M} \cup \{0\}$, o que responde parcialmente a pergunta (I). Para respondermos por completo essa questão, a próxima seção assenta o caminho para isso.

2.4 Os conjuntos $\mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m)$

Nesta seção apresentaremos alguns resultados técnicos necessários para responder a segunda parte da pergunta (I) feita na Seção 2.1. Para isso, precisamos fixar algumas notações e definições.

Relembremos da Seção 1.10 que, para todos $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \in \mathbb{C}^k$ e $D \in \mathfrak{D}$, escrevemos

$$D_\lambda = \lambda_1 D + \lambda_2 D^2 + \cdots + \lambda_k D^k.$$

Também, para todo $\Theta \subset \mathbb{N}$ e todos números naturais j,k,ℓ e $m \geq 2$, definimos $\delta_m = \frac{m-1}{2m}$ e

$$\mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m) = \{D \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) : \text{para todo } \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \in \mathbb{C}^k \text{ satisfazendo } \|\lambda\|_\infty \leq j$$
$$\text{e } \; |\lambda_k| \geq j^{-1}, \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } A_N(D_\lambda,\delta_m) > \ell\}.$$

A definição dos conjuntos $\mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m)$ foi inspirada nos conjuntos definidos na demonstração de [24, Theorem 5]. Como lá, mostremos nesta seção que os conjuntos $\mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m)$ são abertos e densos em $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$. Isso será demonstrado nos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 abaixo.

Lema 2.4.1. *O conjunto $\mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m)$ é aberto em $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$.*

Demonstração. Sejam $j,k,\ell \in \mathbb{N}$ e $m \geq 2$ fixados. Mostraremos que o complementar

$$\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \setminus \mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m) = \{D \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) : \text{existe } \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \in \mathbb{C}^k$$
$$\text{satisfazendo } \|\lambda\|_\infty \leq j, \;\; |\lambda_k| \geq j^{-1}$$
$$\text{e } \sup_N A_N(D_\lambda,\delta_m) \leq \ell\}$$

é fechado em $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$. Seja $(D_q)_{q=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \setminus \mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m)$ convergindo para D_0 em $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$. Visto que para cada $q \in \mathbb{N}$ tem-se $D_q \notin \mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m)$, segue que existe uma sequência $(\lambda_q)_{q=1}^{\infty} = (\lambda_{q,1},\ldots,\lambda_{q,k})_{q=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^k$ satisfazendo

$$\|\lambda_q\|_\infty \leq j, \quad |\lambda_{q,k}| \geq j^{-1} \text{ e } \sup_{N\in\mathbb{N}} A_N((D_q)_{\lambda_q},\delta_m) \leq \ell. \tag{2.25}$$

Como a sequência $(\lambda_q)_{q=1}^{\infty}$ é limitada em $\mathbb{C}^k$, passando para uma subsequência se necessário, podemos supor que existe $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$ tal que $\lim_{q\to\infty} \lambda_q = \lambda$. Logo, fazendo $q \to \infty$ nos dois primeiros termos de (2.25), obtemos

$$\|\lambda\|_\infty \leq j \;\text{ e }\; |\lambda_k| \geq j^{-1}. \tag{2.26}$$

Segue do Lema 1.10.2 que a sequência $\left((D_q)_{\lambda_q}\right)_{q=1}^{\infty}$ converge para D_λ em $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$. Além disso, pelo Lema 2.2.4 as aplicações

$$(D,\gamma) \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \times \mathbb{C}^k \mapsto D_\gamma \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \;\text{ e }\; D \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \mapsto A_N(D,\delta_m) \in \mathbb{C}$$

são contínuas. Visto que de (2.25) tem-se $A_N((D_q)_{\lambda_q}, \delta_m) \leq \ell$ para todos $N, q \in \mathbb{N}$, fazendo $q \to \infty$ obtemos $A_N((D_0)_\lambda, \delta_m) \leq \ell$ sempre que $N \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} A_N((D_0)_\lambda, \delta_m) \leq \ell. \tag{2.27}$$

Concluímos de (2.26) e (2.27) que $D_0 \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \setminus \mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m)$ e portanto $\mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m)$ é um subconjunto aberto em $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$. ■

Lema 2.4.2. *Se Θ contém uma progressão aritmética infinita, então o conjunto $\mathscr{D}_\Theta(j,k,\ell,m)$ é denso em $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$.*

Demonstração. Sejam j, k, ℓ e $m \geq 2$ números naturais fixados. Sejam $\varepsilon > 0$ e

$$D_1(s) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{\Omega(n)=i} a_n n^{-s} \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$$

um polinômio de Dirichlet. Note que $a_n = 0$ se $\mathfrak{p}_i | n$ para algum $i \notin \Theta$. Pelo Lema 2.2.9, existe uma série de Dirichlet $D_2 \in \mathscr{H}_\infty^{m+r} \cap \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ satisfazendo

$$\|D_2\| \leq \frac{1}{2} \;\text{ e }\; \lim_{N\to\infty} A_N(D_2,\delta_m) = \infty. \tag{2.28}$$

E pela fórmula Binomial de Newton, temos

$$\left(1 + \frac{D_2}{k}\right)^k = 1 + D_2 + D_3 \;\text{ com }\; D_3 := \sum_{\ell=2}^{k} \binom{k}{\ell} k^{-\ell} D_2^\ell. \tag{2.29}$$

Segue da Proposição 1.10.1 que $\min(\widetilde{\Omega}(D_3)) > m + r$ se $k \geq 2$ e $D_3 = 0$ caso contrário.

Inicialmente, mostraremos o lema supondo $k \geq 2$. Dito isso, seja

$$w := \max_{0\leq i\leq k-1} \{(k-2)(m+r), rk + mi\} + 1. \tag{2.30}$$

Definamos o polinômio de Dirichlet $D : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}$ por

$$D(s) = D_1(s) + (2^w)^{-s} D_4(s) \ \text{ com } \ D_4(s) := \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{D_2(s)}{k}\right). \tag{2.31}$$

Note que

$$\begin{aligned} \|D - D_1\| &= \left\|(2^w)^{-s} D_4(s)\right\| \\ &\leq \left\|\frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{D_2(s)}{k}\right)\right\| \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\|D - D_1\| < \varepsilon$. Agora, veremos que $D \in \mathscr{D}_\Theta(j, k, \ell, m)$. Para isso, seja $1 \leq q < k$. Note que

$$\begin{aligned} \max(\widetilde{\Omega}(D^q)) &= \max(\widetilde{\Omega}([D_1 + (2^w)^{-s} D_4]^q)) \\ &= \max(\widetilde{\Omega}(2^{-wqs} D_2^q)) && \text{(pela Proposição 1.10.1)} \\ &= wq + q(m+r) && \text{(pela Proposição 1.10.1)} \\ &\leq w(k-1) + (k-1)(m+r) \\ &\leq w(k-1) + (k-2)(m+r) + (m+r) \\ &\leq w(k-1) + w - 1 + m + r && \text{(de (2.30))} \\ &= wk - 1 + m + r \\ &< wk + m + r. && (2.32) \end{aligned}$$

Além disso, para cada $i = 1, \ldots, k-1$, temos que

$$\begin{aligned} \max\left(\widetilde{\Omega}\left(D_1^{k-i}\left((2^w)^{-s} D_4\right)^i\right)\right) &= r(k-i) + wi + (m+r)i && \text{(pela Proposição 1.10.1)} \\ &= rk + mi + wi \\ &\leq w - 1 + wi && \text{(de (2.30))} \\ &= w(i+1) - 1 \\ &\leq wk - 1 < wk. && (2.33) \end{aligned}$$

Então, segue da Proposição 1.10.1, (2.32) e (2.33) que

$$\max\left(\widetilde{\Omega}\left(\sum_{q=1}^{k-1} \lambda_q D^q\right)\right) < wk + m + r, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{C}, \tag{2.34}$$

$$\max\left(\widetilde{\Omega}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} D_1^{k-i}\left((2^w)^{-s} D_4\right)^i\right)\right) \leq kw, \tag{2.35}$$

e

$$\max\left(\widetilde{\Omega}\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k (2^{wk})^{-s} D_3\right)\right) > wk + m + r. \tag{2.36}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
D^k &= \left(D_1 + (2^w)^{-s} D_4\right)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D_1^{k-i} \left((2^w)^{-s} D_4\right)^i \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} D_1^{k-i} \left((2^w)^{-s} D_4\right)^i + \left((2^w)^{-s} D_4\right)^k \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} D_1^{k-i} \left((2^w)^{-s} D_4\right)^i + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k (2^{wk})^{-s} \left(1 + \frac{D_2}{k}\right)^k && \text{(de (2.31))} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} D_1^{k-i} \left((2^w)^{-s} D_4\right)^i + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k (2^{wk})^{-s} (1 + D_2 + D_3) && \text{(de (2.29))} \\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} D_1^{k-i} \left((2^w)^{-s} D_4\right)^i}_{\max(\widetilde{\Omega})<wk\ (por\ (2.35))} + \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k (2^{wk})^{-s}}_{pertence\ a\ \mathfrak{D}_{wk}} + \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k (2^{wk})^{-s} D_2}_{pertence\ a\ \mathfrak{D}_{wk+m+r}} \\
&\qquad + \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k (2^{wk})^{-s} D_3}_{\min(\widetilde{\Omega})>wk+m+r(por\ (2.36))} . && (2.37)
\end{aligned}$$

Finalmente, para cada $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ em $\mathbb{C}^k$ satisfazendo

$$\|\lambda\|_\infty \leq j \ \text{ e } \ |\lambda_k| \geq j^{-1},$$

obtemos por (2.28), (2.34) e (2.37) que

$$A_N(D_\lambda, \delta_m) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k 2^{-wk\delta_m} |\lambda_k| A_N(D_2, \delta_m) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k 2^{-wk\delta_m} j^{-1} A_N(D_2, \delta_m) \xrightarrow{N\to\infty} \infty.$$

Isso mostra que $D \in \mathscr{D}_\Theta(j, k, \ell, m)$, o que encerra a demonstração se $k \geq 2$.

Para $k = 1$ podemos escolher $w > r$ e definir o polinômio de Dirichlet $D : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$D(s) = D_1 + \varepsilon \cdot (2^w)^{-s} D_2.$$

Logo,

$$\|D - D_1\| = \|\varepsilon \cdot (2^w)^{-s} D_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Além disso, pela Proposição 1.10.1, temos

$$\min\left(\widetilde{\Omega}\left((2^w)^{-s} D_2\right)\right) \geq w > r \geq \max\left(\widetilde{\Omega}\left(D_1\right)\right), \tag{2.38}$$

ou seja,

$$D(s) = \underbrace{D_1}_{\max\widetilde{\Omega}<w(por\ 2.38)} + \underbrace{\varepsilon \cdot (2^w)^{-s} D_2}_{\max\widetilde{\Omega}\geq w(por\ 2.38)} . \tag{2.39}$$

Então, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazendo $j^{-1} \leq |\lambda| \leq j$ temos de (2.28) e (2.39) que

$$A_N(D_\lambda, \delta_m) \geq |\lambda|\varepsilon 2^{-w\delta_m} A_N(D_2, \delta_m) \geq \varepsilon 2^{-w\delta_m} j^{-1} A_N(D_2, \delta_m) \xrightarrow{N\to\infty} \infty.$$

Isso mostra o caso $k = 1$. Portanto a demonstração do lema está completa. ■

2.5 Algebrabilidade do conjunto das séries de Dirichlet com faixa de Bohr maximal

A seção anterior assenta o caminho para podermos mostrar a existência de estruturas algébricas no conjunto $\mathscr{M} \cup \{0\}$. Também mostraremos que $\mathscr{M}$ contém um conjunto G_δ-denso.

Proposição 2.5.1. *Para todo subconjunto $\Theta \subset \mathbb{N}$ contendo uma progressão aritmética infinita, existe um conjunto $\mathscr{D}_\Theta \subset \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \setminus \{0\}$ satisfazendo:*

(a) *O conjunto $\mathscr{D}_\Theta$ é G_δ-denso em $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$.*

(b) *Para toda série de Dirichlet $D \in \mathscr{D}_\Theta$ tem-se $\mathcal{A}(\{D\}) \subset (\mathscr{M} \cap \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)) \cup \{0\}$. Em particular, $\mathscr{D}_\Theta \subset \mathscr{M}$.*

Demonstração. (a) Consideramos o conjunto

$$\mathscr{D}_\Theta = \bigcap_{j\geq 1} \bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{\ell\geq 1} \bigcap_{m\geq 2} \mathscr{D}_\Theta(j, k, \ell, m). \tag{2.40}$$

Claro que $\mathscr{D}_\Theta \subset \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$. Além disso, segue do Teorema 1.10.14 e dos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 que o conjunto $\mathscr{D}_\Theta$ é G_δ-denso.

(b) Seja $D \in \mathscr{D}_\Theta$ e seja $\mathcal{A}(\{D\})$ a subálgebra de $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ gerada por D. Sabemos que $\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ é algebricamente fechada, o que implica $\mathcal{A}(\{D\}) \subset \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ pois $D \in \mathscr{D}_\Theta \subset \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$. Agora, mostraremos que $\mathcal{A}(\{D\}) \subset \mathscr{M} \cup \{0\}$. Com efeito, seja $\widetilde{D} \in \mathcal{A}(\{D\}) \setminus \{0\}$. Logo $\widetilde{D}$ pode ser escrita da forma

$$\widetilde{D} = D_\lambda = \sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i D^i \ \text{ com } \ k_0 \in \mathbb{N}, \ \ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_0}) \in \mathbb{C}^{k_0} \text{ e } \lambda_{k_0} \neq 0.$$

Seja $j_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\|\lambda\|_\infty \leq j_0$ e $|\lambda_{k_0}| \geq j_0^{-1}$. Como $D \in \mathscr{D}_\Theta$, segue de (2.40) que

$$D \in \bigcap_{\ell\geq 1} \bigcap_{m\geq 2} \mathscr{D}_\Theta(j_0, k_0, \ell, m). \tag{2.41}$$

Logo, segue de (2.41) que para todos $\ell, m \in \mathbb{N}$ com $m \geq 2$, existem $N_{\ell,m} \in \mathbb{N}$ tais que $A_{N_{\ell,m}}(D_\lambda, \delta_m) > \ell$. Então para cada $m \geq 2$ fixado, temos $\lim\limits_{\ell\to\infty} A_{N_{\ell,m}}(D_\lambda, \delta_m) = \infty$, o que implica $\sigma_a(D_\lambda) \geq \delta_m$ para cada $m \geq 2$. Assim,

$$\sigma_a(\widetilde{D}) = \sigma_a(D_\lambda) \geq \delta_m \xrightarrow{m\to\infty} 1/2.$$

Visto que $\widetilde{D}$ é qualquer elemento de $\mathcal{A}(\{D\})$, concluímos que $\mathcal{A}(\{D\}) \subset \mathscr{M} \cup \{0\}$. Isso encerra a demonstração. ■

Quando Θ contém uma progressão aritmética infinita, obtemos como consequência da proposição anterior que

$$S = \sup_{D\in\mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C})} \sigma_a(D) = 1/2.$$

O próximo lema será usado na demonstração do principal teorema desta seção.

Lema 2.5.2. *Seja $D \in \mathscr{A}_\Theta(\mathbb{C}_0) \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{A}(\{D\}) \subset \mathscr{M} \cup \{0\}$. Então,*

$$\lambda_0 D_0 + \lambda_1 D_1 D + \lambda_2 D_2 D^2 + \cdots + \lambda_N D_N D^N \in \mathscr{M} \tag{2.42}$$

para todas $D_0, D_1, \ldots, D_N \in \mathscr{A}_{\mathbb{N}\setminus\Theta}(\mathbb{C}_0)$ e quaisquer $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ com $\lambda_N D_N \neq 0$.

Demonstração. Definamos

$$D_m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} n^{-s}\,; \quad S_M(D_m, s) = \sum_{n=1}^{M} a_{m,n} n^{-s}\,;$$
$$D^m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{m,n} n^{-s}\,; \quad T_M(D_m, s) = D_m(s) - S_M(D_m, s),$$

para todos $m = 0, 1, \ldots, N$ e $M \in \mathbb{N}$. Além disso, como $D_N \neq 0$, existe

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_{N,n} \neq 0\} \in \mathbb{N}.$$

Pelo fato de $D_N \in \mathscr{A}_{\mathbb{N}\setminus\Theta}(\mathbb{C}_0)$, segue que $\mathfrak{p}_i \nmid n_0$ para todo $i \in \Theta$. Com estas notações, temos

$$D_m = S_{n_0-1}(D_m, \cdot) + T_{n_0}(D_m, \cdot) + a_{m,n_0} n_0^{-s}$$

para cada $m = 0, 1, \ldots, N$, o que implica que a soma em (2.42) pode ser escrita da forma

$$\sum_{m=0}^{N} \lambda_m D_m D^m = \widetilde{D} + \sum_{m=0}^{N} \lambda_m a_{m,n_0} n_0^{-s} D^m,$$

onde

$$\widetilde{D} = \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m S_{n_0-1}(D_m, \cdot) D^m + \sum_{m=0}^{N} \lambda_m T_{n_0}(D_m, \cdot) D^m.$$

Seja

$$\widehat{D} = n_0^{-s} \sum_{m=0}^{N} \lambda_m a_{m,n_0} D^m.$$

Vejamos que $\widehat{D} \in \mathscr{M}$. Note que $\widehat{D}$ é uma série não nula, pois $\lambda_N \neq 0$ e n_0^{-s} é um polinômio não constante ($a_{N,n_0} \neq 0$) e $D \neq 0$. Além disso, por hipótese tem-se que $\mathcal{A}(\{D\}) \setminus \{0\} \subset \mathscr{M}$. Logo, para cada $\sigma < 1/2$ obtemos

$$\lim_{\ell\to\infty} A_\ell \left(\sum_{m=0}^{N} \lambda_m a_{m,n_0} D^m, \sigma \right) = \infty,$$

o que implica

$$\begin{aligned} \lim_{\ell\to\infty} A_\ell(\widehat{D}, \sigma) &= \lim_{\ell\to\infty} \left[A_\ell \left(\left(n_0^{-\sigma} \sum_{m=0}^{N} \lambda_m a_{m,n_0} D^m \right), \sigma \right) \right] \\ &= n_0^{-\sigma} \lim_{\ell\to\infty} A_\ell \left(\sum_{m=0}^{N} \lambda_m a_{m,n_0} D^m, \sigma \right) = \infty. \end{aligned}$$

Então, segue de (2.1) que $\sigma_a(\widehat{D}) > \sigma$ para todo $\sigma < 1/2$. Fazendo $\sigma \to 1/2$ obtemos $\sigma_a(\widehat{D}) \geq 1/2$, e portanto $\sigma_a(\widehat{D}) = 1/2$. Isso mostra que $\widehat{D} \in \mathscr{M}$.

Para cada $m = 1, \ldots, N$ temos:

$$\begin{aligned} (T_{n_0}(D_m, \cdot) \cdot D^m)(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{uv=n \\ v>n_0}} b_{m,u} a_{m,v} \right) n^{-s}; \\ (S_{n_0-1}(D_m, \cdot) \cdot D^m)(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{uv=n \\ v<n_0}} b_{m,u} a_{m,v} \right) n^{-s}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Agora analisemos os suportes das séries de Dirichlet em (2.43). Em ambas as séries temos: v dependendo apenas de primos $\mathfrak{p}_i$ com $i \in \mathbb{N} \setminus \Theta$; u dependendo apenas de primos $\mathfrak{p}_i$ com $i \in \Theta$; $v \neq n_0$ e $n = uv$. Então, segue do Lema 1.10.9 que não existe $k \in \mathbb{N}$ dependendo apenas de primos $\mathfrak{p}_i$, com $i \in \Theta$, e satisfazendo $uv = n = kn_0$. Isso significa que os termos da forma $(n_0 k)^{-s}$ com $k \in \mathbb{N}$ dependendo apenas de primos $\mathfrak{p}_i$, com $i \in \Theta$, não aparecem na série de Dirichlet

$$\widetilde{D} = \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m S_{n_0-1}(D_m, \cdot) D^m + \sum_{m=0}^{N} \lambda_m T_{n_0}(D_m, \cdot) D^m.$$

Logo, segue de (2.3) que

$$\sigma_a \left(\sum_{m=0}^{N} \lambda_m D_m D^m \right) \geq \sigma_a \left(\sum_{m=1}^{N} \lambda_m a_{m,n_0} n_0^{-s} D^m \right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\sigma_a \left(\sum_{m=0}^{N} \lambda_m D_m D^m \right) = \frac{1}{2}.$$

Isso completa a demonstração. ■

Agora trataremos do principal resultado desta seção.

Teorema 2.5.3. *O conjunto $\mathscr{M}$ é fortemente $\aleph_0$-algebrável.*

Demonstração. Seja $\{\Theta_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma família (disjunta) de subconjuntos de $\mathbb{N}$ formada por progressões aritméticas infinitas. Segue da Proposição 2.5.1 que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $D_k \in \mathscr{A}_{\Theta_k}(\mathbb{C}_0) \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{A}(\{D_k\}) \subset \mathscr{M} \cup \{0\}$. Além disso, pelo Lema 2.2.5, o conjunto $G = \{D_k : k \in \mathbb{N}\}$ é algebricamente independente. Então, para completar a demonstração, é suficiente mostrar que $\mathcal{A}(G) \subset \mathscr{M} \cup \{0\}$. Com efeito, sejam $N \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N] \setminus \{0\}$ sem o termo constante. Podemos escrever Q da forma

$$Q(D_1, \ldots, D_N) = \sum_{m=0}^{M} L_m(D_1, \ldots, D_{N-1})\, D_N^m,$$

para certos $L_m \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_{N-1}]$, $m = 0, \ldots, M$, com $L_M \neq 0$. Podemos supor $M \geq 1$ (se não, podemos considerar um polinômio com menos variáveis). Note que $L_m(D_{k_1}, \ldots, D_{k_{N-1}}) \in \mathscr{A}_{\mathbb{N} \setminus \Theta_{k_N}}(\mathbb{C}_0)$ para cada m, pois as séries de Dirichlet $D_{k_1}, \ldots, D_{k_{N-1}}$ dependem de primos $\mathfrak{p}_i$ com $i \in \mathbb{N} \setminus \Theta_{k_N}$. Também, como $D_1, \ldots, D_{N-1}$ são algebricamente independentes, então $L_M(D_1, \ldots, D_{N-1}) \neq 0$. Segue do Lema 2.5.2 que $Q(D_1, \ldots, D_N) \in \mathscr{M}$, como desejado. ■

Como o leitor deve ter percebido, respondemos a pergunta (I) da Seção 2.1 afirmativamente.

2.6 Lineabilidade dos conjuntos $\mathscr{L}$ e $\mathscr{N}$

Note que até a Seção 2.5, procuramos estudar a existência de estruturas lineares e algébricas no conjunto $\mathscr{M}$. No entanto, também podemos questionar sobre a existência desses tipos de estruturas nos conjuntos

$$\mathscr{N} = \{D \in \mathscr{H}_\infty : \sigma_u(D) - \sigma_c(D) = 1\}$$

e

$$\mathscr{L} = \{D \in \mathscr{H}_\infty : \sigma_a(D) - \sigma_c(D) = 1\}.$$

É importante esclarecer que investigar a existência de estruturas lineares em conjuntos que a priori pode não ter estrutura linear alguma, está diretamente ligado ao quão difícil é obter um determinado objeto do conjunto em questão. A história mostrou que exibir elementos no conjunto $\mathscr{M}$ foi mais difícil do que nos conjuntos $\mathscr{N}$ e $\mathscr{L}$. Por isso, nossa pesquisa neste capítulo teve como objetivo principal estudar o conjunto $\mathscr{M}$. Apesar disso, aproveitamos essa seção para apresentar resultados de lineabilidade acerca dos conjuntos $\mathscr{N}$ e $\mathscr{L}$. Nesse sentido, o nosso primeiro resultado é o seguinte.

Teorema 2.6.1. *O conjunto*

$$\mathscr{N} = \{D \in \mathscr{H}_\infty : \sigma_u(D) - \sigma_c(D) = 1\}$$

é lineável em $\mathscr{H}_\infty$.

A demonstração do Teorema 2.6.1 necessita do seguinte Lema 2.6.2, antes de demonstra-lo, ressaltamos que para uma série de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathfrak{D}$ e $N \in \mathbb{N}$ denotamos $S_N(D, s) = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$.

Lema 2.6.2. *Seja $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência crescente de números naturais alternado entre pares e ímpares. Suponha que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathfrak{p}_{n_k}}$ seja divergente. Então a série $D_{1+\delta}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_k}}{\mathfrak{p}_{n_k}^{1+\delta}} \mathfrak{p}_{n_k}^{-s} \in \mathscr{H}_\infty$ para todo $\delta > 0$. Além disso, $\sigma_u(D_{1+\delta}) - \sigma_c(D_{1+\delta}) = 1$ com $\sigma_c(D_{1+\delta}) = -1 - \delta$ e $\sigma_u(D_{1+\delta}) = -\delta$.*

Demonstração. Vejamos que a série de Dirichlet $D(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n_k} \mathfrak{p}_{n_k}^{-s}$ satisfaz $\sigma_u(D) - \sigma_c(D) = 1$. De fato, seja $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > 0$. Considere $0 < \sigma < \operatorname{Re} s$. A série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n_k} \mathfrak{p}_{n_k}^{-\sigma}$ é alternada, logo pelo teorema de Leibniz é convergente. Como $\operatorname{Re} s > \sigma$ segue do Teorema 1.4.3 que a série de Dirichlet $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n_k} \mathfrak{p}_{n_k}^{-s}$ é converge. Visto que $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} s > 0$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $\sigma_c(D) \leq 0$. Por outro lado, dado $N \in \mathbb{N}$, a Proposição 1.10.3 assegura que existe uma sequência $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ de números reais tal que $\lim\limits_{j\to\infty} \mathfrak{p}_{n_\ell}^{it_j} = (-1)^{n_\ell}$ para cada $\ell = 1, \ldots, N$. Logo,

$$N = \lim_{j\to\infty} \left| \sum_{\ell=1}^{N} (-1)^{n_\ell} \mathfrak{p}_{n_\ell}^{-it_j} \right| \quad \leq \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{\ell=1}^{N} (-1)^{n_\ell} \mathfrak{p}_{n_\ell}^{-it} \right|.$$

Segue da Proposição 1.5.3 que

$$\begin{aligned} \sigma_u(D) &= \limsup_{N} \frac{\log\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\sum_{\ell=1}^{N} (-1)^{n_\ell} \mathfrak{p}_{n_\ell}^{-it}\right|\right)}{\log N} \\ &\geq \limsup_{N} \frac{\log N}{\log N} = 1. \end{aligned}$$

Como pela Proposição 1.5.5, temos $\sigma_u(D) - \sigma_c(D) \leq 1$, isso implica $\sigma_u(D) - \sigma_c(D) = 1$. Em particular, $\sigma_c(D) = 0$ e $\sigma_u(D) = 1$.

Sejam $\delta > 0$ e

$$D_{1+\delta}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_k}}{\mathfrak{p}_{n_k}^{1+\delta}} \mathfrak{p}_{n_k}^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Temos que $D_{1+\delta} \in \mathscr{H}_\infty$ por (1.11) ($\sigma_u(D) = 1$). Além disso, segue de (1.9) que

$$\sigma_u(D_{1+\delta}) - \sigma_c(D_{1+\delta}) = 1 \text{ com } \sigma_c(D_{1+\delta}) = -1 - \delta \text{ e } \sigma_u(D_{1+\delta}) = -\delta.$$

■

Demostração do Teorema 2.6.1. Seja $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_n)_{n=1}^\infty$ a sequência de números primos. É conhecido que a série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\mathfrak{p}_n}$ formada pelos inversos dos números primos é divergente. Logo, existem sequências crescentes de números pares $(N_k)_{k=1}^\infty$ e números ímpares $(M_k)_{k=1}^\infty$ satisfazendo

$$M_k < N_k < M_{k+1} \text{ e } \sum_{n=M_k}^{N_k} \frac{1}{\mathfrak{p}_n} > k \tag{2.44}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Defina $B^{(k)} := \{m \in \mathbb{N} : M_k \leq m \leq N_k\}$. Note que os conjuntos da sequência $(B^{(k)})_{k=1}^\infty$ são dois a dois disjuntos. Agora, seja $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma partição (disjunta) de $\mathbb{N}$ formada por subconjuntos infinitos. Escrevemos

$$A_k = \{q_{1,k} < q_{2,k} < \cdots\},$$

e definamos

$$\Theta_k = \bigcup_{m=1}^\infty B^{(q_{m,k})}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Digamos que

$$\Theta_k = \{n_{1,k} < n_{2,k} < \cdots\}.$$

Note que as séries

$$\sum_{\ell=1}^\infty \frac{1}{\mathfrak{p}_{n_{\ell,k}}} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{j=M_{q_{m,k}}}^{N_{q_{m,k}}} \frac{1}{\mathfrak{p}_j}$$

são divergentes por (2.44), e as séries

$$\sum_{\ell=1}^\infty (-1)^{n_{\ell,k}} \mathfrak{p}_{n_{\ell,k}}^{-s} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{j=M_{q_{m,k}}}^{N_{q_{m,k}}} (-1)^j \mathfrak{p}_j^{-s}$$

são alternadas por construção. Fixe $\delta > 0$. Segue do Lema 2.6.2 que as séries de Dirichlet

$$D_k(s) := \sum_{\ell=1}^\infty \frac{(-1)^{n_{\ell,k}}}{\mathfrak{p}_{n_{\ell,k}}^{1+\delta}} \mathfrak{p}_{n_{\ell,k}}^{-s} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{j=M_{q_{m,k}}}^{N_{q_{m,k}}} \frac{(-1)^j}{\mathfrak{p}_j^{1+\delta}} \mathfrak{p}_j^{-s} \in \mathscr{H}_\infty, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.45}$$

satisfazem: $\sigma_u(D_k) - \sigma_c(D_k) = 1$, $\sigma_c(D_k) = -1 - \delta$ e $\sigma_u(D_k) = -\delta$. Finalmente, seja $G = \{D_k \in \mathscr{H}_\infty : k \in \mathbb{N}\}$. Note que o conjunto G é linearmente independente, pois as séries de Dirichlet D_k's têm suportes em subconjuntos de primos dois a dois disjuntos. Sejam $k \in \mathbb{N}$, séries de Dirichlet $D_{i_1}, \ldots, D_{i_k} \in G$ e escalares complexos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ não todos nulos, digamos $\lambda_k \neq 0$ e escreva $D(s) = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell D_{i_\ell}(s)$. A série D é convergente para cada $s \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re} s > -1 - \delta$, pois todas as séries $D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}$ os são, e isso implica $\sigma_c(D) \leq -1 - \delta$. Note que

$$D(s) = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=M_{q_{m,i_\ell}}}^{N_{q_{m,i_\ell}}} \frac{(-1)^j}{\mathfrak{p}_j^{1+\delta}} \mathfrak{p}_j^{-s}.$$

Segue da Proposição 1.10.3 que existe uma sequência $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ de números reais tal que $\lim\limits_{j \to \infty} \mathfrak{p}_n^{it_j} = (-1)^n$ para cada $n = 1, \ldots, N$. Além disso, temos

$$\left| S_{N_{q_{m,k}}}(D, s) - S_{M_{q_{m,k}-1}}(D, s) \right| = |\lambda_k| \left| \sum_{j=M_{q_{m,k}}}^{N_{q_{m,k}}} \frac{(-1)^j}{\mathfrak{p}_j^{1+\delta}} \mathfrak{p}_j^{-s} \right| \tag{2.46}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Logo, dado $\sigma < -\delta$, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| S_{N_{q_{m,i_k}}}(D, \sigma + it) - S_{M_{q_{m,i_k}}}(D, \sigma + it) \right| &= |\lambda_k| \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{j=M_{q_{m,i_k}}}^{N_{q_{m,i_k}}} \frac{(-1)^j}{\mathfrak{p}_j^{1+\delta}} \mathfrak{p}_j^{-(\sigma+it)} \right| \\
\geq |\lambda_k| \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{j=M_{q_{m,i_k}}}^{N_{q_{m,i_k}}} \frac{(-1)^j}{\mathfrak{p}_j^{1+\delta}} \mathfrak{p}_j^{-\sigma} \mathfrak{p}_j^{-it_n} \right| &= |\lambda_k| \left| \sum_{j=M_{q_{m,i_k}}}^{N_{q_{m,i_k}}} \frac{(-1)^j}{\mathfrak{p}_j^{1+\delta}} \mathfrak{p}_j^{-\sigma} (-1)^{-j} \right| \\
= |\lambda_k| \sum_{j=M_{q_{m,i_k}}}^{N_{q_{m,i_k}}} \frac{1}{\mathfrak{p}_j^{1+\delta+\sigma}} \geq |\lambda_k| \sum_{j=M_{q_{m,i_k}}}^{N_{q_{m,i_k}}} \frac{1}{\mathfrak{p}_j} &\geq |\lambda_k| q_{m,i_k} \xrightarrow{m \to \infty} \infty.
\end{aligned}$$

A penúltima desigualdade acima é válida pois $\mathfrak{p}_j^{-\delta-\sigma} \geq 1$. Logo, isso mostra que a série D não é uniformemente convergente para $\sigma < -\delta$ e portanto $\sigma_u(D) \geq -\delta$. Como a diferença entre as abscissas de convergência uniforme e pontual não exceder 1 e $\sigma_c(D) \leq -1 - \delta$, temos

$$\sigma_c(D) = -1 - \delta\,, \;\; \sigma_u(D) = -\delta \;\text{ e }\; \sigma_u(D) - \sigma_c(D) = 1. \tag{2.47}$$

Isso mostra que $D \in \mathscr{N}$ e portanto o espaço vetorial gerado $[G]$ está contido em $\mathscr{N} \cup \{0\}$, o que encerra a demonstração. ■

Observação 2.6.3. Note que na demonstração do Teorema 2.6.1 as séries de Dirichlet $D \in [G]$ satisfazem $\sigma_a(D) - \sigma_c(D) = 1$. Com efeito, segue de (2.47) e da Proposição 1.5.5 que

$$1 = \sigma_u(D) - \sigma_c(D) \leq \sigma_a(D) - \sigma_c(D) \leq 1.$$

Logo, $D \in \mathscr{L}$. Portanto $[G] \subset \mathscr{L} \cup \{0\}$. Isso mostra que $\mathscr{L}$ é lineável.

2.7 Comentários e problemas

As álgebras $\mathcal{A}_\Theta(\mathbb{C}_0)$ podem ser definidas para quaisquer subconjuntos Θ dos números naturais. No entanto, para os nossos resultados, necessitou-se supor que distância entre os elementos de Θ tivesse um certo controle, mais precisamente, que existisse $L > 0$ tal que $k \leq j_k \leq L \cdot k$ para todos $j_k, k \in \mathbb{N}$, com $j_k \in \Theta$. Devido à esta hipótese, não conseguimos verificar se $\mathscr{M}$ é fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável. Além disso, de acordo com Exemplo 2.2.8 o Lema 2.2.6 não é válido para todo subconjunto $\Theta \subset \mathbb{N}$ infinito. Dito isso, temos os seguintes problemas:

Problema 2.7.1. *Para quais subconjuntos infinitos dos números naturais o Lema 2.2.6 é válido?*

Problema 2.7.2. *O conjunto $\mathscr{M}$ é fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável?*

Outros problemas são:

Problema 2.7.3. *O conjunto $\mathscr{M}$ visto como subconjunto do espaço de Hardy $\mathscr{H}_p$ é espaçável para $p \neq 2$?*

Problema 2.7.4. *Os conjuntos $\mathscr{N}$ e $\mathscr{L}$ são espaçáveis ou algebráveis?*

O Teorema 2.3.2, afirma que para cada $m \geq 2$ o conjunto das séries de Dirichlet $D \in \mathscr{H}_\infty^m$ tais que $\sigma_a(D) = (m-1)/2m$ é espaçável. Então, agregando essa informação ao Teorema 1.5.6, sugerimos os seguintes problemas:

Problema 2.7.5. *Para cada $0 \leq \sigma \leq 1/2$ o conjunto das séries de Dirichlet $D \in \mathscr{H}_\infty$ tais que $\sigma_a(D) - \sigma_u(D) = \sigma$ é lineável ou espaçável?*

Problema 2.7.6. *Seja $m \geq 2$. Para cada $0 \leq \sigma \leq (m-1)/2m$ o conjunto das séries de Dirichlet $D \in \mathscr{H}_\infty^m$ tais que $\sigma_a(D) - \sigma_u(D) = \sigma$ é lineável ou espaçável?*

Problema 2.7.7. *As mesmas técnicas que usamos neste trabalho podem resolver o Problema 2.7.5?*

Capítulo 3

Álgebras e espaços de Banach de funções holomorfas com cluster grande

Este capítulo é dedicado à exposição dos resultados relacionados aos conjuntos de cluster de funções holomorfas e todos eles são inéditos. Além disso, esses resultados compõe um manuscrito em confecção. Na primeira seção exibimos algumas definições e notações. A segunda seção é dedicada aos principais resultados técnicos usados neste capítulo. Na terceira seção, apresentaremos resultados de espaçabilidade e algebrabilidade envolvendo conjuntos de cluster. Na quarta seção, estabelecemos um novo ponto de vista para estudar algebrabilidade. Na quinta seção, forneceremos alguns resultados de espaçabilidade e algebrabilidade relacionados aos conjuntos de cluster radial. Por fim, a última seção é reservada para alguns comentários concernentes aos resultados e possíveis problemas futuros em aberto. Nossas principais referências foram [7, 11, 53, 56, 65, 66, 72].

3.1 Preliminares

Nesta seção apresentaremos algumas definições sobre cluster nas álgebras de Banach $\mathcal{H}_\infty(B)$ e $\mathscr{H}_\infty$. Essas definições são essenciais para posterior compreensão dos resultados deste capítulo. Relembramos as seguintes definições.

Definição 3.1.1. Sejam E um espaço de Banach, $x \in \overline{B}^{**}$ e $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$.

(a) O *conjunto de cluster* de uma função f num ponto x é o conjunto

$$Cl(f,x) := \{\mu \in \mathbb{C} \ : \ \text{existe uma rede } (z_\alpha)_\alpha \subset B\,, \\ z_\alpha \xrightarrow{w^*} x \text{ e } f(z_\alpha) \to \mu\}.$$

(b) O conjunto de cluster $Cl(f,x)$ é dito ser *grande* quando contém um disco aberto.

(c) O conjunto de cluster $Cl(f,x)$ é *total* se $Cl(f,x) = \overline{f(B)}$.

Para todo subespaço fechado X de $\mathcal{H}_\infty(B)$ e para todo subconjunto $M \subset \overline{B}^{**}$ seja

$$\mathcal{G}_M(X) = \{f \in X \,:\, Cl(f,x) = \overline{f(B)} \text{ para todo } x \in M\}.$$

Recorde a notação de $\mathcal{F}_M(X)$ na Seção 1.9. Além disso, pela Observação 1.3.6 o conjunto $\mathscr{P}_2(\ell_2)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{A}_u(B_{\ell_2})$ é, *a fortiori*, em $\mathcal{H}_\infty(B_{\ell_2})$. Isso permite considerar o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1.2. Se $M = \{0\}$, então $\mathcal{G}_M\left(\mathscr{P}_2(\ell_2)\right) \neq \emptyset$. Com efeito, seja $(\xi_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência crescente de números reais positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 1$. Além disso, seja $(a_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $\mathbb{D}$, cujo conjunto de pontos de acumulação seja $\overline{\mathbb{D}}$. Definamos o polinômio 2-homogêneo $P : \overline{B}_{\ell_2} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $P\left((\lambda_k)_{k=1}^\infty\right) = \sum_{k=1}^\infty a_k \lambda_k^2$. Afirmamos que $P \in \mathcal{G}_M\left(\mathscr{P}_2(\ell_2)\right)$. De fato, seja $\mu \in \overline{P(B_{\ell_2})}$ arbitrário. Claro que $\mu \in \overline{\mathbb{D}}$ pois $\|P\| \leq 1$, logo existe uma subsequência $(a_{n_j})_{j=1}^\infty$ de $(a_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = \mu$. Assim,

$$\lim_{j\to\infty} P\left(\xi_{n_j} e_{n_j}\right) = \lim_{j\to\infty} a_{n_j}\xi_{n_j}^2 = \mu \;\text{ e }\; \xi_{n_j} e_{n_j} \xrightarrow{w^*} 0\,,$$

o que mostra que $\overline{P(B_{\ell_2})} \subset Cl(P,0)$. Por outro lado, como a inclusão $Cl(P,0) \subset \overline{P(B_{\ell_2})}$ é válida, pois $\|P\| \leq 1$, concluímos que $Cl(P,0) = \overline{P(B_{\ell_2})}$, como desejado.

Recordemos que

$$\mathscr{H}_\infty^{(1)} = \left\{ D \in \mathscr{H}_\infty \,:\, D(s) = \sum_{n=0}^\infty a_{2^n}(2^n)^{-s}, s \in \mathbb{C}_0 \right\}.$$

Para uma série de Dirichlet $D \in \mathscr{H}_\infty^{(1)}$ e $s \in \overline{\mathbb{C}}_0$, definimos o conjunto de cluster de D em s como

$$Cl(D,s) := \{\mu \in \mathbb{C} \,:\, \text{ existe uma sequência } (s_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}_0\,,$$
$$\lim_{k\to\infty} s_k = s \text{ e } \lim_{k\to\infty} D(s_k) = \mu\}.$$

Parte deste capítulo tem por objetivo investigar a existência de estruturas lineares e algébricas no conjunto

$$\mathscr{I} = \{D \in \mathscr{H}_\infty^{(1)} : \cap_{t\in\mathbb{R}} Cl(D,it) \text{ contém um disco centrado em } 0\}.$$

Note que $\mathscr{I} \cap \mathscr{A}(\mathbb{C}_0) = \emptyset$, pois as funções em $\mathscr{A}(\mathbb{C}_0)$ podem ser estendidas continuamente para $\overline{\mathbb{C}}_0$ (veja comentário que precede o Teorema 1.4.14).

3.2 Alguns resultados técnicos

Esta seção é dedicada à apresentação dos principais lemas que usaremos nas seções seguintes, todos eles inéditos neste trabalho.

Lema 3.2.1. *Sejam E um espaço de Banach e $g, g_1, g_2, \ldots \in \mathcal{H}_\infty(B)$ tais que a sequência $(g_n)_{n=1}^\infty$ converge para g em $\mathcal{H}_\infty(B)$. Além disso, seja $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de números positivos e $\delta > 0$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \delta$. Se existem $z \in \overline{B}^{**}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\overline{\mathbb{D}}_{\delta_n}(0) \subset Cl(g_n, z)$ para todo $n \geq n_0$, então $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset Cl(g, z)$.*

Demonstração. Segue do Teorema 1.9.3 que o conjunto $Cl(f, z)$ é fechado, portanto, é suficiente demonstrar que $\mathbb{D}_\delta(0) \subset Cl(g, z)$. Seja $\mu \in \mathbb{D}_\delta(0)$ arbitrário. Em particular, temos que $|\mu| < \delta$, logo segue da convergência $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \delta$ que existe $n_1 > n_0$ tal que $|\mu| < \delta_n$ para todo $n \geq n_1$; ou seja, $\mu \in \mathbb{D}_{\delta_n}(0) \subset Cl(g_n, z)$ para todo $n \geq n_1$. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. A sequência $(g_n)_{n=1}^\infty$ converge para g em $\mathcal{H}_\infty(B)$, logo existe $n_2 > n_1$ tal que $\|g_{n_2} - g\| < \varepsilon/2$. Como $\mu \in \mathbb{D}_{\delta_{n_2}}(0) \subset Cl(g_{n_2}, z)$, existe uma rede $(x_\alpha)_\alpha \subset B$ satisfazendo $x_\alpha \xrightarrow{w^*} z$ e $\lim\limits_\alpha g_{n_2}(x_\alpha) = \mu$. Seja α_0 tal que $|g_{n_2}(x_\alpha) - \mu| < \varepsilon/2$ para todo $\alpha > \alpha_0$. Por desigualdade triangular, segue que

$$|\mu - g(x_\alpha)| \leq |\mu - g_{n_2}(x_\alpha)| + |g_{n_2}(x_\alpha) - g(x_\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $\alpha > \alpha_0$. Assim, $x_\alpha \xrightarrow{w^*} z$ e $\lim\limits_\alpha g(x_\alpha) = \mu$ e portanto $\mu \in Cl(g, z)$. Isso mostra que $\mathbb{D}_\delta(0) \subset Cl(g, z)$, completando a demonstração do lema.

■

Lema 3.2.2. *Sejam E um espaço de Banach com E^* separável e $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$. Se existem $x \in \overline{B}^{**}$ e $\delta > 0$ tais que $\mathbb{D}_\delta(0) \subset Cl(f, x)$, então existe uma sequência $(x_k)_{k=1}^\infty$ em B tal que*

$$x_k \xrightarrow{w^*} x \ \text{ e } \ \overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \overline{\{f(x_k) : k \in \mathbb{N}\}}.$$

Demonstração. Como o espaço de Banach E^* é separável, o espaço topológico $(\overline{B}^{**}, w^*)$ é metrizável. Logo, podemos escolher uma base de vizinhanças $(V_k)_{k=1}^\infty$ enumerável de x em $(\overline{B}^{**}, w^*)$. Seja $(\lambda_\ell)_{\ell=1}^\infty \subset \mathbb{D}_\delta(0)$ tal que

$$\overline{\{\lambda_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}} = \overline{\mathbb{D}}_\delta(0). \tag{3.1}$$

Visto que $(\lambda_\ell)_{\ell=1}^\infty \subset \mathbb{D}_\delta(0) \subset Cl(f, x)$, tem-se que para cada $\ell \in \mathbb{N}$ existe $x_\ell \in V_\ell$ tal que

$$|f(x_\ell) - \lambda_\ell| < \frac{1}{\ell}. \tag{3.2}$$

Segue de $(V_k)_{k=1}^\infty$ ser base de vizinhança de x em $(\overline{B}^{**}, w^*)$ que $x_\ell \xrightarrow{w^*} x$. Ademais, obtemos de (3.1) e (3.2) que $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \overline{\{f(x_k) \ : k \in \mathbb{N}\}}$. Isso encerra a demonstração do lema. ■

Lema 3.2.3. *Se $D \in \mathscr{H}_\infty$, $t \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ são tais que $\mathbb{D}_\delta(0) \subset Cl(D, it)$, então existe uma sequência $(z_k)_{k=1}^\infty$ em $\mathbb{C}_0$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} z_k = it \;\; e \;\; \overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \overline{\{D(z_k) : k \in \mathbb{N}\}}.$$

Demonstração. A demonstração é análoga àquela do Lema 3.2.2. De fato, seja $(V_k)_{k=1}^\infty$ uma base de vizinhanças de $it \in \mathbb{C}$, e seja $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{D}_\delta(0)$ tal que $\overline{\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}} = \overline{\mathbb{D}}_\delta(0)$. Como $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{D}_\delta(0) \subset Cl(D, it)$, segue que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $z_k \in V_k$ tal que $|D(z_k) - \lambda_k| < 1/k$. Donde $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = it$ e $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \overline{\{D(z_k) \; : k \in \mathbb{N}\}}$, como queríamos. ∎

Lema 3.2.4. *Sejam E um espaço de Banach com E^* separável e $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$ tal que $\mathbb{D}_\delta(0) \subset \cap_{x\in S^{**}} Cl(f, x)$ para algum $\delta > 0$. Suponha uma das seguintes condições:*

(a) *E é de dimensão finita e $M \subset S$ é enumerável.*

(b) *E é de dimensão infinita e $M \subset \overline{B}^{**}$ é enumerável.*

Então existe uma sequência interpolante $(z_k)_{k=1}^\infty \subset B^{**}$ para $\mathcal{H}_\infty(B)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(c) *Para cada $(x, \lambda) \in M \times \overline{\mathbb{D}}_\delta(0)$ podemos encontrar uma subsequência $(z_{k_j})_{j=1}^\infty$ de $(z_k)_{k=1}^\infty$ satisfazendo $z_{k_j} \xrightarrow{w*} x$ e $\lim\limits_{j\to\infty} f(z_{k_j}) = \lambda$.*

(d) *Existe uma sequência $(\lambda_\ell)_{\ell=1}^\infty \subset \mathbb{D}_\delta(0)$ com $\overline{\{\lambda_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}} = \overline{\mathbb{D}}_\delta(0)$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ e $\ell, p \in \mathbb{N}$ com $(x, \lambda_\ell) \neq (y, \lambda_p)$, as subsequências $(z_{k_j})_{j=1}^\infty$ e $(z_{m_j})_{j=1}^\infty$ encontradas para (x, λ_ℓ) e (y, λ_p) respectivamente, satisfazendo (c), têm suportes quase disjuntos, isto é, o conjunto $\{k_j \; : j \in \mathbb{N}\} \cap \{m_j \; : j \in \mathbb{N}\}$ é finito.*

Demonstração. Suponha a condição (b) válida. Seja $(\lambda_\ell)_{\ell=1}^\infty \subset \mathbb{D}_\delta(0)$ tal que $\overline{\{\lambda_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}} = \overline{\mathbb{D}}_\delta(0)$ e seja $M = \{x_p : p \in \mathbb{N}\}$. Segue do Teorema 1.10.16 que para cada $p \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $(y_j^p)_{j=1}^\infty$ em $S_{E^{**}}$ tal que

$$y_j^p \xrightarrow{w^*} x_p \;\text{ quando }\; j \to \infty. \tag{3.3}$$

Como $(\overline{B}^{**}, w^*)$ é metrizável, pois E^* é separável, segue das inclusões

$$\mathbb{D}_\delta(0) \subset \bigcap_{x\in S^{**}} Cl(f, x) \subset \bigcap_{(j,p)\in\mathbb{N}^2} Cl(f, y_j^p)$$

que para $j, \ell, p \in \mathbb{N}$, existe sequência $(v_m^{j,\ell,p})_{m=1}^\infty \subset B$ satisfazendo

$$v_m^{j,\ell,p} \xrightarrow{w^*} y_j^p \;\text{ quando }\; m \to \infty \;\text{ e }\; \lim_{m\to\infty} f(v_m^{j,\ell,p}) = \lambda_\ell. \tag{3.4}$$

Note que

$$1 = \|y_j^p\| \leq \liminf_{m\to\infty} \|v_m^{j,\ell,p}\| \leq \limsup_{m\to\infty} \|v_m^{j,\ell,p}\| \leq 1,$$

o que implica

$$\lim_{m\to\infty} \|v_m^{j,\ell,p}\| = 1. \tag{3.5}$$

Agora, para cada $(\ell,p) \in \mathbb{N}^2$, sejam $(V_{k,p})_{k=1}^{\infty}$ uma base de vizinhanças de x_p em $(\overline{B}^{**}, w^*)$ e $(W_{k,\ell})_{k=1}^{\infty}$ uma base de vizinhanças de λ_ℓ. Dado $k \in \mathbb{N}$, segue de (3.3) que existe uma subsequência $(y_{j_k}^p)_{k=1}^{\infty}$ de $(y_j^p)_{j=1}^{\infty}$ tal que $y_{j_k}^p \in V_{k,p}$. Logo, fixando esta sequência $(j_k)_{k=1}^{\infty}$, segue de (3.4) e (3.5) que para cada $(k,p) \in \mathbb{N}^2$ existe $v_{m_k}^{j_k,\ell,p} \in V_{k,p}$ tal que

$$1 - \|v_{m_k}^{j_k,\ell,p}\| < \frac{1}{k} \text{ e } f(v_{m_k}^{j_k,\ell,p}) \in W_{k,\ell}.$$

Logo, podemos encontrar uma sequência $(j_k, m_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}^2$ tal que

$$w_k^{\ell,p} := v_{m_k}^{j_k,\ell,p} \xrightarrow{w^*} x_p, \text{ quando } k \to \infty, \lim_{k\to\infty} f(w_k^{\ell,p}) = \lambda_\ell \text{ e } \lim_{k\to\infty} \|w_k^{\ell,p}\| = 1. \tag{3.6}$$

Agora, construiremos por recorrência a sequência $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ com as propriedades desejadas. Para isso, seja $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^3$ uma bijeção com

$$\varphi(n) = (\varphi_1(n), \varphi_2(n), \varphi_3(n)).$$

Defina

$$z_1 = w_1^{\varphi_1(1),\varphi_2(1)}.$$

Por (3.6) existe $n_2 > 1$ tal que

$$\frac{1 - \|w_{n_2}^{\varphi_1(2),\varphi_2(2)}\|}{1 - \|z_1\|} < \frac{1}{2}.$$

Faça

$$z_2 = w_{n_2}^{\varphi_1(2),\varphi_2(2)}.$$

Novamente por (3.6) existe $n_3 > n_2$ tal que

$$\frac{1 - \|w_{n_3}^{\varphi_1(3),\varphi_2(3)}\|}{1 - \|z_2\|} < \frac{1}{2}.$$

Faça

$$z_3 = w_{n_3}^{\varphi_1(3),\varphi_2(3)}.$$

Repetindo esse processo indutivamente, obteremos a sequência $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ satisfazendo

$$\frac{1 - \|z_{k+1}\|}{1 - \|z_k\|} < \frac{1}{2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema 1.9.15 que $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência interpolante para

$\mathcal{H}_\infty(B)$. Além disso, para cada par $(\ell, p) \in \mathbb{N}^2$, aparecem infinitos termos da sequência $(w_k^{\ell,p})_{k=1}^\infty$ na sequência $(z_k)_{k=1}^\infty$, logo para cada par $(\ell, p) \in \mathbb{N}^2$ existe uma subsequência $(z_{k_j})_{j=1}^\infty$ de $(z_k)_{k=1}^\infty$ tal que z_{k_j} é da forma $w_k^{\ell,p}$ e satisfaz $z_{k_j} \xrightarrow{w*} x_p$ e $\lim\limits_{j\to\infty} f(z_{k_j}) = \lambda_\ell$. Visto que $\{\lambda_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0)$, obtemos (na topologia produto) que

$$M \times \overline{\mathbb{D}}_\delta(0) = M \times \overline{\{\lambda_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\{(z_k, f(z_k)) : k \in \mathbb{N}\}}.$$

Isso mostra (c).

Para a demonstração de (d), primeiro note que para $x, y \in M$ e $\ell, p \in \mathbb{N}$ com $(x, \lambda_\ell) \neq (y, \lambda_p)$, existem subsequências $(z_{k_j})_{j=1}^\infty$ e $(z_{m_j})_{j=1}^\infty$ de $(z_k)_{k=1}^\infty$ tais que

$$z_{k_j} \xrightarrow{w*} x \text{ e } \lim_{j\to\infty} f(z_{k_j}) = \lambda_\ell\,;$$
$$z_{m_j} \xrightarrow{w*} y \text{ e } \lim_{j\to\infty} f(z_{m_j}) = \lambda_p\,.$$

Como $(x, \lambda_\ell) \neq (y, \lambda_p)$, o conjunto $\{z_{k_j} : j \in \mathbb{N}\} \cap \{z_{m_j} : j \in \mathbb{N}\}$ é finito.

A demonstração supondo a condição (a) é similar à demonstração supondo a condição (b), por isso será omitida. No entanto, esclarecemos que na demonstração de (c) (supondo a condição (a)), não precisamos nos preocupar com os pontos interiores. Além disso, ao invés de invocar o Teorema 1.10.16, podemos usar o fato da esfera em dimensão finita ser compacta na topologia da norma. Do mais, o resto dos cálculos segue de modo similar. ■

Proposição 3.2.5. *Seja* $\mathfrak{B}|_{\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})} : \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathscr{H}_\infty^{(1)}$ *a restrição da transformada de Bohr. Então*

$$f \in \mathcal{F}_\mathbb{T}(\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})) \text{ se, e somente se, } \mathfrak{B}(f) \in \mathscr{I} \cap \mathscr{H}_\infty^{(1)}.$$

Demonstração. Dada $f \in \mathcal{F}_\mathbb{T}(\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}))$, existe $\delta > 0$ tal que $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \bigcap_{t\in\mathbb{R}} Cl(f, 2^{it})$. Seja $q \in \mathbb{Q}$. Pelo Lema 3.2.2, existe uma sequência $(\xi_m)_{m=1}^\infty \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \xi_m = 2^{iq} \text{ e } \overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \overline{\{f(\xi_m) : m \in \mathbb{N}\}}.$$

Ademais, segue do Lema 1.10.4 que o conjunto $\{2^{-(p+ir)} : (p, r) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}\}$ é denso em $\overline{\mathbb{D}}$. Logo, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $(p_{k,m} + ir_{k,m})_{k=1}^\infty \subset \mathbb{Q}_+ + i\mathbb{Q}$ tal que $\xi_m = \lim\limits_{k\to\infty} 2^{-(p_{k,m}+ir_{k,m})}$. Em particular, como $\xi_m \neq 0$, a sequência $(p_{k,m}+ir_{k,m})_{k=1}^\infty$ é limitada para cada $m \in \mathbb{N}$, logo existe $s_m = p_m + ir_m$ tal que a menos de uma subsequência $\lim\limits_{k\to\infty} p_{k,m} + ir_{k,m} = s_m$. Assim,

$$\xi_m = \lim_{k\to\infty} 2^{-(p_{k,m}+ir_{k,m})} = 2^{-s_m}.$$

Segue de (1.7) que $\mathfrak{B}(f)(s_m) = f(\xi_m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$, e isso implica que $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \overline{\{\mathfrak{B}(f)(s_m) : m \in \mathbb{N}\}}$. Logo, isso é suficiente para concluir que $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset Cl(\mathfrak{B}(f), iq)$. Como $\delta > 0$ não depende de q, segue do Lema 1.9.4(c) que $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \bigcap_{t\in\mathbb{R}} Cl(\mathfrak{B}(f), it)$. Portanto,

$\mathfrak{B}(f) \in \mathscr{I} \cap \mathscr{H}_\infty^{(1)}$. A demonstração da recíproca é análoga à demostração da implicação

$$f \in \mathcal{F}_{\mathbb{T}}(\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})) \Longrightarrow \mathfrak{B}(f) \in \mathscr{I} \cap \mathscr{H}_\infty^{(1)},$$

usando o Lema 3.2.3 ao invés do Lema 3.2.2. ∎

3.3 Estruturas lineares e algébricas no conjunto das funções holomorfas com cluster grande

Nesta seção mostraremos, sob certas condições, que os conjuntos $\mathcal{G}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B)) \cup \{0\}$ e $\mathcal{F}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B)) \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial fechado de dimensão infinita. Além disso, mostraremos a existência de estruturas linear e algébrica no conjunto $\mathscr{I} \cup \{0\}$.

Proposição 3.3.1. *Sejam E espaço de Banach, B a bola aberta e unitária de E, X um subespaço fechado de $\mathcal{H}_\infty(B)$ e $(x_k^{**})_{k=1}^\infty \subset B^{**}$ uma sequência interpolante para X com constante de interpolação C. Além disso, sejam M o conjunto de todos os pontos de acumulação de $(x_k^{**})_{k=1}^\infty$ na topologia fraca estrela. As seguintes afirmações são válidas:*

(a) O conjunto $\mathcal{F}_M(X) \cap \mathcal{G}_M(X)$ (a menos da função nula) contém uma cópia isomorfa de ℓ_1. Além disso, se C é igual a 1, então esse isomorfismo torna-se uma isometria.

Além disso, existe um subconjunto enumerável $G \subset M$ tal que $\overline{G}^{w^*} = M$ satisfazendo:

(b) Existe uma cópia F de ℓ_1 em $\mathcal{F}_M(X) \cup \{0\}$ (ou $\mathcal{G}_M(X) \cup \{0\}$) tal que para cada $(g, w) \in F \setminus \{0\} \times G$, existem uma subsequência $(x_{k_\ell}^{**})_{\ell=1}^\infty$ de $(x_k^{**})_{k=1}^\infty$ e $\delta := \delta(g) > 0$ satisfazendo

$$x_{k_\ell}^{**} \xrightarrow{w^*} w \ \text{ e } \ \overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \overline{\{\widetilde{g}(x_{k_\ell}^{**}) : \ell \in \mathbb{N}\}}.$$

Demonstração. Antes de iniciar as demonstrações, estabeleceremos algumas notações e definições. Sejam $G = \{w_k : k \in \mathbb{N}\} \subset M$, com $\overline{G}^{w^*} = M$, e $\{\Theta_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma partição (disjunta) de $\mathbb{N}$ formada por subconjuntos infinitos tais que

$$x_l^{**} \xrightarrow{w^*} w_k, \ \ l \in \Theta_k, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Note que a equação (3.7) é possível pois G está contido no conjunto dos pontos de acumulação de $(x_k^{**})_{k=1}^\infty$. Para cada k fixado, seja $\{\Theta_{k,n} : n \in \mathbb{N}\}$ uma partição (disjunta) de Θ_k formada por subconjuntos infinitos. Enumeremos esses conjuntos por

$$\Theta_{k,n} := \{m_{k,n,1} < m_{k,n,2} < m_{k,n,3} < \cdots\}, \ \ k, n \in \mathbb{N}.$$

Do mais, denote o conjunto de todos os números racionais $\mathbb{Q}$ por $\{t_p : p \in \mathbb{N}\}$, considere uma sequência $(a_k)_{k=1}^\infty$ em $\mathbb{D}_C(0)$ (C é a constante de interpolação da sequência $(x_k^{**})_{k=1}^\infty$) cujo conjunto de todos os seus pontos de acumulação seja $\overline{\mathbb{D}}_C(0)$, e seja $(\mathfrak{p}_n)_{n=1}^\infty$ a sequência de números primos. Também, para cada $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$, escrevemos $\lambda_j = |\lambda_j|e^{i\theta_j}$, com $0 \leq \theta_j < 2\pi$ e convencionando $\theta_j = 0$ se $\lambda_j = 0$. Por último, dado $N \in \mathbb{N}$, segue da Proposição 1.10.3 que

$$\overline{\{(\mathfrak{p}_1^{it_m}, \ldots, \mathfrak{p}_N^{it_m}) : m \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathbb{T}^N. \tag{3.8}$$

Com as notações acima fixadas, podemos fazer algumas definições. Com efeito, devido $(x_k^{**})_{k=1}^{\infty}$ ser uma sequência interpolante para X, para cada $j \in \mathbb{N}$ podemos encontrar uma função $f_j \in X$ tal que

$$\tilde{f}_j(x_{m_{k,n,p}}^{**}) := \mathfrak{p}_j^{it_p} \cdot a_n \quad \text{para todos } k, n, p \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Ademais, pelo Lema 1.9.16, temos $\sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \|\tilde{f}_j\| \leq C$. Seja $T : \ell_1 \longrightarrow X$ a transformação linear definida por

$$T\left((\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j. \tag{3.10}$$

Note que T está bem definida pois $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j$ é absolutamente convergente em $\mathcal{H}_\infty(B)$ e X é fechado. Para cada $g = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j \in T(\ell_1)$ com $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$, escreveremos

$$g_N = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f_j\,, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, podemos começar as demonstrações de (a) e (b).

(a) Afirmamos que a aplicação linear T é um isomorfismo sobre sua imagem e $T(\ell_1) \setminus \{0\} \subset \mathcal{F}_M(X) \cap \mathcal{G}_M(X)$. Com efeito, para cada $N \in \mathbb{N}$ e cada sequência $(\lambda_j)_{j=1}^{N} \in \mathbb{C}^N$ temos

$$\left\|\sum_{j=1}^{N} \lambda_j f_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \tilde{f}_j\right\| \leq C \cdot \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|.$$

Fazendo $N \to \infty$, obtemos

$$\left\|T\left((\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\| \leq C \cdot \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_1, \tag{3.11}$$

e isso implica a continuidade de T. Para concluir que T é um isomorfismo sobre sua a imagem, note que

$$\left\|\sum_{j=1}^{N} \lambda_j f_j\right\| \geq \sup_{k,n,p \in \mathbb{N}} \left|\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| e^{i\theta_j} f_j(x_{m_{k,n,p}}^{**})\right| = \sup_{k,n,p \in \mathbb{N}} \left|\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| e^{i\theta_j} \mathfrak{p}_j^{it_p} a_n\right| \qquad \text{(de (3.9))}$$
$$= \sup_{n,p \in \mathbb{N}} \left[|a_n| \left|\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| e^{i\theta_j} \mathfrak{p}_j^{it_p}\right|\right] = C \cdot \sup_{p \in \mathbb{N}} \left|\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| e^{i\theta_j} \mathfrak{p}_j^{it_p}\right|$$

$$\geq C \cdot \left| \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| e^{i\theta_j} e^{-i\theta_j} \right| = C \cdot \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|. \qquad \text{(de (3.8))}$$

Fazendo $N \to \infty$, obtemos

$$\left\| T\left((\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right\| \geq C \cdot \| (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \|_1. \tag{3.12}$$

Segue de (3.11) e (3.12) que T é um isomorfismo sobre sua a imagem. Além disso,

$$\left\| T\left((\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right\| = C \cdot \| (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \|_1.$$

Caso C seja igual a 1 temos uma isometria. Para completar a demonstração, resta mostrar que $T(\ell_1) \setminus \{0\} \subset \mathcal{F}_M(X) \cap \mathcal{G}_M(X)$. Sejam $g = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j \in T(\ell_1) \setminus \{0\}$ e $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=1}^{N_0} |\lambda_j| \neq 0$. Mostraremos que

$$\overline{g(B)} \subset \overline{\mathbb{D}}_{C \cdot \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_1}(0) \subset Cl(g, x) \subset \overline{g(B)}, \tag{3.13}$$

para todo $x \in M$ e isso encerará a demonstração de (a).

A inclusão $Cl(g, x) \subset \overline{g(B)}$ é imediata. Agora, como $\|g\| = C \cdot \| (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \|_1$, obtemos também a inclusão $\overline{g(B)} \subset \overline{\mathbb{D}}_{C \cdot \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_1}(0)$. Portanto, resta-nos mostrar a inclusão $\overline{\mathbb{D}}_{C \cdot \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_1}(0) \subset Cl(g, x)$. Para isso, vejamos que

$$\overline{\mathbb{D}}_{C \cdot \|(\lambda_j)_{j=1}^{N}\|_{\ell_1^N}}(0) \subset Cl(g_N, w_k), \ N \geq N_0, \tag{3.14}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Com efeito, sejam $N \geq N_0$ e $\mu \in \overline{\mathbb{D}}_{C \cdot \|(\lambda_j)_{j=1}^{N}\|_{\ell_1^N}}(0)$. Definamos

$$\mu_j := \frac{e^{-i\theta_j} \mu}{\|(\lambda_q)_{q=1}^{N}\|_{\ell_1^N}}, \ \ j = 1, \ldots, N.$$

Como

$$e^{-i\theta_j} \in \mathbb{T} \ \text{ e } \ \frac{\mu}{\|(\lambda_q)_{q=1}^{N}\|_{\ell_1^N}} \in \overline{\mathbb{D}}_C(0), \ \ j = 1, \ldots, N,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, segue de (3.8), (3.9) e da densidade da sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\overline{\mathbb{D}}_C(0)$, que existem sequências crescentes $(n_l)_{l=1}^{\infty}$ e $(p_l)_{l=1}^{\infty}$ de números naturais tais que $\lim\limits_{l \to \infty} \widetilde{f}_j(x^{**}_{m_{k,n_l,p_l}}) = \mu_j$ para cada $j = 1, \ldots, N$. Logo,

$$\widetilde{g}_N(x^{**}_{m_{k,n_l,p_l}}) \xrightarrow{l \to \infty} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mu_j = \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| e^{i\theta_j} \frac{e^{-i\theta_j} \mu}{\|(\lambda_q)_{q=1}^{N}\|_{\ell_1^N}} = \mu. \tag{3.15}$$

Visto que $\mu \in \overline{\mathbb{D}}_{C \cdot \|(\lambda_j)_{j=1}^{N}\|_{\ell_1^N}}(0)$ foi escolhido arbitrário, obtemos

$$\overline{\mathbb{D}}_{C \cdot \|(\lambda_j)_{j=1}^{N}\|_{\ell_1^N}}(0) \subset \{\lambda : \lambda \ \text{ é ponto de acumulação de } \ (\widetilde{g}_N(x^{**}_{m_{k,n,p}}))_{n,p}\}$$

$$\subset Cl(g_N, w_k)$$

para todos $k \in \mathbb{N}$ e $N \geq N_0$. Isso mostra (3.14). Finalmente, como

$$\|g_N - g\| \xrightarrow{N\to\infty} 0 \ \text{ e } \ \lim_{N\to\infty} \|(\lambda_j)_{j=1}^N\|_{\ell_1^N} = \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_1,$$

segue do Lema 3.2.1 que $\overline{\mathbb{D}}_{C\cdot\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_1}(0) \subset Cl(g, w_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Lema 1.9.4(c), obtemos $\overline{\mathbb{D}}_{C\cdot\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_1}(0) \subset Cl(g, x)$ para todo $x \in M$. Isso conclui as demonstrações das inclusões em (3.13).

(b) Sejam $F = T(\ell_1)$, $(g, w) \in F \times G$, com $g \neq 0$, e $\delta := \|g\| > 0$. Visto que $G = \{w_k : k \in \mathbb{N}\}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $w = w_{k_0}$. Denote

$$\Theta_{k_0} = \{m_1^{k_0} < m_2^{k_0} < \cdots\}.$$

Já sabemos que $x^{**}_{m_j^{k_0}} \xrightarrow{w^*} w_{k_0}$. Para completar a demonstração, veremos que

$$\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \overline{\{\widetilde{g}(x^{**}_{m_j^{k_0}}) \ : j \in \mathbb{N}\}}.$$

Com efeito, seja $\mu \in \overline{\mathbb{D}}_\delta(0)$. Como $g \in T(\ell_1) \setminus \{0\}$, existe $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1 \setminus \{0\}$ tal que

$$g = T\left((\lambda_j)_{j=1}^\infty\right) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j f_j.$$

Para este $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$ fixo, definamos para cada $N \in \mathbb{N}$ os números

$$\mu_j := \frac{e^{-i\theta_j}\mu}{\left\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\right\|} \ \text{ e } \ b_N := \frac{\mu}{\left\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\right\|} \sum_{j=1}^N |\lambda_j|, \ \ j \in \mathbb{N}.$$

Note que

$$\lim_{N\to\infty} b_N = \mu. \tag{3.16}$$

Analogamente ao realizado na obtenção de (3.15), para cada $N \in \mathbb{N}$ podemos encontrar uma subsequência $(z_\ell^{k_0,N})_{\ell=1}^\infty$ de $(x^{**}_{m_j^{k_0}})_{j=1}^\infty$ tal que $\lim_{\ell\to\infty} \widetilde{g}_N(z_\ell^{k_0,N}) = b_N$. Em particular, para cada $N \in \mathbb{N}$ podemos escolher $\ell_N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\widetilde{g}_N(z_{\ell_N}^{k_0,N}) - b_N\right| < \frac{1}{N}. \tag{3.17}$$

Afirmamos que $\lim_{N\to\infty} \widetilde{g}(z_{\ell_N}^{k_0,N}) = \mu$. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Segue de (3.16), (3.17) e da convergência $\widetilde{g}_N \to \widetilde{g}$ em $\mathcal{H}_\infty(B^{**})$ que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq N_0$ implica

$$|b_N - \mu| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \ \left|\widetilde{g}_N(z_{\ell_N}^{k_0,N}) - b_N\right| < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ e } \ \|\widetilde{g}_N - \widetilde{g}\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donde, para $N \geq N_0$ obtemos

$$\begin{aligned}
|\widetilde{g}(z_{\ell_N}^{k_0,N}) - \mu| &\leq |\widetilde{g}(z_{\ell_N}^{k_0,N}) - \widetilde{g}_N(z_{\ell_N}^{k_0,N})| + |\widetilde{g}_N(z_{\ell_N}^{k_0,N}) - b_N| + |b_N - \mu| \\
&\leq \|\widetilde{g} - \widetilde{g}_N\| + |\widetilde{g}_N(z_{\ell_N}^{k_0,N}) - b_N| + |b_N - \mu| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{N\to\infty} \widetilde{g}(z_{\ell_N}^{k_0,N}) = \mu$. Como μ é qualquer em $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0)$, obtemos o desejado e a demonstração está completa. ■

Ressaltamos que na Proposição 3.3.1, se X for em particular um subespaço fechado de $\mathcal{A}_u(B)$, então a sequência interpolante pode ser considerada em $\overline{B}^{**}$ ao invés de B^{**}. (Veja Definição 1.9.13).

Exemplo 3.3.2. O conjunto $\mathcal{G}_{\{0\}}(\mathscr{P}_2(\ell_2)) \cup \{0\}$ contém uma cópia isométrica de ℓ_1. Para ver isso, basta lembrar que a sequência $(e_n)_{n=1}^\infty$ é interpolante para $\mathscr{P}_2(\ell_2)$ e tem constante de interpolação igual a 1 (veja comentário após o Lema 1.9.16). Daí, e da Proposição 3.3.1, segue o desejado.

O próximo teorema que iremos tratar (Teorema 3.3.3) estende a parte destacada do seguinte resultado:

> [7, Theorem 4.1.] *The set of functions $f \in \mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$ whose cluster set at every $x \in B_{c_0}$ contains a disk is strongly $\mathfrak{c}$-algebrable and* **contains (up to the zero function) an almost isometric copy of ℓ_1.**

Teorema 3.3.3. *Se E é um espaço de Banach separável de dimensão infinita, então o conjunto $\mathcal{F}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B)) \cap \mathcal{G}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B))$ (a menos da função nula) contém uma cópia isomorfa de ℓ_1.*

Demonstração. Mostraremos que existe uma sequência $(x_k^{**})_{k=1}^\infty$ interpolante para $\mathcal{H}_\infty(B)$ cujo conjunto dos pontos de acumulação na topologia fraca estrela seja $\overline{B}^{**}$. Seja $(z_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência densa em $\overline{B}$ na topologia da norma. Segue do Teorema 1.10.16 que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $(v_{k,n}^{**})_{k=1}^\infty$ em S que converge para z_n na topologia fraca estrela. Reorganize a família de sequências $\{(v_{k,n}^{**})_{k=1}^\infty : n \in \mathbb{N}\}$ como sendo a sequência $(w_k^{**})_{k=1}^\infty$. Agora, seja

$$x_k^{**} := \left(1 - 2^{-k}\right) w_k^{**}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Note que por construção, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência $(x_{k_j}^{**})_{j=1}^\infty$ de $(x_k^{**})_{k=1}^\infty$ tal que $x_{k_j}^{**} \xrightarrow{w^*} z_n$. Além disso, pelo teorema de Goldstine temos que $J_E(\overline{B})$ é denso em $\overline{B}^{**}$ na topologia fraca estrela. Logo, podemos concluir que a sequência $(x_k^{**})_{k=1}^\infty$ é densa em $\overline{B}^{**}$ na topologia fraca estrela. Ademais, como

$$\frac{1 - \|x_{k+1}^{**}\|}{1 - \|x_k^{**}\|} = \frac{1 - (1 - 2^{-(k+1)})}{1 - (1 - 2^{-k})} = \frac{2^{-(k+1)}}{2^{-k}} = \frac{1}{2} < 1$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, segue do Teorema 1.9.15 que $(x_k^{**})_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência interpolante para $\mathcal{H}_\infty(B)$. Portanto, o resultado segue da Proposição 3.3.1 (a). ■

Teorema 3.3.4. *Se $E = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$, então o conjunto $\mathcal{F}_S(\mathcal{H}_\infty(B)) \cap \mathcal{G}_S(\mathcal{H}_\infty(B))$ (a menos da função nula) contém uma cópia isomorfa de ℓ_1.*

Demonstração. A ideia desta demonstração é muito similar àquela do Teorema 3.3.3. Assim, demonstremos que existe uma sequência interpolante $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset B$ cujo conjunto dos pontos de acumulação seja S na topologia da norma. Com efeito, seja $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset S$ uma sequência densa em S na topologia da norma. Assim, escrevendo $x_k := \left(1 - 2^{-k}\right) z_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, obtemos que a esfera S é o conjunto dos pontos de acumulação de $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ na topologia da norma e, além disso, $(1 - \|x_{k+1}\|) \,/\, (1 - \|x_k\|) < 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo pelo Teorema 1.9.15 a sequência $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ é interpolante para $\mathcal{H}_\infty(B)$, e portanto o resultado segue da Proposição 3.3.1 (a). ■

Uma consequência direta da Proposição 3.2.5 é o resultado a seguir.

Teorema 3.3.5. *O conjunto $\mathscr{I} \cup \{0\}$ contém uma cópia isomorfa de ℓ_1. Em particular, é espaçável maximal.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.3.4 o conjunto $\mathcal{F}_{\mathbb{T}}(\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})) \cup \{0\}$ contém uma cópia isomorfa de ℓ_1. Como a transformada de Bohr é um isomorfismo linear, segue da Proposição 3.2.5 que $\mathscr{I} \cup \{0\}$ contém uma cópia de ℓ_1. ■

Apresentaremos uma segunda demonstração do Teorema 3.3.5. Para isso, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.3.6. *Existe uma sequência $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ em $\mathbb{C}_0$ tal que o conjunto dos seus pontos de acumulação é $i\mathbb{R}$ e*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1 - 2^{-\sigma_{k+1}}}{1 - 2^{-\sigma_k}} < 1,$$

onde σ_k é a parte real de s_k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $\delta \in (0, 1)$ fixo. Mostraremos que a sequência $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$, onde $\sigma_k = \delta^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, satisfaz

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1 - 2^{-\sigma_{k+1}}}{1 - 2^{-\sigma_k}} < 1.$$

Com efeito, sejam $p < q$ números naturais tais que $\delta < p/q$ e seja $G_\delta : [2^{-\delta}, 1] \to \mathbb{R}$ a função real definida por

$$G_\delta(t) := \frac{1 + t^{1/q} + \cdots + t^{(p-1)/q}}{1 + t^{1/q} + \cdots + t^{(q-1)/q}}.$$

Como G_δ é contínua e $p < q$, então $\max\limits_{t \in [2^{-\delta}, 1]} G_\delta(t) < 1$. Logo, definindo $r_k := 2^{-\delta^k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\frac{1 - 2^{-\delta^{k+1}}}{1 - 2^{-\delta^k}} \;=\; \frac{1 - r_k^{\delta}}{1 - r_k} \leq \frac{1 - r_k^{p/q}}{1 - r_k}$$

$$= \quad \frac{1 + r_k^{1/q} + \cdots + r_k^{(p-1)/q}}{1 + r_k^{1/q} + \cdots + r_k^{(q-1)/q}} \leq \max_{t \in [2^{-\delta},1]} G_\delta(t) < 1.$$

Finalmente, escrevendo o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ por $\{t_k : k \in \mathbb{N}\}$ e definindo $s_k := \sigma_k + it_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, a sequência $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ satisfaz a propriedade desejada. ∎

Segunda demonstração do Teorema 3.3.5. Seja $\delta \in (0,1)$ fixado e seja $\sigma_k = \delta^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Ademais, seja $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência densa em $\mathbb{R}$. A sequência $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ definida por $s_k = \sigma_k + it_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, satisfaz a condição do Lema 3.3.6, isto é, o conjunto dos pontos de acumulação de $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ é $i\mathbb{R}$ e

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1 - |2^{-s_{k+1}}|}{1 - |2^{-s_k}|} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1 - 2^{-\sigma_{k+1}}}{1 - 2^{-\sigma_k}} < 1.$$

Em particular, segue do Teorema 1.9.14 que a sequência $(2^{-s_k})_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência interpolante para $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$. Então, através da transformada de Bohr, não é difícil verificar que $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência interpoladora para $\mathscr{H}_\infty^{(1)}$. Agora, de maneira semelhante à que fizemos para $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D})$ (caso particular da Proposição 3.3.1) poderíamos trabalhar diretamente em $\mathscr{H}_\infty^{(1)}$ para obter o teorema.

∎

3.4 Pontual fortemente algebrável: uma investigação ponto a ponto de estruturas algébricas

Na maioria dos casos quando buscamos mostrar que um subconjunto M de uma álgebra $\mathcal{A}$ é algebrável, exibimos um subconjunto G de M tal que $\mathcal{A}(G) \subset M \cup \{0\}$. Em particular, para cada $x \in G$ existe uma álgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ($\mathcal{B} = \mathcal{A}(G)$) tal que $x \in \mathcal{B} \subset M \cup \{0\}$. Podemos questionar se isso também acontece com qualquer elemento de M além daqueles pertencentes a G. Será que para qualquer elemento $x \in M$ é possível obter uma subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ cuja cardinalidade do conjunto de seus geradores algebricamente independentes seja κ, e ainda se tenha $x \in \mathcal{A} \subset M \cup \{0\}$? Nesta seção, trataremos de alguns conjuntos com esta propriedade que denominamos de *pontual fortemente algebrável*.

Definição 3.4.1. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra, $M \subset \mathcal{A}$ um subconjunto não vazio e κ um número cardinal. O conjunto M é chamado *pontual fortemente κ-algebrável*, se para cada $x \in M$ existir uma subálgebra $\mathcal{B}_x$ de $\mathcal{A}$ gerada por um conjunto algebricamente independente e de cardinalidade κ, satisfazendo $x \in \mathcal{B}_x \subset M \cup \{0\}$.

Note que pontual fortemente κ-algebrável implica em fortemente κ-algebrável. A recíproca nem sempre é verdadeira como veremos a seguir. A noção e a terminologia de pontual fortemente algebrável foram inspiradas nos trabalhos [53, 72], assim como os exemplos abaixo.

Exemplo 3.4.2. Seja I um conjunto de índices, com $\#I = \mathfrak{c}$, e seja $\{\Theta_i : i \in I\}$ uma partição (quase disjunta) de $\mathbb{N}$ formada por subconjuntos infinitos (veja Exemplo 1.8.5). Para cada $i \in I$ consideramos os funcionais lineares $\varphi_{\Theta_i} : c_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ definidos por $\varphi_{\Theta_i}((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n\in\Theta_i} 2^{-n}x_n$. Segue do Exemplo 1.8.6 que o conjunto $G = \{\varphi_{\Theta_i} : i \in I\}$ é algebricamente independente. Sejam $I_1, I_2 \subset I$ satisfazendo

$$I = I_1 \cup I_2, \;\; I_1 \cap I_2 = \emptyset \;\text{ e }\; \#I_1 = \#I_2 = \mathfrak{c}.$$

Definamos $G_1 = \{\varphi_{\Theta_i} : i \in I_1\}$ e $G_2 = \{\varphi_{\Theta_i} : i \in I_2\}$. Além disso, também definamos o conjunto $M = \mathcal{A}(G_1) \cup \mathcal{A}(G_2)$. Note que M não é sequer espaço vetorial, pois dados elementos $\varphi_1 \in \mathcal{A}(G_1)$ e $\varphi_2 \in \mathcal{A}(G_2)$ ambos não nulos, o elemento $0 \neq \varphi_1 + \varphi_2 \notin M$, pois $\mathcal{A}(G_1) \cap \mathcal{A}(G_2) = \{0\}$. No entanto, dado $\varphi \in M$ arbitrário, temos que $\varphi \in \mathcal{A}(G_1) \subset M \cup \{0\}$ ou $\varphi \in \mathcal{A}(G_2) \subset M \cup \{0\}$, ou seja, M é pontual fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável.

Veremos no próximo exemplo que fortemente κ-algebrável não implica pontual fortemente κ-algebrável para qualquer $\kappa \geq 2$. Antes disso, precisamos estabelecer uma notação: dados $N \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in (c_0)^*$ escrevamos

$$\varphi^N := \underbrace{\varphi \cdot \varphi \cdots \varphi}_{N-vezes}, \text{ onde } \varphi^N(x) = \underbrace{\varphi(x) \cdot \varphi(x) \cdots \varphi(x)}_{N-vezes},$$

para todo $x \in c_0$, cujo produto é o usual ponto a ponto.

Exemplo 3.4.3. Seja I um conjunto de índices, com $\#I = \mathfrak{c}$, e seja $\{\Theta_i : i \in I\}$ uma partição (quase disjunta) de $\mathbb{N}$ formada por subconjuntos infinitos. Consideremos a família $G = \{\varphi_{\Theta_i} : i \in I\}$ formada pelas funções definidas como no exemplo anterior. Para cada $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}$ definamos $(\varphi_{\Theta_i})_x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \varphi_{\Theta_i}^j$. Note que $(\varphi_{\Theta_i})_x$ está bem definido pois $\operatorname{supp}(x)$ é finito para cada $x \in c_{00}$. Seja $i_1 \in I$ fixado. Pelo Lema 1.10.6 existe uma família $\{Y_x : x \in c_{00}\}$ de subconjuntos dois a dois disjuntos de $G \setminus \{\varphi_{\Theta_{i_1}}\}$ satisfazendo

$$G \setminus \{\varphi_{\Theta_{i_1}}\} = \bigcup_{x \in c_{00}\setminus\{0\}} Y_x \;\text{ com }\; \#Y_x = \mathfrak{c}.$$

Consideramos o conjunto

$$Z = \bigcup_{x \in c_{00}\setminus\{0\}} \left(\left\{ \left(\varphi_{\Theta_{i_1}}\right)_x \right\} \cup \mathcal{A}(Y_x) \right).$$

Note que $(\varphi_{\Theta_{i_1}})_x \notin \mathcal{A}(Y_x)$ para cada $x \in c_{00} \setminus \{0\}$. Como cada elemento da álgebra $\mathcal{A}(\varphi_{\Theta_{i_1}})$ pode ser escrito da forma $(\varphi_{\Theta_i})_x$ para algum $x \in c_{00}$, isso implica que $\mathcal{A}(\varphi_{\Theta_{i_1}}) \subset Z$. Mais que isso, o conjunto Z é fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável, visto que $\mathcal{A}(Y_x) \subset Z$ para cada $x \in c_{00}$.

Por outro lado, Z não é pontual fortemente κ-algebrável para cada $\kappa \geq 2$. Para mostrar isso, suponha que $\mathcal{B}$ seja uma subálgebra de $\mathcal{H}_\infty(B_{c_0})$ gerada por um conjunto algebricamente independente e de cardinalidade $\kappa \geq 2$ satisfazendo $\varphi_{\Theta_{i_1}} \in \mathcal{B} \subset Z$. Então afirmamos que:

$\mathcal{B} = \mathcal{A}(\varphi_{\Theta_{i_1}})$. Claro que $\mathcal{A}(\varphi_{\Theta_{i_1}}) \subset \mathcal{B}$, pois $\mathcal{B}$ é uma subálgebra. Agora, suponha com propósito de contradição que $\mathcal{B} \not\subset \mathcal{A}(\varphi_{\Theta_{i_1}})$, isto é, existe $\varphi_0 \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}(\varphi_{\Theta_{i_1}})$. Usaremos este φ_0 para fornecer um elemento em $\mathcal{B} \setminus Z$, e isso irá contradizer a inclusão $\mathcal{B} \subset Z$. Com este objetivo, seja $y \in c_{00} \setminus \{0\}$ fixado. Note que

$$\psi := \varphi_0 + (\varphi_{\Theta_{i_1}})_y \neq 0.$$

Com efeito, do contrário teríamos $\varphi_0 = -(\varphi_{\Theta_{i_1}})_y \in \mathcal{A}(\varphi_{\Theta_{i_1}})$, o que é um absurdo. Vejamos que $\psi \in \mathcal{B} \setminus Z$. A pertinência $\psi \in \mathcal{B}$ segue devido $\varphi_0 \in \mathcal{B}$, $(\varphi_{\Theta_{i_1}})_y \in \mathcal{A}(\varphi_{\Theta_{i_1}}) \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ ser uma subálgebra. Por fim, $\psi \notin Z$, pois um elemento em Z, ou é da forma $(\varphi_{\Theta_{i_1}})_x$ ou é um elemento da álgebra $\mathcal{A}(Y_x)$; mas ψ não é um elemento de nenhuma dessas formas.

Visto que se acontecer $\mathcal{B} \not\subset \mathcal{A}(\varphi_{\Theta_{i_1}})$ a inclusão $\mathcal{B} \subset Z$ é contrariada, então devemos ter $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\varphi_{\Theta_{i_1}})$. Portanto, pelo que já foi demonstrado anteriormente concluímos que $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\varphi_{\Theta_{i_1}})$. Em particular, $\mathcal{B}$ não pode ser gerada por um conjunto algebricamente independente G com $\#G \geq 2$. Isso mostra que Z não pode ser pontual fortemente κ-algebrável para qualquer $\kappa \geq 2$.

O principal teorema desta seção é o seguinte.

Teorema 3.4.4. *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Se E^* é separável então $\mathcal{F}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B))$ é pontual fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{F}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B))$. Antes de prosseguirmos para a demonstração propriamente do teorema, estabeleceremos algumas notações e definições. Seja $\delta > 0$ satisfazendo $\mathbb{D}_\delta(0) \subset \bigcap_{x \in \overline{B}^{**}} Cl(f, x)$. Considere sequências $(\lambda_\ell)_{\ell=1}^\infty$ em $\mathbb{D}_\delta(0)$ e $(x_p)_{p=1}^\infty$ em B tais que

$$\overline{\{\lambda_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}} = \overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \ \text{ e } \ \overline{\{x_p : p \in \mathbb{N}\}}^{w^*} = \overline{B}^{**}. \tag{3.18}$$

Note que a segunda igualdade de (3.18) é possível devido ao teorema de Goldstine e E ser separável. Pelo Lema 3.2.4 (b) existe uma sequência $(z_n)_{n=1}^\infty \subset B^{**}$ interpolante para $\mathcal{H}_\infty(B)$ tal que para $\ell, p \in \mathbb{N}$, podemos encontrar uma subsequência $(z_{n_j^{\ell,p}})_{j=1}^\infty$ de $(z_n)_{n=1}^\infty$ satisfazendo

$$z_{n_j^{\ell,p}} \xrightarrow{w^*} x_p \ \text{ e } \ \lim_{j\to\infty} f(z_{n_j^{\ell,p}}) = \lambda_\ell. \tag{3.19}$$

Para $\ell, p \in \mathbb{N}$, seja

$$\Theta_{\ell,p} := \{n_1^{\ell,p} < n_2^{\ell,p} < \cdots\}.$$

Além disso, como consequência do Lema 3.2.4, os conjuntos da família $\{\Theta_{\ell,p} : \ell, p \in \mathbb{N}\}$ podem ser escolhidos dois a dois disjuntos. Também, para cada par $(\ell, p) \in \mathbb{N}^2$, seja $\{\Theta_q^{\ell,p} : q \in \mathbb{N}\}$ uma partição (disjunta) de $\Theta_{\ell,p}$ formada por subconjuntos infinitos. Para $\ell, p, q \in \mathbb{N}$, escrevamos

$$\Theta_q^{\ell,p} := \{n_{q,1}^{\ell,p} < n_{q,2}^{\ell,p} < \cdots\}.$$

Seja $u : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{N}$ uma bijeção fixada e seja

$$\Theta := \bigcup_{(\ell,p)\in\mathbb{N}^2} \Theta_{\ell,p}.$$

Agora, definamos a bijeção

$$s : \mathbb{N}^3 \times \mathbb{Q}_+^* \longrightarrow \Theta \ \text{ por } \ s(j,\ell,p,r) := n_{u(r),j}^{\ell,p}.$$

Para $j, \ell, p \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{Q}_+^*$, também definamos

$$y_{r,j}^{\ell,p} := z_{s(j,\ell,p,r)} = z_{n_{u(r),j}^{\ell,p}}.$$

Com essas notações fixadas, a sequência $(y_{r,j}^{\ell,p})_{j=1}^{\infty}$ é uma subsequência de $(z_{n_j^{\ell,p}})_{j=1}^{\infty}$ para quaisquer $\ell, p \in \mathbb{N}$ e qualquer $r \in \mathbb{Q}_+^*$. A partir de agora, várias ideias são similares àquelas encontradas na demonstração em [7, Lemma 2.6].

Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\xi \in (0,1)$. Considere uma partição $k-1 = t_{\xi,0}^k < t_{\xi,1}^k < \cdots < t_{\xi,N_\xi^k}^k = k$, com $N_\xi^k \in \mathbb{N}$, do intervalo $[k-1,k]$ que satisfaz $|t_{\xi,i}^k - t_{\xi,i-1}^k| < \xi^k$. Escrevamos os intervalos $I_{\xi,i}^k := [t_{\xi,i-1}^k, t_{\xi,i}^k)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, N_\xi^k$. Como a sequência $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência interpolante para $\mathcal{H}_\infty(B)$, para cada $\xi \in (0,1)$ existe $g_\xi \in \mathcal{H}_\infty(B)$ tal que

$$\widetilde{g}_\xi(y_{r,j}^{\ell,p}) := \begin{cases} f(z_{n_j^{\ell,p}}) & \text{se } r \in I_{\xi,i}^k \text{ e } i \equiv 2 \pmod 3; \\ 1 & \text{se } r \in I_{\xi,i}^k \text{ e } i \equiv 1 \pmod 3; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.20}$$

Sejam $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m$ em $(0,1)$, com $m \in \mathbb{N}$. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\xi_{j+1}/\xi_j)^k > 3$ para cada $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Assim, para cada $j = 1, \ldots, m-1$ e cada $i = 1, \ldots, N_{\xi_{j+1}}^k$, o intervalo $I_{\xi_{j+1},i}^k$ contém pelo menos quatro pontos consecutivos da partição $\{t_{\xi_j,0}^k, t_{\xi_j,1}^k, \ldots, t_{\xi_j,N_{\xi_j}^k}^k\}$ de $[k-1,k]$. Para $j, \ell, p \in \mathbb{N}$, denote $C_0^{j,\ell,p} := 0$, $C_1^{j,\ell,p} := 1$ e $C_2^{j,\ell,p} := f(z_{n_j}^{\ell,p})$. Logo, dado $(i_1, \ldots, i_m) \in \{0,1,2\}^m$ segue de (3.20) que existe $r \in [k-1,k) \cap \mathbb{Q}$ tal que

$$(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r,j}^{\ell,p}), \ldots, \widetilde{g}_{\xi_m}(y_{r,j}^{\ell,p})) = (C_{i_1}^{j,\ell,p}, \ldots, C_{i_m}^{j,\ell,p}) \tag{3.21}$$

para todos $j, \ell, p \in \mathbb{N}$. A ideia de como aplica-se (3.20) para obter a igualdade em (3.21) pode ser vista na Observação 3.4.5.

Definamos $g_0 := f$. Finalmente, mostraremos que o conjunto $G := \{\widetilde{g}_\xi : \xi \in [0,1)\}$ é algebricamente independente e $\mathcal{A}(G) \subset \mathcal{F}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B)) \cup \{0\}$. Para isso, afirmamos que:

($*$) Para qualquer escolha $\xi_1 < \cdots < \xi_{m-1}$ em $[0,1)$ e todo polinômio $Q \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_m] \setminus \{0\}$ sem termo constante, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\overline{\mathbb{D}}_{\delta_1}(0) \subset Cl(Q(\widetilde{g}_{\xi_1}, \ldots, \widetilde{g}_{\xi_{m-1}}, \widetilde{f}), x_p)$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Note que a afirmação ($*$) e o Lema 1.9.4 implicam $\mathcal{A}(G) \subset \mathcal{F}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B)) \cup \{0\}$, pois $\overline{\mathbb{D}}_{\delta_1}(0) \subset$

$\bigcap_{x\in\overline{B}^{**}} Cl(Q(\widetilde{g}_{\xi_1},\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}},\widetilde{f}),x)$. Ela também assegura que o conjunto G é algebricamente independente, pois se $Q\in\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_m]$ é um polinômio qualquer que satisfaz $Q\neq 0$, então o polinômio $\widetilde{Q}=Q-Q(0)$ é não nulo e sem o termo constante. Logo por $(*)$, o fecho do polinômio $\widetilde{Q}(\widetilde{g}_{\xi_1},\ldots,\widetilde{g}_{\xi_m},\widetilde{f})$ contém o disco $\overline{\mathbb{D}}_{\delta_1}(0)$, e isso implica que $\widetilde{Q}(\widetilde{g}_{\xi_1},\ldots,\widetilde{g}_{\xi_m},\widetilde{f})$ é não constante, o que por sua vez implica $Q(\widetilde{g}_{\xi_1},\ldots,\widetilde{g}_{\xi_m},\widetilde{f})\neq 0$. Isso mostra que $\widetilde{g}_{\xi_1},\ldots,\widetilde{g}_{\xi_m},\widetilde{f}$ são algebricamente independentes.

Finalmente, iniciaremos a demonstração de $(*)$. Seja

$$Q\left(X_1,\ldots,X_m\right)=\sum_{\alpha\in\Lambda}c_\alpha X_1^{\alpha_1}\cdots X_m^{\alpha_m},\ \ c_\alpha\neq 0,$$

satisfazendo as hipóteses de $(*)$, onde $\Lambda\subset\mathbb{N}^m$ é finito. Escrevamos

$$\Lambda_1=\{\alpha\in\Lambda\ :\alpha_j=0,\ \ 1\leq j\leq m-1 \text{ e } \alpha_m\neq 0\}$$

e

$$\Lambda_2=\{\alpha\in\Lambda\ :\alpha_i\neq 0 \text{ para algum } 1\leq i\leq m-1\}.$$

Note que $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$. A demonstração da afirmação $(*)$ será dividida em dois casos.

CASO 1: Suponha que $\Lambda_1\neq\emptyset$. Escrevamos

$$Q(\widetilde{g}_{\xi_1},\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}},\widetilde{f})=\sum_{\alpha\in\Lambda_1}c_\alpha\widetilde{f}^{\alpha_m}+\sum_{\alpha\in\Lambda_2}c_\alpha\widetilde{g}_{\xi_1}^{\alpha_1}\cdots\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}^{\alpha_{m-1}}\widetilde{f}^{\alpha_m}. \tag{3.22}$$

Neste caso, fixe $(i_1,\ldots,i_m)\in\{0,1,2\}^m$ tal que $i_q=0$ para cada $q=1,\ldots,m$. Logo, segue de (3.21) que para este $(i_1,\ldots,i_m)\in\{0,1,2\}^m$, existem $k_0\in\mathbb{N}$ e $r_0\in[k_0-1,k_0)\cap\mathbb{Q}$ satisfazendo

$$(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p}))=(C_{i_1}^{j,\ell,p},\ldots,C_{i_{m-1}}^{j,\ell,p},\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p}))$$

para todos $j,\ell,p\in\mathbb{N}$. Logo, para cada $\alpha\in\Lambda_2$ temos

$$(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p}))^\alpha=(C_{i_1}^{j,\ell,p})^{\alpha_1}\cdots\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})^{\alpha_m}=0, \tag{3.23}$$

o que implica por (3.22) que

$$Q(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p}))=\sum_{\alpha\in\Lambda_1}c_\alpha\widetilde{f}^{\alpha_m}(y_{r_0,j}^{\ell,p}) \tag{3.24}$$

para todos $j,\ell,p\in\mathbb{N}$. Segue de (3.24) que o polinômio $P:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ definido por $P(z)=\sum_{\alpha\in\Lambda_1}c_\alpha z^{\alpha_m}$ satisfaz

$$Q(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p}))=P(\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})) \tag{3.25}$$

para todos j,ℓ,p. Por construção, a sequência $(y_{r_0,j}^{\ell,p})_{j=1}^\infty$ é uma subsequência de $(z_{n_j^{\ell,p}})_{j=1}^\infty$.

Logo, de (3.19), obtemos para $\ell, p \in \mathbb{N}$ que

$$y_{r_0,j}^{\ell,p} \xrightarrow{w^*} x_p \ \text{ e } \ \lim_{j\to\infty} f(y_{r_0,j}^{\ell,p}) = \lambda_\ell. \tag{3.26}$$

Note que P é não constante. Como $P(0) = 0$, segue do Teorema da Aplicação Aberta (aplicado a P) que existe $\delta_1 > 0$ tal que $\mathbb{D}_{\delta_1}(0) \subset P(\mathbb{D}_\delta(0))$. Para $\ell, p \in \mathbb{N}$, segue de (3.25) e (3.26) que

$$P(\lambda_\ell) \ = \ \lim_{j\to\infty} P(\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})) = \lim_{j\to\infty} Q\left(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}), \ldots, \widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y_{r_0,j}^{\ell,p}), \widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})\right),$$

e como por (3.19) temos $y_{r_0,j}^{\ell,p} \xrightarrow{w^*} x_p$, isso implica que

$$\mathbb{D}_{\delta_1}(0) \subset P(\mathbb{D}_\delta(0)) \subset Cl(Q(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}), \ldots, \widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y_{r_0,j}^{\ell,p}), \widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})), x_p).$$

Como o polinômio P não depende de p, então δ_1 não depende de p. Portanto, isso mostra o CASO 1.

CASO 2: Suponha que $\Lambda_1 = \emptyset$. Neste caso, temos

$$Q(\widetilde{g}_{\xi_1}, \ldots, \widetilde{g}_{\xi_{m-1}}, \widetilde{f}) = \sum_{\alpha\in\Lambda_2} c_\alpha \widetilde{g}_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \widetilde{g}_{\xi_{m-1}}^{\alpha_{m-1}} \widetilde{f}^{\alpha_m}, \tag{3.27}$$

e $\Lambda_2 \neq \emptyset$ pois $Q \neq 0$. Fixe um $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m) \in \Lambda_2$ tal que

$$\#\mathrm{supp}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{m-1}) \leq \#\mathrm{supp}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$$

para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Lambda_2$. Seja

$$\Lambda_0 := \{\alpha \in \Lambda_2 : \#\mathrm{supp}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{m-1}) = \#\mathrm{supp}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})\}$$

munido da seguinte ordem: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) < (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ se, e somente se, existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\alpha_{i_0} + \alpha_m < \beta_{i_0} + \beta_m$ e $\alpha_i + \alpha_m = \beta_i + \beta_m$ se $i \geq i_0 + 1$. Veja que $\Lambda_0 \neq \emptyset$ pois $\Lambda_2 \neq \emptyset$. Denotemos $\Lambda_0 = \{\beta_1 < \cdots < \beta_l\}$ com $\beta_i = (\beta_1^i, \ldots, \beta_m^i)$ para cada $i = 1, \ldots, l$. Note que $l = \#\Lambda_0 \leq \#\Lambda_2$. Se $l > 1$, então β_l é o elemento maximal de Λ_0, com a ordem introduzida, logo existe $m_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\beta_{m_0}^{l-1} + \beta_m^{l-1} < \beta_{m_0}^l + \beta_m^l$ e $\beta_i^{l-1} + \beta_m^{l-1} = \beta_i^l + \beta_m^l$ para cada $i \geq m_0 + 1$. Caso Λ_0 tenha somente um elemento, consideramos $m_0 \in \mathrm{supp}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m)$ qualquer. Agora, fixe $(i_1, \ldots, i_m) \in \{0, 1, 2\}^m$ tal que $i_{m_0} = 2$, $i_q = 1$ se $q \in \mathrm{supp}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{m-1}, \tilde{\alpha}_m) \setminus \{m_0\}$ e $i_q = 0$ se $q \notin \mathrm{supp}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{m-1}, \tilde{\alpha}_m)$. Logo, segue de (3.21) que para este $(i_1, \ldots, i_m) \in \{0, 1, 2\}^m$, existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $r_0 \in [k_0 - 1, k_0) \cap \mathbb{Q}$ tal que vale a igualdade

$$(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}), \ldots, \widetilde{g}_{\xi_m}(y_{r_0,j}^{\ell,p})) = (C_{i_1}^{j,\ell,p}, \ldots, C_{i_m}^{j,\ell,p}), \tag{3.28}$$

para todos $j, \ell, p \in \mathbb{N}$. Seja $\alpha \in \Lambda_0$. Agora, precisamos considerar duas situações com relação a m_0. A primeira é se $1 \leq m_0 \leq m-1$. Para esta caso, temos por (3.28) que

$$\begin{aligned}(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p}))^{\alpha} &= (C_{i_1}^{j,\ell,p})^{\alpha_1}\cdots(C_{i_{m_0}}^{j,\ell,p})^{\alpha_{m_0}}\cdots\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})^{\alpha_m}\\ &= \widetilde{f}(z_{n_j^{\ell,p}})^{\alpha_{m_0}}\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})^{\alpha_m},\end{aligned} \tag{3.29}$$

para todos $j,\ell,p \in \mathbb{N}$. A segunda situação é se $m_0 = m$. Neste caso, temos por (3.28) que

$$\begin{aligned}(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p}))^{\alpha} &= (C_{i_1}^{j,\ell,p})^{\alpha_1}\cdots\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})^{\alpha_{m_0}}\\ &= \widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})^{\alpha_{m_0}},\end{aligned} \tag{3.30}$$

para todos $j,\ell,p \in \mathbb{N}$.

Se $\alpha \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_0$, então existe $1 \leq q \leq m-1$ tal que $q \in \operatorname{supp}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}) \setminus \operatorname{supp}(\tilde{\alpha}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_{m-1})$. Em particular, $q \notin \operatorname{supp}(\tilde{\alpha}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_{m-1},\tilde{\alpha}_m)$, pois $q < m$. Assim, segue por (3.28) que

$$(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p}))^{\alpha} = (C_{i_1}^{j,\ell,p})^{\alpha_1}\cdots(C_{i_q}^{j,\ell,p})^{\alpha_q}\cdots\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})^{\alpha_m} = 0. \tag{3.31}$$

Voltando a situação em que pode acontecer de $1 \leq m_0 \leq m-1$, segue de (3.27), (3.29) e (3.31) que

$$Q(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})) = \sum_{\alpha\in\Lambda_0} c_\alpha \widetilde{f}(z_{n_j^{\ell,p}})^{\alpha_{m_0}}\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})^{\alpha_m}, \tag{3.32}$$

para todos $j,\ell,p \in \mathbb{N}$. Logo, podemos definir o polinômio $R_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $R_1(z) = \sum_{\alpha\in\Lambda_0} c_\alpha z^{\alpha_{m_0}+\alpha_m}$. Recordamos que por construção, a sequência $(y_{r_0,j}^{\ell,p})_{j=1}^{\infty}$ é uma subsequência de $(z_{n_j^{\ell,p}})_{j=1}^{\infty}$. Logo, de (3.19), obtemos para $\ell,p \in \mathbb{N}$ que

$$y_{r_0,j}^{\ell,p} \xrightarrow{w^*} x_p \text{ e } \lim_{j\to\infty} f(y_{r_0,j}^{\ell,p}) = \lim_{j\to\infty} f(z_{n_j^{\ell,p}}) = \lambda_\ell. \tag{3.33}$$

Assim, para $\ell,p \in \mathbb{N}$, segue de (3.32) e (3.33) que

$$\begin{aligned}R_1(\lambda_\ell) &= \sum_{\alpha\in\Lambda_0} c_\alpha \lambda_\ell^{\alpha_{m_0}+\alpha_m} = \sum_{\alpha\in\Lambda_0} c_\alpha \lambda_\ell^{\alpha_{m_0}}\lambda_\ell^{\alpha_m}\\ &= \lim_{j\to\infty}\left(\sum_{\alpha\in\Lambda_0} c_\alpha f(z_{n_j^{\ell,p}})^{\alpha_{m_0}} f(y_{r_0,j}^{\ell,p})^{\alpha_m}\right)\\ &= \lim_{j\to\infty} Q(\widetilde{g}_{\xi_1}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y_{r_0,j}^{\ell,p}),\widetilde{f}(y_{r_0,j}^{\ell,p})).\end{aligned} \tag{3.34}$$

Note que R_1 é não constante, pois o termo cuja potência máxima é $z^{\beta_{m_0}^l+\beta_m^l}$ aparece uma única vez. Além disso, $R_1(0) = 0$.

Também retornando à situação em que pode ocorrer $m_0 = m$, segue de (3.27), (3.30) e

(3.31) que

$$Q(\widetilde{g}_{\xi_1}(y^{\ell,p}_{r_0,j}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y^{\ell,p}_{r_0,j}),\widetilde{f}(y^{\ell,p}_{r_0,j}))=\sum_{\alpha\in\Lambda_0}c_\alpha\widetilde{f}(y^{\ell,p}_{r_0,j})^{\alpha_{m_0}}. \tag{3.35}$$

Logo, podemos definir um polinômio $R_2:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ por $R_2(z)=\sum_{\alpha\in\Lambda_0}c_\alpha z^{\alpha_{m_0}}$. A sequência $(y^{\ell,p}_{r_0,j})_{j=1}^{\infty}$ é uma subsequência de $(z_{n_j^{\ell,p}})_{j=1}^{\infty}$. Logo, de (3.19), obtemos para $\ell,p\in\mathbb{N}$ que

$$y^{\ell,p}_{r_0,j}\overset{w^*}{\longrightarrow}x_p \ \text{ e } \ \lim_{j\to\infty}f(y^{\ell,p}_{r_0,j})=\lambda_\ell. \tag{3.36}$$

Assim, para $\ell,p\in\mathbb{N}$, segue de (3.35) e (3.36) que

$$\begin{aligned} R_2(\lambda_\ell) &= \sum_{\alpha\in\Lambda_0}c_\alpha\lambda_\ell^{\alpha_{m_0}}=\lim_{j\to\infty}\left(\sum_{\alpha\in\Lambda_0}c_\alpha f(y^{\ell,p}_{r_0,j})^{\alpha_{m_0}}\right)\\ &= \lim_{j\to\infty}Q(\widetilde{g}_{\xi_1}(y^{\ell,p}_{r_0,j}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y^{\ell,p}_{r_0,j}),\widetilde{f}(y^{\ell,p}_{r_0,j})). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Note que R_2 é não constante, pois o termo cuja potência máxima é $z^{\beta^l_{m_0}}$ aparece uma única vez. Além disso, $R_2(0)=0$. As situações $1\leq m_0\leq m-1$ e $m_0=m$ são excludentes, isto é, ou ocorre uma ou ocorre a outra. No entanto, em qualquer uma delas, segue de (3.34) e (3.37) que podemos obter um polinômio não constante $R:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $R(0)=0$ e

$$R(\lambda_\ell)=\lim_{j\to\infty}Q(\widetilde{g}_{\xi_1}(y^{\ell,p}_{r_0,j}),\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}}(y^{\ell,p}_{r_0,j}),\widetilde{f}(y^{\ell,p}_{r_0,j})), \tag{3.38}$$

para todos $\ell,p\in\mathbb{N}$. Logo, pelo Teorema da Aplicação Aberta (aplicado a R) existe $\delta_1>0$ tal que $\mathbb{D}_{\delta_1}(0)\subset R(\mathbb{D}_\delta(0))$. Como de (3.19) temos $y^{\ell,p}_{r_0,j}\overset{w^*}{\longrightarrow}x_p$, segue de (3.38) que

$$\overline{\mathbb{D}}_{\delta_1}(0)\subset\overline{R(\mathbb{D}_\delta(0))}\subset Cl(Q(\widetilde{g}_{\xi_1},\ldots,\widetilde{g}_{\xi_{m-1}},\widetilde{f}),x_p).$$

Veja que R não depende de p, logo δ_1 não depende de p. Portanto isso encerra a demonstração do CASO 2. Isto conclui a demonstração da afirmação $(*)$ e, portanto, do teorema. ■

Todas as notações na observação a seguir que não forem definidas, são como àquelas da demonstração do Teorema 3.4.4. Além disso, ressaltamos que essa ideia já foi realizada em [7, Lemma 2.6].

Observação 3.4.5. Para deixar um pouco mais claro como aplica-se (3.20) na obtenção de (3.21), o melhor talvez seja o desenho da Figura 3.1, que ilustra a situação para $m=2$. Na ilustração da Figura 3.1, para cada $q=\eta,\eta+1,\eta+2$, os símbolos A_1^q, A_2^q e A_3^q, representarão faixas consecutivas da forma $I^k_{\xi_1,M_q}\times\mathbb{N}$, $I^k_{\xi_1,M_q+1}\times\mathbb{N}$ e $I^k_{\xi_1,M_q+2}\times\mathbb{N}$, respectivamente. Desse modo, o desenho indica que para k grande, existirá uma faixa $[k-1,k]\times\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{N}$ contendo pelo menos três faixas consecutivas da forma $I^k_{\xi_2,\eta}\times\mathbb{N}$, $I^k_{\xi_2,\eta+1}\times\mathbb{N}$ e $I^k_{\xi_2,\eta+2}\times\mathbb{N}$, sendo que cada faixa $I^k_{\xi_2,q}\times\mathbb{N}$ contém três faixas consecutivas da forma A_1^q, A_2^q e A_3^q para cada $q=\eta,\eta+1,\eta+2$. (Note que a existência de um k deste tipo é devido $\lim\limits_{k\to\infty}(\xi_2/\xi_1)^k=\infty$).

Devido ao supracitado, se tomarmos $(i_1, i_2) \in \{0,1,2\}^2$, devemos ter: ou $\eta \equiv i_1(\text{mod } 3)$, ou $\eta+1 \equiv i_1(\text{mod } 3)$, ou $\eta+2 \equiv i_1(\text{mod } 3)$. Também, para cada $q = \eta, \eta+1, \eta+2$, devemos ter: ou $M_q \equiv i_2(\text{mod } 3)$, ou $M_q+1 \equiv i_2(\text{mod } 3)$, ou $M_q+2 \equiv i_2(\text{mod } 3)$. Digamos, sem perda de generalidade que $\eta \equiv i_1(\text{mod } 3)$ e $M_\eta \equiv i_2(\text{mod } 3)$. Consideramos a bijeção

$$s : \mathbb{N}^3 \times \mathbb{Q}_+^* \longrightarrow \Theta\,, \quad s(j,\ell,p,r) = n_{u(r),j}^{\ell,p}$$

(veja bijeções s e u na demonstração do Teorema 3.4.4). Relembramos que definimos $y_{r,j}^{\ell,p} := z_{n_{u(r),j}^{\ell,p}}$ para todos $j,\ell,p \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{Q}_+^*$, mas para uma melhor explicação do que segue, escrevamos $z_{n_{u(r),j}^{\ell,p}}$ ao invés de $y_{r,j}^{\ell,p}$. Note que para $\ell,p \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{Q}_+^*$, cada índice da sequência $(z_{n_{u(r),j}^{\ell,p}})_{j=1}^\infty$ está sendo identificado com $\mathbb{N}^3 \times \mathbb{Q}_+^*$ via a bijeção s. Segue que ao tomarmos as subsequência $(z_{n_{u(r),j}^{\ell,p}})_{j=1}^\infty$ de $(z_{n_j^{\ell,p}})_{l=1}^\infty$ cujos conjuntos de índices são "levados" pela bijeção s^{-1} no conjunto $\mathbb{N}^3 \times I_{\xi_1,\eta}^k \subset \mathbb{N}^3 \times I_{\xi_2,M_\eta}^k$, obtemos por (3.20) que

$$(\widetilde{g}_{\xi_1}(z_{n_{u(r),j}^{\ell,p}}), \widetilde{g}_{\xi_2}(z_{n_{u(r),j}^{\ell,p}}) = (C_{i_1}^{j,\ell,p}, C_{i_2}^{j,\ell,p})$$

para todos $j,\ell,p \in \mathbb{N}$ e $r \in I_{\xi_1,\eta}^k$. Isso mostra o caso para $m=2$.

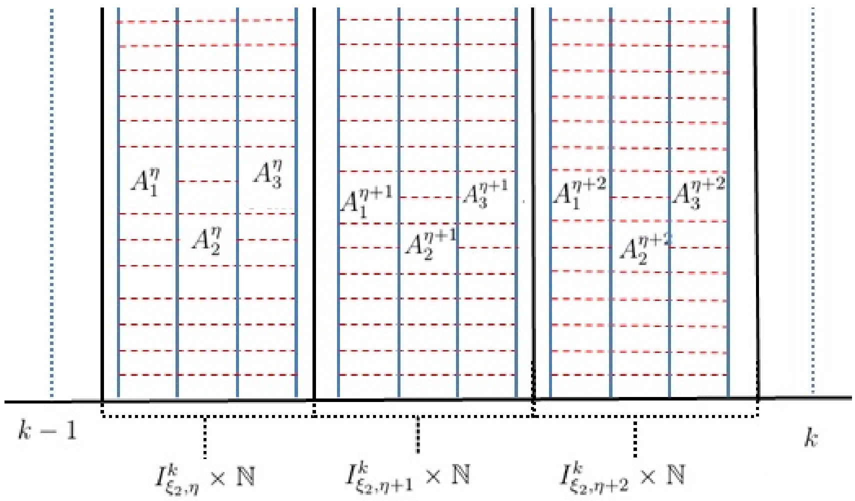

Figura 3.1: Ilustração de (3.21) para o caso $m=2$

Com uma demonstração similar àquela feita no Teorema 3.4.4, mas usando o Lema 3.2.4 (a), obtemos o resultado a seguir.

Teorema 3.4.6. *Se $E := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$, então o conjunto $\mathcal{F}_S(\mathcal{H}_\infty(B))$ é pontual fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável.*

O resultado a seguir é uma consequência da Proposição 3.2.5 e do Teorema 3.4.6.

Teorema 3.4.7. *O conjunto $\mathscr{I}$ é fortemente pontualmente $\mathfrak{c}$-algebrável.*

Segue do Teorema 3.4.6 que o conjunto $\mathcal{F}_\mathbb{T}(\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}))$ é pontual fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável. Como a transformada de Bohr é um isomorfismo linear multiplicativo, segue da Proposição 3.2.5 que $\mathscr{I}$ é pontual fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável.

3.5 Estruturas lineares e algébricas no conjunto de funções holomorfas com cluster radial grande

No decorrer dessa seção consideraremos $E := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$, S a esfera unitária de E centrada na origem e $M \subset S$ um conjunto não vazio. Além disso, algumas técnicas usadas são muito similares àquelas usadas nas seções anteriores; por isso, seremos mais concisos nas demonstrações e iremos apenas indicar as modificações.

O símbolo $\mathcal{L}_M$ denota o conjunto das funções $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$ tais que existe um disco (fixo) centrado na origem que está contido em $Clr(f,z)$ para todo $z \in M$. Mais precisamente,

$$\mathcal{L}_M = \{f \in \mathcal{H}_\infty(B) : \cap_{z\in M} Clr(f,z) \text{ contém um disco centrado na origem}\}.$$

Pelo Teorema 1.9.11, o conjunto $\mathcal{L}_M$ é não vazio sempre que M for discreto. Num resultado desta seção, adaptamos a construção de [7] para mostrar que para cada subconjunto enumerável M de S, o conjunto $\mathcal{L}_M$ é não vazio. Isso é melhor do que o resultado de Matsushima, para subconjuntos discretos de S, pois esses conjuntos são enumeráveis, mas a recíproca em geral é falsa. Iremos além, e mostraremos que $\mathcal{L}_M \cup \{0\}$ contém estruturas lineares e algébricas.

Também consideramos o conjunto $\mathcal{T}_M$ das funções $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$ tais que o conjunto de cluster radial $Clr(f,z)$ é total para todo $z \in M$, isto é, $Clr(f,z) = \overline{g(B)}$ para todo $z \in M$. Mais precisamente,

$$\mathcal{T}_M = \{f \in \mathcal{H}_\infty(B) : Clr(f,z) = \overline{g(B)} \text{ para todo } z \in M\}.$$

Com relação ao conjunto $\mathcal{T}_M$ mostraremos que a menos da função nula, ele contém uma cópia isomorfa de ℓ_1, quando M for enumerável.

A demonstração do próximo lema segue linha por linha demonstração do Lema 3.2.1.

Lema 3.5.1. *Sejam $g, g_1, g_2, \ldots \in \mathcal{H}_\infty(B)$ tais que a sequência $(g_n)_{n=1}^\infty$ converge para g em $\mathcal{H}_\infty(B)$. Além disso, seja $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de números positivos e $\delta > 0$ tais que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta$. Se existem $z \in S$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\overline{\mathbb{D}}_{\delta_n}(0) \subset Clr(g_n, z)$ para todo $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, então $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset Clr(g,z)$.*

Lema 3.5.2. *Sejam $M \subset S$ um conjunto enumerável e $f \in \mathcal{H}_\infty(B)$ tal que $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \bigcap_{x\in M} Clr(f,x)$ para algum $\delta > 0$. Então existem uma sequência interpolante $(z_k)_{k=1}^\infty$ para $\mathcal{H}_\infty(B)$ e uma sequência $(t_k)_{k=1}^\infty \subset (0,1)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) Para cada $(x,\lambda) \in M \times \overline{\mathbb{D}}_\delta(0)$ podemos encontrar uma subsequência $(t_{k_j})_{j=1}^\infty$ de $(t_k)_{k=1}^\infty$ tal que $\lim_{j\to\infty} t_{k_j} = 1$ e uma subsequência $(z_{k_j})_{j=1}^\infty$ de $(z_k)_{k=1}^\infty$ tal que $z_{k_j} = t_{k_j} x$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\lim_{j\to\infty} f(z_{k_j}) = \lambda$.

(b) Existe uma sequência $(\lambda_\ell)_{\ell=1}^\infty \subset \mathbb{D}_\delta(0)$ com $\overline{\{\lambda_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}} = \overline{\mathbb{D}}_\delta(0)$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ e $\ell, p \in \mathbb{N}$ com $(x, \lambda_\ell) \neq (y, \lambda_p)$, as subsequências $(z_{k_j})_{j=1}^\infty$ e $(z_{m_j})_{j=1}^\infty$

encontradas para (x, λ_ℓ) e (y, λ_p), respectivamente, satisfazendo (a), têm suportes quase disjuntos, isto é, o conjunto $\{k_j : j \in \mathbb{N}\} \cap \{m_j : j \in \mathbb{N}\}$ é finito.

Demonstração. (a) Seja $(\lambda_\ell)_{\ell=1}^\infty$ uma sequência em $\mathbb{D}_\delta(0)$ tal que $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) = \overline{\{\lambda_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}}$ e seja $M = \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$. Segue da inclusão $\overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \cap_{j=1}^\infty Clr(f, x_j)$ que para cada $j, \ell \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $(t_k^{j,\ell})_{k=1}^\infty \subset (0,1)$ satisfazendo $\lim\limits_{k\to\infty} t_k^{j,\ell} = 1$ e $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_k^{j,\ell} x_j) = \lambda_\ell$. Para $j, \ell \in \mathbb{N}$, escreveremos $w_k^{j,\ell} = t_k^{j,\ell} x_j$, e como $\lim\limits_{k\to\infty} \|t_k^{j,\ell} x_j\| = 1$, obtemos $\lim\limits_{k\to\infty} f(w_k^{j,\ell}) \to \lambda_\ell$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \|w_k^{\ell,p}\| = 1$. A partir deste ponto, a demonstração segue de modo similar a do Lema 3.2.4, e portanto será omitida. A demonstração de (b) também segue de modo análogo. Dito isso, aqui encerramos. ■

Existem pontos $z \in S$ tal que o conjunto de cluster radial $Clr(f, z)$ se reduz a um único ponto [78, Theorem 9, p. 37]. Apesar disso, se $M \subset S$ é um subconjunto enumerável, então $\mathcal{L}_M \cup \{0\}$ contém estruturas lineares e algébricas. Veremos isso nos resultados a seguir, que são inéditos.

Teorema 3.5.3. *Se $M \subset S$ é um conjunto enumerável, então $\mathcal{L}_M \cap \mathcal{T}_M$ (a menos da função nula) contém uma cópia isomorfa de ℓ_1.*

Demonstração. Sejam $M = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$ e $\{\Theta_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma partição (disjunta aos pares) de $\mathbb{N}$ formada por subconjuntos infinitos. De modo análogo, como feito na demonstração do Lema 3.2.4, podemos construir uma sequência interpolante $(x_k)_{k=1}^\infty$ para $\mathcal{H}_\infty(B)$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência $(x_n)_{n\in\Theta_k}$ de $(x_k)_{k=1}^\infty$ satisfazendo $x_n = t_n z_k$ para todo $n \in \Theta_k$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z_k$, onde $(t_k)_{k=1}^\infty \subset (0,1)$. Para cada k, seja $\{\Theta_{k,n} : n \in \mathbb{N}\}$ uma partição (disjunta) de Θ_k formada por subconjuntos infinitos. Para $k, n \in \mathbb{N}$ escreveremos

$$\Theta_{k,n} := \{m_{k,n,1} < m_{k,n,2} < \cdots\}.$$

Do mais, enumeremos o conjunto de todos os números racionais $\mathbb{Q}$ por $\{t_p : p \in \mathbb{N}\}$, consideremos uma sequência $(a_k)_{k=1}^\infty$ em $\mathbb{D}_C(0)$ ($C \geq 1$ é a contante de interpolação da sequência $(x_k)_{k=1}^\infty$), cujo conjunto de todos os seus pontos de acumulação seja $\overline{\mathbb{D}}$, e $(\mathfrak{p}_k)_{k=1}^\infty$ a sequência de números primos. Como a sequência $(x_k)_{k=1}^\infty$ é interpolante, para $j, k, n, p \in \mathbb{N}$ seja $f_j \in \mathcal{H}_\infty(B)$ satisfazendo $\tilde{f}_j(x_{m_{k,n,p}}) := \mathfrak{p}_j^{it_p} \cdot a_n$, com $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \|\tilde{f}_j\| \leq C$. A aplicação linear $T : \ell_1 \longrightarrow \mathcal{H}_\infty(B)$ definida por

$$T\left((\lambda_j)_{j=1}^\infty\right) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j f_j$$

é um isomorfismo sobre sua imagem que satisfaz $\left\|T\left((\lambda_j)_{j=1}^\infty\right)\right\| = C \cdot \left\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\right\|$, para toda $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$. Além disso, dados $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1 \setminus \{0\}$, $N \in \mathbb{N}$, sejam $g = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j f_j$ e $g_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j f_j$. Note que de modo similar à demonstração realizada na Proposição 3.3.1 (a), existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{N_0} |\lambda_n| \neq 0$ e $\mathbb{D}_{\|(\lambda_n)_{n=1}^N\|_{\ell_1^N}}(0) \subset \bigcap_{k=1}^\infty Clr(g_N, z_k)$ para todos $k \in \mathbb{N}$ e $N \geq N_0$. Como $\|g_N - g\| \xrightarrow{N\to\infty} 0$, segue do Lema 3.5.1 que $\overline{\mathbb{D}}_{\|(\lambda_n)_{n=1}^\infty\|_1}(0) \subset \bigcap_{k=1}^\infty Clr(g, z_k)$.

Com isso, podemos concluir que

$$\overline{g(B)} \subset \overline{\mathbb{D}}_{\|(\lambda_n)_{n=1}^\infty\|_1}(0) \subset Clr(g, z_k) \subset \overline{g(B)},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso mostra que $g \in \mathcal{L}_M \cap \mathcal{T}_M$ e portanto $T(\ell_1) \setminus \{0\} \subset \mathcal{L}_M \cap \mathcal{T}_M$, o que encerra a demonstração. ∎

Teorema 3.5.4. *Se $M \subset S$ é um conjunto enumerável, então $\mathcal{L}_M$ é pontual fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{L}_M$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{D}_\delta(0) \subset \bigcap_{x\in M} Clr(f, x)$. Considere $M = \{x_p : p \in \mathbb{N}\}$. Pelo Lema 3.5.2 existem uma sequência $(z_k)_{k=1}^\infty$ interpolante para $\mathcal{H}_\infty(B)$ e uma sequência $(t_k)_{k=1}^\infty \subset (0, 1)$, tal que para essas sequências, existe uma sequência $(\lambda_\ell)_{\ell=1}^\infty \subset \mathbb{D}_\delta(0)$ satisfazendo $\overline{\{\lambda_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}} = \overline{\mathbb{D}}_\delta(0)$, e além disso, para $\ell, p \in \mathbb{N}$ podemos encontrar uma subsequência $(t_{k_j^{\ell,p}})_{j=1}^\infty$ de $(t_k)_{k=1}^\infty$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} t_{k_j^{\ell,p}} = 1$ e uma subsequência $(z_{k_j^{\ell,p}})_{j=1}^\infty$ de $(z_k)_{k=1}^\infty$ tal que $z_{k_j^{\ell,p}} = t_{k_j^{\ell,p}} x_p$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $\lim\limits_{j\to\infty} f(z_{k_j^{\ell,p}}) = \lambda_\ell$. Agora, para cada par $(\ell, p) \in \mathbb{N}^2$ seja

$$\Theta_{p,\ell} := \{n_1^{\ell,p} < n_2^{\ell,p} < \cdots\}.$$

Note que ainda pelo Lema 3.5.2 (b), os conjuntos da família $\{\Theta_{\ell,p} : \ell, p \in \mathbb{N}\}$ podem ser escolhidos dois a dois disjuntos. Ademais, para cada par $(\ell, p) \in \mathbb{N}^2$, seja $\{\Theta_q^{\ell,p} : q \in \mathbb{N}\}$ uma partição (disjunta) de $\Theta_{\ell,p}$ formada por subconjuntos infinitos. A partir deste ponto, a demonstração segue de modo similar àquela do Teorema 3.4.4. ∎

O último resultado desta seção, consiste em investigar a existência de estrutura algébrica no conjunto

$$\mathcal{J}_D = \{f \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}) : \#Clr(f, e^{it}) = \mathfrak{c} \text{ para cada } e^{it} \in M\},$$

onde M é um subconjunto de $\mathbb{T}$. Pelo Teorema 1.9.10 o conjunto $Clr(f, \mathrm{e}^{it})$ é conexo. Logo, se existir $\mu_1, \mu_2 \in Clr(f, \mathrm{e}^{it})$, com $\mu_1 \neq \mu_2$, então $\#Clr(f, \mathrm{e}^{it}) = \mathfrak{c}$, pois conjuntos conexos em $\mathbb{C}$ com mais de um ponto tem cardinalidade $\mathfrak{c}$ (podemos considerar a curva ligando os pontos μ_1 e μ_2 e aplicar o Teorema do Valor Intermediário sobre a parte real ou a parte imaginária de μ_1 e μ_2, pois uma dessas partes são distintas visto que $\mu_1 \neq \mu_2$). Do mais, pelo Teorema 1.9.12 o conjunto $\mathcal{J}_M$ é não vazio sempre que M tem medida de Lebesgue unidimensional nula. Isso motiva o seguinte teorema.

Teorema 3.5.5. *Se $M \subset \mathbb{T}$ é um conjunto de medida de Lebesgue unidimensional nula, então o conjunto $\mathcal{J}_M$ é fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{J}_M$ fixa. Usaremos o Teorema 1.8.9 para mostrar que $\mathcal{J}_M$ é fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável. Para isso, mostraremos que $\varphi \circ f \in \mathcal{J}_M$ para toda $\varphi \in \mathcal{E}$, onde $\mathcal{E}$ é o conjunto de funções do tipo exponencial. Com efeito, seja $\varphi(s) = \sum_{j=1}^N a_j \exp(b_j s) \in \mathcal{E}$, onde $N \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, com $b_1, \ldots, b_N$ distintos. Seja $\mathrm{e}^{it} \in M$ fixado. Para cada $\mu \in Clr(f, \mathrm{e}^{it})$, existe uma sequência $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$ e $\lim_{n\to\infty} f(t_n\mathrm{e}^{it}) = \mu$. Note que

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi \circ f)(t_n\mathrm{e}^{it}) = \sum_{j=1}^{N} a_j \exp(b_j\mu). \tag{3.39}$$

A função $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(z) = \sum_{j=1}^{N} a_j \exp(b_j z)$ é inteira e não constante (isso é mostrado na demonstração de [10, Theorem 7.5.1]). Pelo Teorema 1.9.10, o conjunto $Clr(f, \mathrm{e}^{it})$ é limitado, logo existe $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo tal que $Clr(f, \mathrm{e}^{it}) \subset \Omega$. Também pelo Teorema 1.9.10, o conjunto $Clr(f, \mathrm{e}^{it})$ é compacto e, além disso, e infinito, pois $\#Clr(f, \mathrm{e}^{it}) = \mathfrak{c}$. Afirmamos que h não pode ser constante em $Clr(f, \mathrm{e}^{it})$. Com efeito, suponha com propósito de absurdo, que exista $b \in \mathbb{C}$ tal que $h(\mu) = b$ para todo $\mu \in Clr(f, \mathrm{e}^{it})$. Logo, considerando a função holomorfa $\widetilde{h} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\widetilde{h} := h|_{\Omega} - b$, podemos considerar uma sequência $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset Clr(f, \mathrm{e}^{it})$ de pontos distintos que satisfaz $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu \in Clr(f, \mathrm{e}^{it}) \subset \Omega$. Como $\widetilde{h}(\mu_n) = h(\mu_n) - b = b - b = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue do Teorema 1.10.11 que $\widetilde{h}$ é nula em Ω, e portanto h é constante em Ω. Logo, a função inteira h é nula. Isso é uma absurdo, pois h é uma função inteira não constante. Como h não é constante em $Clr(f, \mathrm{e}^{it})$, existem $\mu_1, \mu_2 \in Clr(f, \mathrm{e}^{it})$ tais que $h(\mu_1) \neq h(\mu_2)$. Segue de (3.39) que $h(\mu_1), h(\mu_2) \in Clr(\varphi \circ f, \mathrm{e}^{it})$. Ademais, pelo que foi comentado após a definição de $\mathcal{J}_M$, temos $\#Clr(\varphi \circ f, \mathrm{e}^{it}) = \mathfrak{c}$ e portanto $\varphi \circ f \in \mathcal{J}_M$. Como $\varphi \in \mathcal{E}$ é qualquer, o teorema está demonstrado. ■

3.6 Comentários e problemas

O conceito de pontual fortemente κ-algebrável foi inspirado nos trabalhos [53, 72]. Eles propuseram este tipo de estudo para espaços vetoriais, e nós estamos propondo esse estudo também para álgebras. À luz do trabalho [53] e de nossas pesquisas, sugerimos os seguintes problemas:

Problema 3.6.1. *Podemos desenvolver um estudo similar ao que é feito em [53] para algebrabilidade?*

Problema 3.6.2. *Seja $E := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$. O conjunto $\mathcal{G}_S(\mathcal{H}_\infty(B))$ é algebrável?*

Problema 3.6.3. *Seja E um espaço de Banach separável de dimensão infinita. O conjunto $\mathcal{G}_{\overline{B}^{**}}(\mathcal{H}_\infty(B))$ é algebrável?*

Por fim, considere o conjunto

$$\mathscr{I}^{(N)} = \{D \in \mathscr{H}_\infty^{(N)} : \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } \overline{\mathbb{D}}_\delta(0) \subset \cap_{t\in\mathbb{R}} Cl(D, it) \text{ e } D \text{ depende exatamente de } N \text{ números primos}\}.$$

Problema 3.6.4. *Se $N \geq 2$ existem estruturas linear e algébrica no conjunto $\mathscr{I}^{(N)}$?*

Bibliografia

[1] A. AIZPURU, C. PÉREZ-ESLAVA E J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, *Linear structure of sets of divergent sequences and series*, Linear Algebra and its Applications, **418**, 595-598, 2006.

[2] N. G. ALBURQUERQUE, *Maximal lineability of the set of continuous surjections*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, **21**, 83-87, 2014.

[3] T. R. ALVES, *Lineability and algebrability of the set of holomorphic functions with a given domain of existence*, Studia Mathematica, **220**, 157-167, 2014.

[4] T. R. ALVES, *Spaceability and algebrability in the theory of domains of existence in Banach spaces*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A, Matemáticas (Ed. impresa), **109**, 461-470, 2015.

[5] T. R. ALVES E G. BOTELHO, *Holomorphic functions with distinguished properties on infinite dimensional spaces*, Quarterly Journal of Mathematics, **70**, 797-811, 2019.

[6] T. R. ALVES, L. BRITO E D. CARANDO, *Algebras and Banach spaces of Dirichlet series with maximal Bohr's strip*, Revista Matemática Complutense, 2022, https://doi.org/10.1007/s13163-022-00426-1.

[7] T. R. ALVES E D. CARANDO, *Holomorphic functions with large cluster sets*, Mathematische Nachrichten, **294**, 1-12, 2021.

[8] T. M. APOSTOL, *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate text in mathematics, Springer-Verlag, New York , 1976.

[9] R. M. ARON, F. BAYART, P. M. GAUTHIER, M. MAESTRE E V. NESTORIDIS, *Dirichlet approximation and universal Dirichlet series*, Proceedings of the American Mathematical Society, **145**, 4449-4464, 2017.

[10] R. ARON, L. BERNAL-GONZÁLEZ, D. PELLEGRINO E J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2016.

[11] R. M. ARON, D. CARANDO, T. W. GAMELIN, S. LASSALLE E M. MAESTRE, *Cluster values of analytic functions on a Banach space*, Mathematische Annalen, **353**, 293-303, 2012.

[12] R. M. ARON, D. CARANDO, S. LASSALLE E M. MAESTRE, *Cluster values of holomorphic functions of bounded type*, Transactions of the American Mathematical Society, **368**, 2355-2369, 2016.

[13] R. M. ARON, V. I. GURARIY E J. B., *Seoane-Sepúlveda, Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proceedings of the American Mathematical Society, **133**, 795-803, 2005.

[14] R. M. ARON, D. PÉREZ-GARCÍA E J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, *Algebrability of the set of nonconvergent Fourier series*, Studia Mathematica, **175**, no. 1, 83-90, 2006.

[15] R. M. ARON E J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, *Algebrability of the set of everywhere surjective functions on* $\mathbb{C}$, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, **14**, no. 1, 25-31, 2007.

[16] S. BANACH, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionemmengen*, Studia Mathematica, **3**, 174-179, 1931.

[17] P. BANDYOPADHYAY E G. GODEFROY, *Linear structures in the set of norm-attaining functionals on a Banach space*, Journal of Convex Analysis, **13**, 489-497, 2006.

[18] C. S. BARROSO, M.A. M. MARROCOS E M. P. REBOUÇAS, *An interplay between the weak form of Peano's theorem and structural aspects of Banach spaces*, Studia Mathematica, **216**, 219-235, 2013.

[19] C. S. BARROSO, G. BOTELHO, V. V. FÁVARO E D. PELLEGRINO, *Lineability and spaceability for the weak form of Peano's theorem and vector-valued sequence spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, **141**, 1913-1923, 2013.

[20] A. BARTOSZEWICZ E S. GLAB, *Strong algebrability of sets of sequences and functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, **141**, no. 3, 827-835, 2013.

[21] F. BAYART, *Linearity of sets of strange functions*, Michigan Mathematical Journal, **53**, 291-303, 2005.

[22] F. BAYART, *Topological and algebraic genericity of divergence and of universality*, Studia Mathematica, **167**, 161-181, 2005.

[23] F. BAYART, S. KONYAGIN E H. QUEFFÉLEC, *Convergence almost everywhere and divergence everywhere of Taylor and Dirichlet series*, Real Analysis Exchange, **29**, 557-586, 2003.

[24] F. BAYART E L. QUARTA, *Algebras in sets of queer functions*, Israel Journal of Mathematics, **158**, 285-296, 2007.

[25] L. BERNAL-GONZÁLEZ, *Omnipresent holomorphic operators and maximal cluster sets*, Colloquium Mathematicum, **63**, 315–32, 1992.

[26] L. BERNAL-GONZÁLEZ, *Vector spaces of non-extendable holomorphic functions*, Journal d'Analyse Mathématique, **134**, 769-786, 2018.

[27] L. BERNAL-GONZÁLEZ, A. BONILLA, M. C. CALDERÓN-MORENO E J. A. PRADO-BASSAS, *Maximal cluster sets of L-analytic functions along arbitrary curves*, Constructive Approximation, **25**, 211–219, 2007.

[28] L. BERNAL-GONZÁLEZ E M. O. CABRERA, *Lineability criteria, with applications*, Journal of Functional Analysis, **266**, 3997-4025, 2014.

[29] L. BERNAL-GONZÁLEZ, M.C. CALDERÓN-MORENO E J.A. PRADO-BASSAS, *Maximal cluster sets along arbitrary curves*, Journal of Approximation Theory, **129**, 207–216, 2004.

[30] L. BERNAL-GONZÁLEZ, D. PELLEGRINO E J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces*, Bulletin the of American Mathematical Society, **51**, 71-130, 2014.

[31] J. BÉS, J. A. CONEJERO E D. PAPATHANASIOU, *Convolution operators supporting hypercyclic algebras*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **445**, 1232-1238, 2017.

[32] J. BÉS, J. A. CONEJERO E D. PAPATHANASIOU, *Hypercyclic algebras for convolution and composition operators*, Journal of Functional Analysis, **274**, 2884-2905, 2018.

[33] J. BÈS, D. PAPATHANASIOU, *Algebrable sets of hypercyclic vectors for convolution operators*, Israel Journal of Mathematics, 1-29, 2020.

[34] H. BOHR, *Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse dirichletscher Reihen*, Acta Mathematica, **36**, 197-240, 1913.

[35] H. BOHR, *Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichlet–schen Reihen* $\sum a_n n^{-s}$, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 441-488, 1913.

[36] H. BOHR, *Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **143**, 203-211, 1913.

[37] H. BOHR, *A theorem concerning power series*, Proceedings of the London Mathematical Society, **13**, 1-5, 1914.

[38] H. BOHNENBLUST E E. HILLE, *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Annals of Mathematics, **32**, 600-622, 1931.

[39] G. BOTELHO, D. CARIELLO, V. V. FÁVARO E D. PELLEGRINO, *Maximal spaceability in sequence spaces*, Linear Algebra and its Applications, **437**, 2978-2985, 2012.

[40] G. BOTELHO, D. CARIELLO, V. V. FÁVARO, D. PELLEGRINO E J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, *On very non-linear subsets of continuous functions*, The Quarterly Journal of Mathematics, **65**, 841-850, 2014.

[41] G. BOTELHO, D. DINIZ, V.V. FÁVARO E D. PELLEGRINO, *Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces*, Linear Algebra and its Applications, **434**, 1255-1260, 2011.

[42] G. BOTELHO E V.V. FÁVARO, *Constructing Banach spaces of vector-valued sequences with special properties*, Michigan Mathematical Journal, **64**, 539-554, 2015.

[43] G. BOTELHO, V. V. FÁVARO, D. PELLEGRINO E J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, $L_p[0,1] \setminus \cup_{q>p} L_q[0,1]$ *is spaceable for every* $p > 0$, Linear Algebra and its Applications, **436**, 2963-2965, 2012.

[44] E. F. COLLINGWOOD E A. J. LOHWATER, *The Theory of Cluster Sets*. Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge: Cambridge University Press, 1966.

[45] J. A. CONEJERO, J. B. SEANE-SEPÚLVEDA E P. SEVILLA-PERIS, *Isomorphic copies of* ℓ_1 *for* m*-homogeneous non-analytic Bohnenblust-Hille polynomials*, Mathematische Nachrichten, **290**, 218-225, 2017.

[46] A. M. DAVIE E T. W. GAMELIN, *A theorem on polynomial-star approximation*, Proceedings of the American Mathematical Society, **106**, 351-356, 1989.

[47] A. DEFANT, D. GARCÍA, M. MAESTRE E P. SEVILLA-PERIS, *Dirichlet Series and Holomorphic Functions in High Dimensions (New Mathematical Monographs)*, Cambridge University Press, 2019.

[48] A. DEFANT E P. SEVILLA-PERIS, *The Bohnenblust-Hille cycle of ideas from a modern point of view*, Functiones et Approximatio. Commentarii Mathematici, **50**, 55-127, 2014.

[49] J. DIESTEL, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Mathematics 92, Springer-Verlag, New York, 1984.

[50] S. DINEEN, *Complex analysis on infinite-dimensional spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London Ltd., London, 1999.

[51] E. M. STEIN E R. SHAKARCHI, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

[52] P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Mathematica, **30**, 335-400, 1906.

[53] V. V. FÁVARO, D. PELLEGRINO E D. TOMAZ, *Lineability and spaceability: A New approach*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, **51**, 27-46, 2020.

[54] J. FALCÓ E K. G. GROSSE-ERDMANN, *Algebras of frequently hypercyclic vectors*, Mathematische Nachrichten, **293**, 1120-1325, 2020.

[55] V. FONF, V. I. GURARIY E V. KADEC, *An infinite dimensional subspace of $C[0,1]$ consisting of nowhere differentiable functions*, Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences, **52**, 11-16, 1999.

[56] P. GALINDO E A. MIRALLES, *Interpolating sequences for bounded analytic functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, **135**, 3225-3231, 2007.

[57] F. J. GARCIA-PACHECO, *Vector subspaces of the set of non-norm-attaining functionals*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, **77**, 425-432, 2008.

[58] V. I. GURARIY, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, (Russian) Proceedings of the USSR Academy of Sciences, **167**, 971-973, 1966.

[59] K. HOFFMAN, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Book Catalog, 1962.

[60] W. B. JOHNSON AND S. ORTEGA CASTILLO, *The cluster value problem in spaces of continuous functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, **143**, 1559-1568, 2015.

[61] ST. KIERST E D. SZPILRAJN, *Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes*, Fundamenta Mathematicae, **21**, 276–294, 1933.

[62] J. LÓPEZ-SALAZAR, *Lineability of the set of holomorphic mappings with dense range*, Studia Math, **210**, 177-188, 2012.

[63] M. L. LOURENCO E D. M. VIEIRA, *Algebrability of some subsets of the disk algebra*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon, **23**, 505-514, 2016.

[64] M. L. LOURENCO E D. M. VIEIRA, *Strong algebrability and residuality on certain sets of analytic functions*, Rocky Mountain Journal of Mathematics. **49**, 1961-1972, 2019.

[65] B. LEVINE E D. MILMAN, On linear sets in space C consisting of functions of bounded variation,The Kharkov Mathematical Society, **16**, 102-105, 1940.

[66] T. MATSUSHIMA, *Bounded holomorphic functions and maps with some boundary behavior*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, bf 285, 691-701, 2003.

[67] J. MUJICA, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Mathematics Studies, **120**, North-Holland, Amsterdam (1986) reprinted by Dover, Mineola, 2010.

[68] J. R. MUNKRES, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[69] S. ORTEGA CASTILLO, *Cluster value problems in infinite-dimensional spaces*, PhD. Dissertation. Office of Graduate and Professional Studies of Texas A&M University. p. 61, 2014.

[70] S. ORTEGA CASTILLO E A. PRIETO, *The polynomial cluster value problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **461**, 1459-1470, 2018.

[71] P. PAINLEVÉ, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm (1895)*, Hermann, Paris, 1897.

[72] D. PELLEGRINO E A. RAPOSO, *Pointwise lineability in sequence spaces*, Indagationes Mathematicae , **32**, 536-546, 2021.

[73] D. PELLEGRINO E E. V. TEIXEIRA, *Norm optimization problem for linear operators in classical Banach spaces*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, **40**, 417-431, 2009.

[74] H. QUEFFÉLEC E M. QUEFFÉLEC, *Diophantine Approximation and Dirichlet Series*, Harish-Chandra Research Institute Lecture Notes, **2**, New Delhi: Hindustan Book Agency, 2013.

[75] L. RODRÍGUEZ-PIAZZA, *Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, **123**, 3649-3654, 1995.

[76] I. J. SCHARK, *Maximal ideals in an algebra of bounded analytic functions*, Journal of Mathematics and Mechanics, **10**, 735-746, 1961.

[77] S. SHKARIN, *On the set of hypercyclic vectors for the differentiation operator*, Israel Journal of Mathematics, **180**, 271–283, 2020.

[78] E. M. STEIN, *Boundary Behavior of Holomorphic Functions of Several Complex Variables*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1972.

[79] D. TOMAZ, *Generalização do conceito de lineabilidade e abordagem multipolinomial de desigualdades clássicas*, Tese de Doutorado. Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, 2020.

[80] K. WEIERSTRASS, *Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzeren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen*, Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften, 1982.