Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre variedades quasi-Einstein generalizadas

Roseane Pereira de Souza

Manaus - AM
Setembro de 2022

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre variedades quasi-Einstein generalizadas

por

Roseane Pereira de Souza

sob a orientação do

Prof. Dr. Antonio Airton Freitas Filho

Manaus - AM
Setembro de 2022

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S729s

Souza, Roseane Pereira de

Sobre variedades quasi-Einstein generalizadas / Roseane Pereira de Souza . 2022

50 f.: 31 cm.

Orientador: Antonio Airton Freitas Filho

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Variedades quasi-Einstein generalizadas. 2. Variedades tipo-Einstein. 3. Resultados de rigidez . 4. Variedades completas conformemente planas. I. Freitas Filho, Antonio Airton. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Dedico este trabalho aos meus pais Francisco Lopes de Souza e Maria Antonia P. da Silva.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter me guiado no caminho até aqui e por ter renovado minhas forças em muitos momentos de fraqueza.

Aos meus pais Francisco Lopes de Souza e Maria Antonia, por todo amor, carinho, conselhos, apoio que sempre me deram, e toda a dedicação em me proporcionar a melhor educação que podiam oferecer, obrigada por todo o cuidado. Aos meus sobrinhos Júlia e Daniel, por todos os momentos de alegria e a meus irmãos Francisco Antonio e Rosana por estarem tão presentes mesmo distante, por sempre poder contar com vocês, por todo amor que há entre nós e por sempre acreditarem em mim.

Ao meus amigos de graduação e de vida, Larine Rodrigues, Naiane Bispo, Adriele Monteiro, Francisco Humbelino, Ezivaldo Barros e Danrley Umbilino pelos momentos de descontração e carinho, agradeço também a meu amigo Moisés Júnior que me apoiou nos momentos mais difíceis, por todas as conversas, pelas palavras, conselhos, por ter sido aquele que nos momentos de crise sempre me ouviu, sua amizade foi muito importante nesse período.

Aos meus amigos da pós-graduação, Hamilton Nascimento, Daniel Reis, Felipe André, Filipe Fortes, Mikaela Alves, Wanessa Ferreira, Roberta Luzia, Erick Botelho e Gustavo Costa. Muito obrigado por esse tempo de convivência, ajuda, pela força, conversas, e risos, guardo no coração cada momento que tivemos, em especial agradeço a amigo Matheus Hudson pela paciência que sempre teve comigo, pelos ensinamentos e ajuda sempre que precisei.

Aos professores do departamento de matemática, em especial, Cícero Mota, Elkin Quintero, Thiago Alves e Moacir, por todos os ensinamentos e incentivo.

Ao professor Airton Freitas, pela orientação, ajuda e motivação nos momentos difíceis durante a elaboração do trabalho, por toda a amizade, respeito e compreensão frente as dificuldades que houveram no decorrer das orientações.

Aos membros da banca, professores José Nazareno Vieira Gomes e Marcus Antonio Mendonça Marrocos pela gentileza em participar da avaliação deste trabalho.

E à CAPES, pela assistência financeira.

"A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza."

(Stephen Hawking)

Resumo

Este trabalho tem o propósito de explicar um resultado de rigidez para uma classe de variedades compactas quasi-Einstein generalizadas com curvatura escalar constante. Além disso, sob algumas hipóteses geométricas, a rigidez para o caso não compacto também é provada. Considerando curvatura escalar não constante, caracterizamos e apresentamos duas classes de variedades quasi-Einstein generalizadas completas conformes ao espaço Euclidiano que são obtidas tomando funções potenciais e fatores conformes como radiais ou invariantes sob a ação de um grupo de translação (n-1)-dimensional (ver Freitas Filho, A. A. e Tenenblat, K. [On generalized quasi-Einstein manifolds, J. Geom. Phys. 178 (2022) 104562]).

Palavras-chave: Variedades quasi-Einstein generalizadas, Variedades tipo-Einstein, Resultados de rigidez, Variedades completas conformemente planas.

Abstract

This work aims to explain a stiffness result for a class of generalized quasi-Einstein compact manifolds with constant scalar curvature. Furthermore, under some geometric assumptions, the stiffness for the non-compact case is also proved. Considering non-constant scalar curvature, we characterize and present two classes of complete generalized quasi-Einstein manifolds conforming to Euclidean space that are obtained by taking potential functions and conforming factors as radial or invariant under the action of a translation group (n-1)-dimensional (see Freitas Filho, A. A. and Tenenblat, K. [On generalized quasi-Einstein manifolds, J. Geom. Phys. 178 (2022) 104562]).

Palavras-chave: Generalized quasi-Einstein manifolds, Einstein type manifolds, Rigidity results, Conformally flat complete manifolds.

Sumário

Introdução

Nas últimas décadas tem havido bastante interesse no estudo dos fluxos, sobre tudo os fluxos definidos em variedades Riemannianas. Em 1982 Hamilton introduziu o Fluxo de Yamabe com intuito de resolver problema de Yamabe e o fluxo de Ricci com o objetivo de resolver a Conjectura de Poincaré, que podem ser vistos com mais detalhes em [17], definindo assim o fluxo de Ricci como sendo uma equação de evolução no espaço das métricas Riemannianas como

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)}.$$

O fluxo de Ricci é um análogo da equação calor ($u_t = cu_{xx}$) para uma família de métricas a um parâmetro $g(t)$ em uma variedade M^n, definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, onde $Ric_{g(t)}$ denota o tensor de Ricci na métrica $g(t)$. As pesquisas de Hamilton foram de grande relevância para o estudo dos fluxos geométricos e classificações de variedades que são soluções auto-similares do fluxo de Ricci, como consequência, o tensor de curvatura evolui por um sistema de equações de difusão que converge para uma de curvatura uniforme ao longo de toda a variedade. Embora Hamilton não tenha conseguido provar a Conjectura de Poincaré seus estudos contribuiram para que Perelmann provasse ([27, 28, 29]).

Hamilton queria estudar o comportamento das soluções do fluxo de Rici em uma variedade tridimensional compacta dotada de uma métrica Riemanniana arbitrária e como se comporta as singularidades do mesmo. As soluções auto-similares deste fluxo são denominados sólitons de Ricci, uma condição necessária para que uma métrica g_0 sobre uma variedade M^n, dê origem a uma solução auto-similar é que exista um número real λ e um campo diferencial X, tal que

$$Ric + \frac{1}{2}\mathfrak{L}_X g_0 = \lambda g_0,$$

onde $\mathfrak{L}_X g_0$ é a derivada da Lie da métrica g_0 na direção do campo vetorial X. Satisfeitas essas condições dizemos que (M^n, g_0, X, λ) é um sóliton de Ricci. Considerando uma função potencial $f : M \to \mathbb{R}$, se $X = \nabla f$ temos um sóliton de Ricci gradiente

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g_0.$$

Onde $\nabla^2 f$ denota a hessiana de f. Os sólitons de Ricci são ainda vistos como uma generalização das variedades Einstein, que são variedades cujo tensor de Ricci é múltiplo da métrica, ou seja, $Ric = \lambda g$, de modo que λ é uma função suave em M e Ric denota o tensor de Ricci na métrica g. Tal métrica surge como ponto crítico do funcional Einstein-Hilbert $\mathcal{R} : M \to \mathbb{R}$, definido por

$$\mathcal{R}(g) = \int_M S_g \mathrm{dvol}_g.$$

Ao longo dos anos foram feitas muitas generalizações das variedades Einstein, dentre algumas delas podemos relembrar os sólitons ρ-Einstein, quasi-sólitons de Ricci, quasi-sólitons de Yamabe, varidades m-quasi-Einstein generalizada, variedades tipo-Einstein e variedades quasi-Einstein generalizada. Os sólitons ρ-Eintein, correspondem às soluções auto-similares do fluxo de Ricci-Bourguignon [6]. Os quasi-sólitons de Ricci são generalizações de sólitons ρ-Einstein, veja [31]. Os sólitons de Yamabe correspondem às soluções auto-similares do fluxo de Yamabe. Diferente dos sólitons citados anteriormente, as variedades m-quasi-Einstein generalizada foram originadas do estudo de variedades que são produtos warped Einstein e a base satisfaz a equação de uma variedade m-quasi-Einstein generalizada, ver [2]. Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita ser uma variedade tipo-Einstein gradiente se existir $f \in C^\infty(M)$ e constantes $\alpha, \beta, \mu, \rho \in \mathbb{R}$, com $(\alpha, \beta, \mu) \neq (0, 0, 0)$, tais que

$$\alpha Ric + \beta \nabla^2 f + \mu df \otimes df = (\rho S + \lambda) g, \tag{1}$$

onde $\lambda \in C^\infty(M)$, como definido em [9].

Portanto, temos a variedade quasi-Einstein generalizada que será nosso objeto de estudo. Este conceito foi introduzido por Catino [8] como segue. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa de dimensão $n \geq 3$. Denotamos por Ric e S seu tensor de Ricci e curvatura escalar, respectivamente. Dizemos que $(M^n, g, f, \lambda, \nu)$ é uma variedade quasi-Einstein generalizada ou (M^n, g) suporta uma estrutura quasi-Einstein generalizada se existem funções reais suaves f, λ e ν definidas em M , de tal modo que

$$Ric + \nabla^2 f - \nu df \otimes df = \lambda g \tag{2}$$

Referimo-nos a f como a função potencial. Dizemos que a variedade quasi-Einstein generalizada é trivial quando f é constante. Em [8], Catino provou que uma variedade quasi-Einstein generalizada, com tensor de Weyl harmônico e com a curvatura de Weyl nula é localmente um produto warped, com fibras de Einstein $(n-1)$-dimensionais.

É possível observar que há uma intersecção entre essas duas noções. De fato, dada uma variedade quasi-Einstein generalizada satisfazendo (2), se ν é uma função constante e λ é uma função linear da curvatura escalar, então, é uma variedade tipo-Einstein gradiente. Por outro lado, dada uma variedade tipo-Einstein gradiente satisfazendo (1), se as constantes α e β forem diferentes de zero, então dividindo por α e considerando $\tilde{f} = \beta f / \alpha$,

$\tilde{\nu} = -\mu\alpha/\beta^2$ e $\tilde{\lambda} = (\rho S + \lambda)/\alpha$, temos uma variedade quasi-Einstein generalizada gradiente satisfazendo $Ric + \nabla^2 \tilde{f} - \tilde{\nu} d\tilde{f} \otimes d\tilde{f} = \tilde{\lambda} g$.

Uma variedade tipo Ricci-Hessiano é outro exemplo de estrutura que generaliza uma variedade Einstein e está relacionada a construção de (quase) sólitons de Ricci gradientes produtos warped (ver [11, 12]). Uma caracterização completa dos quase sólitons de Ricci gradientes em produtos warped semi-Riemannianos pode ser encontrada em [5]. Sob certas condições, variedades Riemannianas compactas de curvatura escalar constante são isométricas a uma esfera padrão, por exemplo, Gomes [15] provou que uma variedade compacta do tipo-Einstein gradiente de curvatura escalar constante é isométrica à esfera padrão com uma função potencial bem definida. A solução do problema de Yamabe assegura que uma variedade compacta suave admite uma métrica Riemanniana de curvatura escalar constante [35]. Esta dissertação contribui em duas direções. A primeira fornece resultados de rigidez para variedades completas do tipo quasi-Einstein com curvatura escalar constante S. O outro fornece classes de variedades completas do tipo quasi-Einstein, conformes ao espaço Euclidiano, com curvatura não constante S.

Obtemos resultados de rigidez para variedades quasi-Einstein generalizadas compactas (e não compactas) com curvatura escalar constante, semelhantes às obtidas em [15] para as variedades tipo-Einstein gradientes. Agora assuma uma condição adicional, que é motivada por uma propriedade necessária satisfeita por qualquer estrutura quasi-Einstein generalizada (ver Proposição 2.3), a saber:

$$d\|\nabla f\|^2 \wedge d\nu \wedge df = 0, \tag{3}$$

onde f and ν são funções satisfazendo (2).

Considerando (3), se ν é uma função não constante, assumimos que ν é uma função de f, ou seja, $\nu = v \circ f$ para alguma função $v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $I = f(M)$. Essa mesma suposição foi considerada em [23], onde Mirshafeazadeh-Bidabad mostraram que em uma variedade quasi-Einstein generalizada compacta Bach-flat $(M^n, g, f, \lambda, \nu)$, quando a função ν é uma função positiva da função potencial f, então certos tensores são nulos.

Para enunciar nossos resultados de rigidez, assumindo que $\nu = v \circ f$, definimos a seguinte suave função $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) = c_1 \int^t \left(e^{-\int^s v(r)dr} \right) ds + c_2, \tag{4}$$

para alguma constante c_1 e c_2.

Nosso primeiro resultado de rigidez é uma caracterização da esfera padrão.

Teorema 1. *Seja $(M^n, g, f, \lambda, \nu)$ uma variedade quasi-Einstein generalizada compacta com f não constante, curvatura escalar constante e $\nu = v \circ f$ para alguma função suave $v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $I = f(M)$. Então, (M^n, g) é isométrica à esfera padrão $\mathbb{S}^n(r)$*

de raio r. Além disso, a menos de reescalonamento, a função potencial é dada por $f = \phi^{-1}(c - h_w/n)$, onde ϕ é dado por (4), c é uma constante e h_w é a função altura na esfera unitária $\mathbb{S}^n$, em relação a um vetor diferente de zero w.

Para o caso completo não compacto, consideramos uma suposição geométrica motivada pelo Teorema de Karp. Mais precisamente:

Teorema 2. *Seja $(M^n, g, f, \lambda, \nu)$ uma variedade quasi-Einstein generalizada completa não compacta com f não constante, curvatura escalar constante e $\nu = v \circ f$ para alguma função suave $v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $I = f(M)$. Considere a bola geodésica $B(r)$ de raio r centrada em algum ponto fixo $x_0 \in M$. Além disso, suponha que*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_{B(2r)\setminus B(r)} \|\mathring{Ric}(\nabla(\phi \circ f))\| \mathrm{dvol}_g = 0, \tag{5}$$

onde $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado por (4) e $\mathring{Ric}$ denota o tensor de Ricci sem traço. Então, (M^n, g) é uma variedade Einstein de curvatura escalar não-positiva e f tem no máximo um ponto crítico. Mais precisamente, (M^n, g) é isométrica a uma das seguintes variedades

(i) um produto Riemanniano $\mathbb{R} \times N^{n-1}$.

(ii) um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

(iii) um espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^n\left(\sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}\right)$.

(iv) um Produto Warped $\left(\mathbb{R} \times N^{n-1}, dt^2 + e^{2\sqrt{\frac{S}{n(n-1)}}t} g_N\right)$, onde (N^{n-1,g_N}) é uma variedade Einstein.

Em um artigo recente, [16] Gomes-Wang-Xia considerou os sólitons h–quase Ricci. Este conceito foi introduzido em [22] para estudar mudanças conformes de sólitons Kähler-Ricci que dão origem a novas métricas Kähler. Em [16] (ver Teorema 1), os autores provaram que um h-quase Ricci sóliton compacto, com curvatura escalar constante e função h não nula, é isométrico a uma esfera padrão.

Com este resultado em mente, lembramos que se (M^n, g), $n \geqslant 3$, é uma variedade Riemanniana compacta com curvatura escalar constante, então ela não admite uma métrica de Einstein $\overline{g}$ conforme a g, a menos que (M^n, g) seja isométrica a uma esfera padrão. Esta é uma caracterização bem conhecida da esfera padrão obtida por Obata (Proposição 6.2 em [25]). Assumindo hipóteses semelhantes ao do caso não compacto, obtemos o seguinte resultado de rigidez interessante, para o caso não compacto completo, a saber:

Corolário 3. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura escalar constante S. Suponha que $\overline{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ é uma métrica de Einstein em M^n*

onde φ é uma função suave positiva não constante. Seja $B(r)$ a bola geodésica de raio r centrada em algum ponto fixo $x_0 \in M$. Além disso, suponha que

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int\limits_{B(2r)\setminus B(r)} ||\mathring{Ric}(\nabla(\varphi))|| \mathrm{dvol}_g = 0.$$

Então, (M^n, g) é uma variedade de Einstein com $S \leq 0$ e φ tem no máximo um ponto estacionário. Mais precisamente, (M^n, g) é isométrica a uma das seguintes variedades:

(i) um produto Riemanniano $\mathbb{R} \times N^{n-1}$.

(ii) um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

(iii) um espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^n\left(\sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}\right)$.

(iv) um Produto Warped $\left(\mathbb{R} \times N^{n-1}, dt^2 + e^{2\sqrt{\frac{S}{n(n-1)}}t} g_N\right)$, onde (N^{n-1, g_N}) é uma variedade Einstein.

No primeiro capítulo apresentamos algumas definições e propriedades básicas dos tensores e operadores em variedades Riemannianas, métricas conformes e campos conformes, que serão importantes para as demonstrações dos lemas e teoremas; na primeira seção do capítulo 2 abordaremos alguns resultados auxiliares admitindo algumas hipóteses sobre uma variedade quasi-Einstein generalizada, onde apresentamos lemas necessários para provar os resultados de rigidez, em seguida demonstraremos o primeiro resultado de rigidez no caso compacto, onde mostraremos uma caracterização da esfera. na segunda seção deste capítulo demonstronstaremos o resultado de rigidez para o caso não compacto, sob a condição da variedade ser não compacta, vamos considerar uma hipótese motivada pelo Teorema de Karp. Finalizaremos a dissertação com alguns exemplos não rígidos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos a teoria base para este trabalho, o qual veremos alguns resultados de geometria Riemanniana que serão utilizados no decorrer do texto, para um estudo mais aprofundado em Geometria Riemanniana indicamos [4, 7, 14, 30]. No desenvolvimento de todo o trabalho, o par (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana, isto é, conexa de dimensão $n \geqslant 3$, com métrica Riemanniana g (ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$). O conjunto dos campos vetoriais suaves $X : M \to TM$ será denotado por $\mathfrak{X}(M)$ enquanto que $C^\infty(M)$ é o conjunto das funções suaves M

1.1 Tensores e operadores diferenciais

Definição 1.1. *Um $(1, r)$–tensor em uma variedade suave M é uma aplicação*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{(r)} \to \mathfrak{X}(M)$$

multilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M. Enquanto que, num $(0, r)$–tensor, o contradomínio é $C^\infty(M)$. Formalmente,

$$T(Y_1, \ldots, fX + hY, \ldots, Y_r) = fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) + hT(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r)$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, h \in C^\infty(M)$.

O valor do campo $T(Y_1, \ldots, Y_r)$ (ou da função no caso de $(0, r)$–tensores) num ponto $p \in M$ depende unicamente dos valores dos campos de vetores $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ no ponto p. Isto é, se $Z_1, \ldots, Z_r \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $Y_j(p) = Z_j(p)$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Então

$$T(Y_1, \ldots, Y_r)(p) = T(Z_1, \ldots, Z_r)(p).$$

Com efeito, para provar este fato, primeiramente vamos considerar campos $X_1, \ldots, X_r \in$

$\mathfrak{X}(M)$ e supor que para algum $j, X_j(p) = 0$. Em uma vizinhança coordenada U de p, temos $X_j = a^i\partial_i$. Seja Ψ uma função bump em p, com $supp\Psi \subset U$ e $\Psi(p) = 1$. Assim, a função $\Psi a^i \in C^\infty(M)$ e o campo de vetores $\Psi\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\Psi^2 T(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_r) &= T(X_1, \ldots, \Psi^2 X_j, \ldots, X_r) = T(X_1, \ldots, \Psi a^i \Psi\partial_i, \ldots, X_r) \\ &= \Psi a^i T(X_1, \ldots, \Psi\partial_i, \ldots, X_r)\end{aligned}$$

Como cada $a^i(p) = 0$ e $\Psi(p) = 1$, segue que $T(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_r)(p) = 0$. Agora por hipótese $Y_j(p) = Z_j(p)$ para todo j, isso vai implicar pelo fato anterior e pela multilinearidade de T que

$$T(Y_1, \ldots, Y_r) = T(Z_1, \ldots, Z_r) = 0,$$

conforme havíamos afirmado. A este fato vamos nos referir como o caráter pontual dos tensores.

Exemplo 1.2. *O tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ e a cada par $X, Y \in T_pM$, o produto interno de X e Y na métrica Riemanniana de M, isto é, $g_p(X, Y) = \langle X, Y\rangle_p$, é um $(0, 2)$–tensor e suas componentes no referencial $\{\partial_i\}$ são os coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.*

Exemplo 1.3. *Toda k-forma diferencial ω em M é automaticamente um $(0, k)$–tensor em M.*

Observação 1.4. *Em uma variedade Riemanniana (M^n, g) a métrica Riemanniana faz corresponder a cada campo suave $X \in \mathfrak{X}(M)$ a 1-forma diferencial $\omega_X \in \mathfrak{X}^*(M)$ dada por.*

$$\omega_X(Y) = \langle X, Y\rangle, \ \textit{para todo}\ Y \in \mathfrak{X}(M).$$

É imediato que ω_X está unicamente determinada. Neste sentido, temos um $(0, 1)$–tensor $X^\flat : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, dado por

$$X^\flat(Y) = \langle X, Y\rangle, \ \textit{para todo}\ Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Também será conveniente considerarmos o isomorfismo musical $\sharp : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$que associa a cada 1–forma ω a um único campo $\omega^\sharp$, dado por

$$\omega(Y) = \langle\omega^\sharp, Y\rangle, \ \text{para todo}\ Y \in \mathfrak{X}(M)$$

ou seja, a inversa da aplicação $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ que associa cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ ao seu dual $X^\flat$.

Mais geralmente, dado um $(0, r)$–tensor T em uma variedade Riemanniana $(M, \langle\cdot, \cdot\rangle)$, podemos identificá-lo com um $(1, r-1)$–tensor $\widetilde{T}$ mediante a métrica Riemanniana $\langle\cdot, \cdot\rangle$, fazendo

$$\langle \widetilde{T}(Y_1, \ldots, Y_{r-1}), Y_r \rangle := T(Y_1, \ldots, Y_r) \tag{1.1}$$

Por simplicidade de notação, e desde que não teremos perigo de confusão, omitiremos o " $\sim$ " no $(1, r-1)$–tensor correspondente ao $(0, r)$–tensor T. Em particular, o tensor métrico g, será identificado com o $(1, 1)$–tensor identidade I em $\mathfrak{X}(M)$.

Em uma variedade suave é possível estender a noção de derivada covariante a tensores como veremos agora.

Definição 1.5. *A deriavada covariante de um $(1, r)$–tensor T é um $(1, r+1)$–tensor ∇T dado por*

$$\nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r) = \nabla_X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_r) \tag{1.2}$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X como um tensor de mesma ordem que T dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \ldots, Y_r) := \nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r).$$

Analogamente a derivada covariante de um $(0, r)$–tensor T é um $(0, r+1)$–tensor ∇T dado por (1.2).

Observação 1.6. *Dizemos que um tensor é paralelo quando $\nabla T \equiv 0$.*

Exemplo 1.7. *Em uma variedade Riemanniana (M, g) com a conexão de Levi-Civita ∇, temos que $\nabla g \equiv 0$. (A derivada covariante do tensor métrico é o tensor nulo). Com efeito, dados $Y_1, Y_2, X \in \mathfrak{X}(M)$, teremos*

$$\begin{aligned}
\nabla g(X, Y_1, Y_2) &= (\nabla_X g)(Y_1, Y_2) \\
&= \nabla_X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) \\
&= g(\nabla_X Y_1, Y_2) + g(Y_1, \nabla_X Y_2) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) = 0
\end{aligned}$$

Exemplo 1.8. *Utilizando a Observação 1.4, a derivada covariante de ω_X em relação ao campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\begin{aligned}
(\nabla \omega_X)(Z, Y) &= (\nabla_Z \omega_X)(Y) \\
&= Z(\omega_X(Y)) - \omega_X(\nabla_Z Y) = Z\langle X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\
&= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle \\
&= \langle \nabla X(Z), Y \rangle = \nabla X(Z, Y)
\end{aligned}$$

Decorre daí que $\nabla_Z \omega_X$ pode ser identificado ao campo $\nabla_Z X$, ou equivalentemente, $\nabla \omega_X$ pode ser identificado ao operador ∇X.Isto mostra que a derivada covariante de tensores *é uma generalização da derivação covariante de campos (derivar um campo é o mesmo que derivar covariantemente o seu dual).*

Definição 1.9. *Seja T um $(1,1)$–tensor. Define-se a derivada covariante de segunda ordem $\nabla^2 T = \nabla\nabla T$ como o $(1,3)$–tensor, dado por*

$$\nabla T(X,Y,Z) = (\nabla_X \nabla_T) - (\nabla_{\nabla_X Y T}(Z)).$$

Isso se justifica pelos cálculos seguintes:

$$\begin{aligned}
\nabla\nabla T(X,Y,Z) &= (\nabla_X \nabla T)(Y,Z)\\
&= \nabla_X \nabla T(Y,Z) - \nabla(\nabla_X, Z) - \nabla T(Y, \nabla_X Z)\\
&= \nabla_X \nabla_Y T(Z) - \nabla_X T(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} T(Z)\\
&\quad + T(\nabla_{\nabla_X Y} Z) - \nabla_Y T(\nabla_X Z) + T(\nabla_Y \nabla_X Z)
\end{aligned}$$

Reagrupando as duas primeiras parcelas com as duas últimas, temos

$$\begin{aligned}
\nabla\nabla T(X,Y,Z) &= \{\nabla_X \nabla_Y T(Z) - \nabla_X T(\nabla_Y Z) - \nabla_Y T(\nabla_X Z) + T(\nabla_Y X \nabla_X Y Z)\}\\
&\quad - \{\nabla_{\nabla_X Y} T(Z) - T(\nabla_{\nabla_X Y} Z)\}\\
&= \{\nabla_X (\nabla_Y T)(Z) - (\nabla_Y T)(\nabla_X Z)\} - \{\nabla_{\nabla_X Y} T(Z) - T(\nabla_{\nabla_X Y} Z)\}\\
&= (\nabla_X \nabla_Y T)(Z) - (\nabla_{\nabla_X Y} T)(Z),
\end{aligned}$$

que esta de acordo com a definição.

Para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante de segunda ordem $\nabla^2_{X,Y} T$ em relação a X, Y como um tensor de mesma ordem que T, dado por

$$\nabla^2_{X,Y} T(Z) := \nabla^2 T(X,Y,Z).$$

Motivados pelo resultado do Exemplo 1.8, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, convém considerar o $(1,1)$–tensor $\nabla Z : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por $\nabla Z(X) = \nabla_X Z$. Assim, pela equação, teremos o $(1,2)$–tensor dado por

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{X,Y} Z &:= \nabla\nabla Z(X,Y)\\
&= \nabla_X (\nabla Z(Y)) - (\nabla Z)(\nabla_Y X)\\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z
\end{aligned} \tag{1.3}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Analogamente,

$$\nabla^2_{X,Y} Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z \tag{1.4}$$

Subtraindo (1.4) de (1.3), obtemos para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, O (1,2)-tensor dado por

$$\nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,x} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.5}$$

Fazendo Z variar na equação (1.5) obteremos um $(1,3)$–tensor, bastando provar a linearidade em Z. O que motiva a definição seguinte.

Definição 1.10. *Seja M uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o $(1,3)$–tensor*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.6}$$

Exemplo 1.11. *Seja $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. De fato, seja $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, então $\nabla_X Z = (X_{z_1}, \ldots, X_{z_n})$ e $\nabla_Y Z = (Y_{z_1}, \ldots, Y_{z_n})$. Logo,*

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (XY_{z_1}, \ldots, XY_{z_n}), \nabla_Y \nabla_X Z = (YX_{z_1}, \ldots, YX_{z_n})$$

e

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y]_{z_1}, \ldots, [X,Y]_{z_n})$$

Portanto, $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0$.

Usando o tensor métrico podemos definir o tensor curvatura como sendo o $(0,4)$–tensor

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dado por

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W \rangle$$

Proposição 1.12. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) R(X,Y,Z,W)=-R(Y,X,Z,W)=R(Y,X,W,Z)

(2) R(X,Y,Z,W)= R(Z,W,X,Y)

(3) R(X,Y)Z+ R(Y,Z)X+ R(Z,X)Y=0 (primeira identidade de Bianchi)

(4) $(\nabla_X R)(Y,Z,W) + (\nabla_Y R)(Z,X,W) + (\nabla_Z R)(X,Y,W) = 0$ (segunda identidade de Bianchi)

A partir do tensor de curvatura definiremos os seguintes entes geométricos.

Definição 1.13. *A curvatura seccional K(x,y) segundo um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$ é definida por*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)y, x\rangle}{|x \wedge y|^2}$$

onde $x, y \in \sigma$ são vetores linearmente independentes e $|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2$.

Segue da álgebra linear que esta definição não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$. Além disso, note que se $\{e_1, \dots e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, temos

$$K_{ij} := K(e_i, e_j) = \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle = R(e_i, e_j, e_j, e_i) := R_{ijji}.$$

Definição 1.14. *Definimos o traço de um* $(0, 2)$*–tensor como sendo o traço do* $(1, 1)$*–tensor associado, ou seja, se* $\{e_i\}$ *é uma base ortonormal,então*

$$tr(T) = \sum_i \langle T(e_i), e_i\rangle = \sum_i T(e_i, e_i).$$

Em uma base coordenada $\{\partial_i\}$*,*

$$tr(T) = g^{ij}T(\partial_i, \partial_j).$$

Com isso, é possível definir um produto interno entre $(0, 2)$–tensores T, S chamado produto interno de Hilbet-Schmidt da seguinte forma:

$$\langle T, S\rangle = tr(T^*S).$$

Em uma base ortonormal $\{e_i\}$, tem-se

$$tr(T^*S) = \sum_i \langle T^*S(e_i), e_i\rangle = \sum_i \langle S(e_i), T(e_i)\rangle.$$

Com esta expressão podemos concluir diretamente das propriedades de produto interno e que $tr(T) = \langle T, g\rangle$.

Note que a definição do produto interno de Hilbert-Schmidt é equivalente a $\langle T, S\rangle = tr(T^*S)$

Definição 1.15. *A parte sem traço de um* $(0, 2)$*–tensor* T *em* (M^n, g) *é definida por*

$$\mathring{T} = T - \frac{tr(T)}{n} g. \tag{1.7}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} tr(\mathring{T}) &= tr\left(T - \tfrac{tr(T)}{n} g\right) \\ &= tr(T) - tr\left(\tfrac{tr(T)}{n} g\right) \\ &= \langle T, g\rangle - \tfrac{\langle T, g\rangle}{n} tr(g) \\ &= \langle T, g\rangle - \langle T, g\rangle = 0 \end{aligned}$$

temos ainda que

$$0 \leq |\mathring{T}|^2 = |T|^2 - \frac{\mathrm{tr}\,(T)^2}{n}.$$

Proposição 1.16. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana tais que T e R são $(0,2)$–tensores. Então*

$$\langle \mathring{T}, R\rangle = \langle T, \mathring{R}\rangle$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\langle \mathring{T}, R\rangle &= \langle T - \tfrac{\operatorname{tr} T}{n} g, R\rangle \\
&= \langle T, R\rangle - \langle \tfrac{\operatorname{tr} T}{n} g, R\rangle \\
&= \langle T, \mathring{R} + \tfrac{\operatorname{tr} R}{n} g\rangle - \langle \tfrac{\operatorname{tr} T}{n} g, R\rangle \\
&= \langle T, \mathring{R}\rangle + \tfrac{\operatorname{tr} R}{n}\langle T, g\rangle - \tfrac{\operatorname{tr} T}{n}\langle g, R\rangle \\
&= \langle T, \mathring{R}\rangle
\end{aligned}$$

□

Definição 1.17. *Definimos o tensor de Ricci como o traço do tensor curvatura de Riemann. Isto é, se $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_pM$ é uma base ortonormal e $u, v \in T_pM$, então para cada $p \in M$ o tensor de Ricci é dado por*

$$Ric(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, u)v, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, v)u, e_i\rangle = Ric(v, u),$$

onde a segunda igualdade segue da Proposição 1.12 e prova que o tensor de Ricci é simétrico.

Proposição 1.18. *Sejam X, Y campos de vetores suaves em (M^n, g). Então,*

$$Ric(X, Y) = \operatorname{div}(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(\operatorname{div} Y)\rangle - \langle \nabla X,^{*} \nabla Y\rangle.$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em um ponto $p \in M^n$, vamos o fato de que $(\nabla_X e_i)(p) = 0$. Vejamos que

$$\begin{aligned}
Ric(X, Y) &= \sum_i \langle Ric(e_i, X)Y, e_i\rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_X Y - \nabla_X \nabla_{e_i} Y - \nabla_{[e_i, X]}, e_i\rangle \\
&= \operatorname{div}(\nabla_X Y) - \sum_i \langle \nabla_X \nabla_{e_i} Y, e_i\rangle - \sum_i \langle \nabla_{\nabla_{e_i} X} Y, e_i\rangle \\
&= \operatorname{div}(\nabla_X Y) - X(\sum_i \langle \nabla_{e_i} Y, e_i\rangle) - \sum_i \langle \nabla Y(\nabla_{e_i} X), e_i\rangle \\
&= \operatorname{div}(\nabla_X Y) - X(\operatorname{div} Y) - \sum_i \langle \nabla_{e_i} X,^{*} \nabla Y(e_i)\rangle \\
&= \operatorname{div}(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(divY)\rangle - \langle \nabla X,^{*} \nabla Y\rangle
\end{aligned}$$

□

Tomando o traço da curvatura de Ricci, obtemos a curvatura escalar

$$S := \sum_{j=1}^{n} Ric(e_j, e_j) = 2\sum_{i<j} K(e_i, e_j).$$

Definição 1.19. *Dizemos que uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *é Einstein se existir uma função suave* $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$ *tal que* $Ric_g = \lambda g$.

Teorema 1.20 (Lema de Schur)**.** *Seja* (M^n, g) *uma variedade Einstein, isto é,* $Ric = \lambda g$*, onde* $\lambda \in C^\infty(M)$*. Se* $n \geq 3$*, então* λ *é constante.*

Demonstração. Como (M^n, g) é Einstein então

$$Ric = \frac{S}{n} g \tag{1.8}$$

Passando o divergente na equação (1.8) temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Ric &= \tfrac{1}{n}\operatorname{div}(Sg) \\ \tfrac{1}{2} dS &= \tfrac{1}{n} dS \\ \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n}\right) dS &= 0 \\ (n-2) dS &= 0 \\ dS &= 0. \end{aligned}$$

Portanto S é constante. □

Encerramos esta seção apresentando algumas propriedades da derivada de Lie de tensores. Para tanto, vamos considerar um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e seu fluxo $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$, o qual para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ é um difeomorfismo dado por $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$.

A derivada de Lie de um $(0, r)$–tensor T com respeito a X é o $(0, r)$–tensor que a cada $p \in M$ associa ao operador dado por

$$(\mathfrak{L}_X T)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\varphi_t^* T)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi_t^* T_{\varphi(t,p)} - T_p].$$

No caso de funções $f \in C^\infty(M)$, devemos interpretá-las como $(0, 0)$–tensores, de modo que $\varphi_t^* f = f \circ \varphi_t$ implica

$$(\mathfrak{L}_X f)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\varphi_t^* f)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (f(\varphi_t(p))) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\varphi_t(p)) - f(p)]$$

Ademais, vale a seguinte propriedade da derivada de Lie para um $(0, r)$–tensor T em M

$$(\mathfrak{L}_X T)(Y_1, \ldots, Y_r) = X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T([X, Y_1], Y_2 - \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, [X, Y_r]).$$

Em particular, para o $(0,2)$–tensor métrico g em M vale

$$(\mathfrak{L}_X g)(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y). \tag{1.9}$$

Também precisamos do lema abaixo, que é uma propiedade geral para $(0,2)$–tensores simétricos em uma variedade Riemanniana.

Lema 1.21. *Para todo (0,2)-tensor simétrico T em uma variedade Riemanniana (M^n, g) vale*

$$\langle \mathfrak{L}_X g, T\rangle = 2\langle \nabla X, T\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Basta tomar um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em (M^n, g), usando a eqaução (1.9) e a simetria de $(0,2)$–tensor T temos que

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{L}_X g, T\rangle &= \textstyle\sum_{i,j} (\mathfrak{L}_X g)_{ij} T_{ij} \\
&= \textstyle\sum_{i,j} (g(\nabla_{e_i} X, e_j) + g(\nabla_{e_j} X, e_i) T_{ij} \\
&= 2\textstyle\sum_{i,j} g(\nabla_{e_i} X, e_j) T_{ij} \\
&= 2\textstyle\sum_{i,j} g(\nabla_{e_i} X, e_j) g(T_{e_i, e_j}) \\
&= 2\langle \nabla X, T\rangle.
\end{aligned}$$

□

Assim como a derivada covariante de campos vetoriais permite estender a noção de derivada direcional do espaço Euclidiano para variedades Riemannianas, a derivada covariante de tensores estende certos operadores diferenciais tais como gradiente, divergente, laplaciano, entre outros destacaremos agora alguns desses operadores.

Definição 1.22. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave ∇f, definido sobre M por*

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X) = X(f) = \nabla_X f, \textit{para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Escreva $\nabla f = a^i e_i$ em termos de um referencial ortonormal $\{e_i\}$ em uma vizinhança $U \subset M$. Temos que $a^i = \langle \nabla f, e_i\rangle$, e portanto em U,

$$\nabla f = \sum_i \langle \nabla f, e_i\rangle e_i = \sum_i e_i(f) e_i.$$

Em geral, se $\{\partial_i\}$ é o referencial coordenado em U, teremos

$$\nabla f = g^{ij} \partial_j(f) \partial_i.$$

Além disso, segue das propriedades de derivação que se $f, h : M \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$ e $\nabla(fh) = h\nabla f + f\nabla h$.

Observação 1.23. *Dizemos que um referencial ortonormal $\{e_i\}$ em um aberto $U \subset M^n$ é geodésico em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$.*

Definição 1.24. *Seja X um campo de vetores suave em M. A divergência de X é a função suave $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$, definida por*

$$(\operatorname{div} X)(p) = tr\{v \mapsto \nabla_v X(p)\},$$

onde $v \in T_pM$.

Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \in M$ de p. Escrevendo o campo $X = \sum_i a_i e_i$ em U, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \textstyle\sum_i \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \textstyle\sum_i (e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle) \\ &= \textstyle\sum_i (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle) \end{aligned}$$

Em particular, se o referencial $\{e_i\}$ for geodésico em $p \in U$, teremos $\operatorname{div} X = \sum_i e_i(a_i)$.

Ademais, segue diretamente das propriedades de conexão e da definição de gradiente que

$$\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y \quad \text{e} \quad \operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle.$$

Definição 1.25. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O laplaciano de f é a função suave $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Segue pelas propriedades do gradiente e divergente que $\Delta(f+h) = \Delta f + \Delta h$, e para duas funções suaves $f, h : M \to \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta(fh) &= \operatorname{div}(\nabla(fh)) \\ &= \operatorname{div}(h\nabla f) + \operatorname{div}(f\nabla h) \\ &= h \operatorname{div}(\nabla f) + \langle \nabla h, \nabla f \rangle + f \operatorname{div}(\nabla h + \langle \nabla f, \nabla h \rangle) \\ &= h\Delta f + f\Delta h + 2\langle \nabla f, \nabla h \rangle. \end{aligned}$$

Definição 1.26. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos o hessiano de f como o $(1,1)$–tensor dado por*

$$\nabla^2 f = \nabla_X \nabla f,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Através do $(0,2)$–tensor associado, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla f \rangle \\ &= X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= \nabla^2_{X,Y} f.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Além disso, a hessiana é um tensor simétrico. De fato,

$$\nabla^2 f(X,Y) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f). \tag{1.11}$$

Subtraindo (1.11) de (1.10) concluímos a afirmação. Ademais, segue da definição que

$$\Delta f = tr(\nabla^2 f). \tag{1.12}$$

Proposição 1.27. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

$$\mathfrak{L}_{\nabla f} g = 2\nabla^2 f.$$

Demonstração. De fato, pela propriedade da derivada de Lie para $(0,2)$–tensores, veja Petersen [30], temos

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_{\nabla f} g)(Y,Z) &= g(\nabla_Y \nabla f, Z) + g(Y, \nabla_Z \nabla f) \\ &= \nabla^2 f(Y,Z) + \nabla^2 f(Y,Z) \\ &= 2\nabla^2 f(Y,Z)\end{aligned}$$

□

Proposição 1.28. *Sejam f, h funções suaves em (M^n, g). Então são válidas as afirmações:*

(1) $\nabla^2 f = \nabla df$;

(2) $\nabla(hdf) = h\nabla^2 f + dh \otimes df$;

(3) $\nabla^2 f(\nabla f, .) = \frac{1}{2} d|\nabla f|^2$.

Demonstração. (1) Segue por definição da derivada covariante e do hessiano que, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se

$$\begin{aligned}\nabla df(X,Y) &= \nabla_X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= \nabla^2 f(X,Y).\end{aligned}$$

(2) De fato, pelas propriedades de conexão e por (1), para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla(hdf)(X,Y) &= (\nabla_X hdf)(Y) = h(\nabla_X df)(Y) + X(h)df(Y) \\ &= h\nabla df(X,Y) + dh(X)df(Y) \\ &= (h\nabla^2 f + dh \otimes df)(X,Y). \end{aligned}$$

(3) De fato, pelas propriedades de conexão e por (1), para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned} d|\nabla f|^2(X) &= X(|\nabla f|^2) = X(g(\nabla f, \nabla f)) \\ &= 2g(\nabla_X \nabla f, \nabla f) \\ &= 2\nabla^2 f(\nabla f, X) \end{aligned}$$

para todo $X \in M$. □

Proposição 1.29. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ e $\phi : I \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

1. $d(\phi \circ f) = \phi'(f)df.$
2. $\nabla^2(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla^2 f + \phi''(f)df \otimes df.$

Demonstração. (1) Pelo caráter tensorial da diferencial df, provaremos apenas no referencial coordenado $\{\partial_i\}$. Por definição,

$$d(\phi \circ f)(\partial_i) = \partial_i(\phi \circ f) = \phi'(f)\partial_i(f) = \phi'(f)df(\partial_i).$$

(2) Pelo item 1, temos

$$\begin{aligned} \nabla^2(\phi \circ f) &= \nabla d(\phi \circ f) = \nabla[\phi'(f)df] \\ &= d(\phi'(f)) \otimes df + \phi'(f)\nabla df \\ &= \phi''(f)df \otimes df + \phi'(f)\nabla^2 f. \end{aligned} \tag{1.13}$$

□

Definição 1.30. *Definimos a divergência de um $(1, r)$–tensor T em (M^n, g) como sendo o $(0, r)$–tensor dado por*

$$(\operatorname{div} T)(v_1, \ldots, v_r)(p) = tr(w \mapsto (\nabla_w T)(v_1, \ldots, v_r)(p)),$$

onde $p \in M$ e $(v_1, \ldots, v_r) \in T_pM \times \ldots \times T_pM$.

Para o $(1, 1)$–tensor T considere um referencial ortonormal local $\{e_i\}$, então, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} T)(Z) &= \textstyle\sum g((\nabla_{e_i} T)(Z), e_i) \\ &= \textstyle\sum_i g(\nabla_{e_i} T(Z) - T(\nabla_{e_i} Z), e_i) \\ &= \operatorname{div}(T(Z)) - \textstyle\sum_i T(\nabla_{e_i} Z, e_i.) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{div}(T(Z)) = (\operatorname{div} T)(Z) + \langle \nabla Z, T \rangle. \tag{1.14}$$

Proposição 1.31. *Seja T um $(0,2)$–tensor simétrico em (M^n, g). Então, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e cada $\varphi \in C^\infty(M)$,*

$$\operatorname{div}(T(\varphi Z)) = \varphi(\operatorname{div} T)(Z) + \varphi\langle \nabla Z, T \rangle + T\langle \varphi, Z \rangle.$$

Demonstração. Segue das propriedades do divergente e da simetria de T que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(T(\varphi Z)) &= \operatorname{div}(\varphi T(Z)) \\ &= \varphi \operatorname{div}(T(Z)) + g(\nabla \varphi, T(Z)) \\ &= \varphi(\operatorname{div} T)(Z) + \varphi\langle \nabla Z, T \rangle + T(\nabla \varphi, Z) \end{aligned}$$

□

Proposição 1.32. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. São válidas as afirmações:*

(1) $\operatorname{div}(fI) = df$;

(2) $\operatorname{div} Ric = \frac{1}{2} dS$ *(Segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes);*

(3) $\operatorname{div}(\nabla^2 f) = d\Delta f + Ric(\nabla f, \cdot)$.

Demonstração. (1) Das propriedades de divergência de campos segue

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fI)(X) &= \operatorname{div}(fI(X)) - \langle \nabla X, fI \rangle \\ &= f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle - f \operatorname{div} X \\ &= df(X). \end{aligned}$$

(2) Pelo caráter pontual dos tensores, é suficiente provar para um referencial geodésico $\{e_i\}$ em $p \in M$. Para isso, usaremos as notações $R(e_i, e_j)e_k = R_{ijk}$ e $\nabla_{e_i} = \nabla_i$. Sendo assim, observe que, em p,

$$dS(e_k) = e_k(S) = e_k(\sum_i Ric(e_i, e_i)) = \sum_{ij} e_k \langle R_{jii}, e_j \rangle = \sum_{ij} \langle \nabla_k R_{jii}, e_j \rangle.$$

(3) Com efeito, pela Proposição 1.18,

$$\begin{aligned} Ric(X, \nabla f) &= \operatorname{div}(\nabla_X \nabla f) - \langle X, \nabla(\operatorname{div}(\nabla f)) \rangle - \langle \nabla X,^* \nabla \nabla f \rangle \\ &= \operatorname{div}(\nabla^2 f(X)) - (d\Delta f)(X) - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando a equação (1.14), obtemos

$$\begin{aligned} Ric(X, \nabla f) + (d\Delta f)(X) &= \operatorname{div}(\nabla^2 f(X)) - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle \\ &= (\operatorname{div} \nabla^2 f)(X). \end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. O resultado segue pela simetria do tensor de Ricci. $\square$

Pela antissimetria dos dois primeiros índices do tensor curvatura e pela Segunda Identidade de Bianchi, obtemos

$$\begin{aligned} dS(e_k) &= -\textstyle\sum_{ij}\langle \nabla_k R_{iji}, e_j\rangle \\ &= \textstyle\sum_{ij}\langle \nabla_i R_{jki}, e_j\rangle + \sum_{ij}\langle \nabla_j R_{kii}, e_j\rangle \\ &= \textstyle\sum_{ij}\langle \nabla_i R_{jki}, e_j\rangle + \sum_{ij}\langle \nabla_j R_{ikj}, e_i\rangle \\ &= 2\textstyle\sum_{ij}\langle \nabla_i R_{jki}, e_j\rangle \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde na penúltima parcela usamos que $e_j\langle R_{kii}, e_j\rangle = e_j\langle R_{ikj}, e_i\rangle$ em p e na última parcela trocamos i por j. Por outro lado, ainda no ponto p, temos

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} Ric)(e_k) &= \textstyle\sum_i \langle (\nabla_i Ric)e_k, e_i\rangle = \sum_i\langle \nabla_i Ric(e_k), e_i\rangle \\ &= \textstyle\sum_i e_i\langle Ric(e_k), e_i\rangle = \sum_{ij} e_i\langle R_{jki}, e_j\rangle \\ &= \textstyle\sum_{ij}\langle \nabla_i R_{jki}, e_j\rangle. \end{aligned} \tag{1.16}$$

De (1.16) e (1.15) segue o resultado.

1.2 Métricas conformes e Campos Conformes

Sejam M^n uma variedade suave e g e $\widetilde{g}$ duas métricas Riemannianas definidas em M. Dizemos que as métricas Riemannianas $\widetilde{g}$ e g são *conformes* se existe uma função suave positiva $\varphi : M \to (0, +\infty)$ tal que

$$\widetilde{g} = \frac{1}{\varphi^2} g.$$

O teorema de uniformização para superfícies Riemannianas afirma que toda métrica Riemanniana em uma superfície compacta está relacionada conformemente a uma métrica de curvatura constante. Um modo de generalizar este resultado em dimensões altas ($n \geqslant 3$) foi proposto por Yamabe [35], à saber:

Teorema 1.33 (Yamabe)**.** *Sejam M^n uma variedade compacta de dimensão $n \geqslant 3$ e g uma métrica Riemanniana em M^n. Então, existe uma métrica $\widetilde{g}$ conforme a g com curvatura escalar constante.*

O teorema anterior, apesar de verdadeiro, não foi totalmente demonstrado quando proposto, diante disso, ele ficou conhecido como *Problema de Yamabe*. Posteriormente, os trabalhos de Trundiger [34], Aubin [1] e Schoen [32] garantiram a sua veracidade.

A proposição abaixo reune as equações que comparam as relações de certos entes geométricos entre duas métricas conformes $\widetilde{g}$ e g.

Proposição 1.34. *Sejam $\widetilde{g}$ e g duas métricas conformes definidas em M^n. Então são satisfeitas as seguintes equações:*

1. $\widetilde{\nabla} u = \varphi^2 \nabla u$.

2. $\widetilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X - \frac{1}{\varphi} Y(\varphi) X - \frac{1}{\varphi} X(\varphi) Y + \frac{1}{\varphi} g(X,Y) \nabla \varphi$.

3. $\widetilde{\operatorname{div}} X = \operatorname{div} X - \frac{n}{\varphi} X(\varphi)$.

4. $\widetilde{\Delta} u = \varphi^2 \Delta u - (n-2)\varphi g(\nabla\varphi, \nabla u)$.

5. $\mathfrak{L}_X \widetilde{g} = \frac{1}{\varphi^2} \mathfrak{L}_X g - \frac{2}{\varphi^3} X(\varphi) g$.

6. $\widetilde{\nabla}^2 u = \nabla^2 u + \frac{1}{\varphi} d\varphi \otimes du + \frac{1}{\varphi} du \otimes d\varphi - \frac{1}{\varphi} g(\nabla\varphi, \nabla u) g$.

7. $\widetilde{Ric} = Ric + \frac{(n-2)}{\varphi} \nabla^2 \varphi + \frac{\Delta\varphi}{\varphi} g - (n-1) \frac{\|\nabla\varphi\|^2}{\varphi^2} g$.

8. $\widetilde{S} = S\varphi^2 + 2(n-1)\varphi\Delta\varphi - n(n-1)\|\nabla\varphi\|^2$.

9. $\widetilde{d\mathrm{vol}} = \frac{1}{\varphi^n} d\mathrm{vol}$.

Observação 1.35. *Convém lembrar que, uma variedade Riemanniana (M^n, g) é localmente conformemente plana se cada ponto de M está contido em uma vizinhança coordenada U que é conforme ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.*

Outro conhecido problema envolvendo variedades Riemannianas compactas é referente a teoria de campos conformes, cujo enunciado é descrito abaixo:

Conjectura 1.36. *A esfera padrão é a única variedade suave M^n compacta que admite uma métrica Riemanniana g com curvatura escalar constante S e munida de uma campo de vetores conforme X.*

Lembre que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, em uma variedade Riemanniana (M^n, g), é *conforme* (em relação à métrica g) se existir uma função suave $\psi : M^n \to \mathbb{R}$ de modo que

$$\mathfrak{L}_X g = 2\psi g. \tag{1.17}$$

A função ψ é chamada de *fator conforme* de X (com respeito à métrica g).

Assumindo hipóteses adicionais, Bochner, Lichnerowicz, Nagano, Obata e Yano apresentaram resultados que resolviam a conjectura. O livro do Yano [36] contém um compilado desses resultados (em [10] consta a contribuição de cada um deles). Posteriormente, Ejiri [10] demonstrou que a conjectura não é verdadeira, para isso ele apresentou um contra-exemplo construindo uma métrica de curvatura escalar constante no produto warped $\mathbb{S}^1 \times_f N^{n-1}$, em que $\mathbb{S}^1$ é o círculo padrão e N^{n-1} é uma variedade Riemanniana compacta com curvatura escalar constante.

De posse de um campo de vetores conforme X, e seu fator conforme ψ, é possível deduzir as equações da proposição abaixo (que podem ser encontradas em Obata–Yano [26]).

Proposição 1.37. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e X um campo conforme com fator conforme ψ. Então são satisfeitas:*

1. $g(\nabla S, X) = -2(n-1)\Delta\psi - 2S\psi$,
2. $\mathfrak{L}_X Ric = -(n-2)\nabla^2\psi - \Delta\psi g$,
3. $\mathfrak{L}_X \mathring{Ric} = -(n-2)\mathring{\nabla}^2\psi$.

Em particular, se a curvatura escalar for constante no item 1 acima, então

$$-\Delta\psi = \frac{S}{n-1}\psi \tag{1.18}$$

isto é, ψ é uma autofunção do laplaciano. Na hipótese mais forte de (M^n, g) ser Einstein, então pelo Lema de Schur 1.20, a curvatura escalar é constante e a equação do item 2 é reescrita como segue

$$\nabla^2\psi = \frac{\Delta\psi}{n}g = -\frac{S}{n(n-1)}\psi g. \tag{1.19}$$

O caráter conforme de um campo é invariante por mudança conforme da métrica. Isto significa que se $\widetilde{g}$ e g são métricas conformes e X é conforme em relação à g, então X é conforme em relação à $\widetilde{g}$.

Os campos conformes gradientes são extremamente especiais, visto que eles revelam certa rigidez para a sua ocorrência. O apêndice de Borges–Tenenblat [5] reune os resultados referentes a essa relevância (com as referências indicadas nele) inclusive para o caso semi-Riemanniano.

Uma das técnicas para obter que uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) é isométrica a uma "certa variedada" é a de encontrar uma solução ψ da seguinte equação tensorial:

$$\nabla^2\psi = (-k\psi + c)g, \tag{1.20}$$

para algumas constantes reais k e c. Note que se $k \neq 0$, então uma autofunção do Laplaciano Δ é uma boa candidata à solução da equação (1.20).

Capítulo 2

Variedade quasi-Einstein generalizada

Nosso objetivo é estudar algumas propiedades das variedades quasi-Einstein generalizadas completas, de forma a caracterizá-las sob algumas hipóteses geométricas.

2.1 Resultados auxiliares e caso compacto

Os dois primeiros resultados auxiliares são gerais para uma variedade Riemanniana (M^n, g).

Lema 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$ um função suave. Então*

$$\operatorname{div}(\mathring{Ric}(\nabla f)) = \frac{n-2}{2n}\langle \nabla S, \nabla f\rangle + \langle \nabla^2 f, \mathring{Ric}\rangle \tag{2.1}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathring{Ric}(\nabla f)) &= \operatorname{div}\mathring{Ric}(\nabla f) + \langle \nabla^2 f, \mathring{Ric}\rangle \\
&= \operatorname{div}\big((Ric - \tfrac{S}{n}g)(\nabla f)\big) + \langle \nabla^2 f, \mathring{Ric}\rangle \\
&= \operatorname{div}\big(Ric(\nabla f)\big) - \tfrac{1}{n}\operatorname{div}\big(Sg(\nabla f)\big) + \langle \nabla^2 f, \mathring{Ric}\rangle \\
&= \langle \tfrac{1}{2}\nabla S, \nabla f\rangle - \langle \tfrac{1}{n}\nabla S, \nabla f\rangle + \langle \nabla^2 f, \mathring{Ric}\rangle \\
&= \tfrac{n-2}{2n}\langle \nabla S, \nabla f\rangle + \langle \nabla^2 f, \mathring{Ric}\rangle.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.2. *Para um campo vetorial X em uma variedade Riemanniana (M^n, g), temos*

$$\operatorname{div}(X^\flat \otimes X^\flat) = \operatorname{div} X . X^\flat + (\nabla_X X)^\flat$$

Em particular, quando $X = \nabla f$ para alguma função f em M, concluímos que

$$\operatorname{div}(df \otimes df) = \Delta f df + \frac{1}{2}d|\nabla f|^2.$$

Demonstração. Em geral $(divT)(Z) := \operatorname{div}(\widetilde{T}(Z)) - \langle \nabla Z, T\rangle$ onde $T(X,Y) = \langle \widetilde{T}(X), Z\rangle$, $\widetilde{T} : \mathfrak{X}(M) \mapsto \mathfrak{X}(M)$, por definição, temos

$$\begin{aligned}
(X^\flat \otimes X^\flat)(Y_1, Y_2) &:= X^\flat(Y_1)X^\flat(Y_2) \\
&= \langle X, Y_1\rangle\langle X, Y_2\rangle \\
&= \langle\langle X, Y_1\rangle X, Y_2\rangle.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(X^\flat \otimes X^\flat)(Y_1, Y_2) &= \langle(\widetilde{X^\flat \otimes X^\flat})(Y_1), Y_2\rangle, \text{onde} \\
(\widetilde{X^\flat \otimes X^\flat})(Y_1) &= \langle X, Y_1\rangle X = X^\flat(Y_1)X \\
(\operatorname{div} X^\flat \otimes X^\flat)(Z) &= \operatorname{div}((\widetilde{X^\flat \otimes X^\flat})(Z)) - \langle \nabla Z, X^\flat \otimes X^\flat\rangle \\
&= \operatorname{div}(\langle X, Z\rangle X) - \langle \nabla Z, X^\flat \otimes X^\flat\rangle \\
&= \langle X, Z\rangle \operatorname{div} X + \langle \nabla(\langle X, Z\rangle), X\rangle - (\nabla Z)(X, X) \\
&= (\operatorname{div} X)X^\flat(Z) + X(\langle X, Z\rangle) - (\nabla_X Z^{\flat)}(X) \\
&= (\operatorname{div} X)X^\flat(Z) + X(\langle X, Z\rangle) - X(Z^\flat(X)) + Z^\flat(\nabla_X X) \\
&= (\operatorname{div} X)X^\flat(Z) + X(\langle X, Z\rangle) - X(\langle Z, X\rangle) + \langle Z, \nabla_X X\rangle \\
&= (\operatorname{div} X)X^\flat(Z) + (\nabla_X X)^\flat(Z).
\end{aligned}$$

Portanto, como $Z \in \mathfrak{X}(M)$ é arbitrário

$$\operatorname{div}(X^\flat \otimes X^\flat) = \operatorname{div} X.X^\flat + (\nabla_X X)^\flat.$$

Agora, tomando $X = \nabla f$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(df \otimes df) &= \operatorname{div} \nabla f(\nabla f)^\flat + (\nabla_{\nabla f}\nabla f)^\flat \\
&= \Delta f df + (\nabla_{\nabla f}\nabla f)^\flat.
\end{aligned}$$

Consideremos um campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\nabla f}\nabla f)^\flat(Z) &= \langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, Z\rangle \\
&= \nabla^2 f(Z, \nabla f) \\
&= \langle \nabla_Z \nabla f, \nabla f\rangle.
\end{aligned}$$

E, pela compatibilidade da métrica vamos ter

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_Z \nabla f, \nabla f\rangle &= Z(\langle \nabla f, \nabla f\rangle) - \langle \nabla f, \nabla_Z \nabla f\rangle \\
&= Z\left(|\nabla f|^2\right) - \langle \nabla f, \nabla_Z \nabla f\rangle \\
2\langle \nabla f, \nabla_Z \nabla f\rangle &= Z(|\nabla f|^2) \\
\langle \nabla f, \nabla_Z \nabla f\rangle &= \tfrac{1}{2} d|\nabla f|^2(Z).
\end{aligned}$$

Logo, quando $X = \nabla f$ podemos verificar que

$$\operatorname{div}(df \otimes df) = \Delta f df + \frac{1}{2} d|\nabla f|^2.$$

$\square$

Agora, voltando nossa atenção às variedades quasi-Einstein generalizadas, apresentamos dois resultados necessários para a demonstração dos teoremas principais.

Proposição 2.3. *Seja $(M^n, g, f, \lambda, \nu)$ uma variedade quasi-Einstein generalizada. Então*

$$d\|\nabla f\|^2 \wedge d\nu \wedge df = 0.$$

Demonstração. Recordando a Proposição 1.32 temos que $\operatorname{div}(Ric) = \frac{1}{2}dS$, desenvolvendo ambos os lados desta equação e lembrando que o $(1,1)$–tensor identidade I de $\mathfrak{X}(M)$ está associado ao $(0,2)$–tensor métrico g o que nos permite verificar, do item 1 da mesma proposição, que $\operatorname{div}(\lambda g) = d\lambda$, onde λ é uma função suave de M em $\mathbb{R}$, temos

$$\operatorname{div} Ric = -\operatorname{div}(\nabla^2 f) + \operatorname{div}(\nu df \otimes df) + \operatorname{div}(\lambda g)$$

Pelo lema 2.2 obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} Ric &= -Ric(\nabla f, .) - d\Delta f + \nu\left(\Delta f df + \tfrac{1}{2} d\|\nabla f\|^2\right) + df(\nabla \nu) df + d\lambda \\
&= -Ric(\nabla f, .) - d\Delta f + \nu \Delta df + \tfrac{\nu}{2} d\|\nabla f\|^2 + \langle \nabla f, \nabla \nu\rangle + d\lambda
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
Ric(\nabla f, .) &= -\nabla^2 f(\nabla f, .) + \nu df \otimes df + \lambda g \\
&= -\tfrac{1}{2} d\|\nabla f\|^2 + \nu\langle \nabla f, \nabla f\rangle df + \lambda df \\
&= -\tfrac{1}{2} d\|\nabla f\|^2 + \nu\|\nabla f\|^2 df + \lambda df
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} Ric &= \tfrac{1}{2} d\|\nabla f\|^2 - \nu\|\nabla f\|^2 df - \lambda df - d\Delta f \\
&\quad + \nu \Delta df + \tfrac{\nu}{2} d\|\nabla f\|^2 + \langle \nabla f, \nabla \nu\rangle df + d\lambda \\
&= \tfrac{1}{2} d\|\nabla f\|^2 - d(\lambda f) + f d\lambda - d\Delta f + d\lambda + \operatorname{div}(\nu \nabla f) df + \frac{\nu}{2} d\|\nabla f\|^2,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Então, segue de (2)

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} d(\operatorname{tr} Ric) &= \tfrac{1}{2} d(tr(-\nabla^2 f + \nu df \otimes df + \lambda g)) \\
\tfrac{1}{2} dS &= \tfrac{1}{2} d(-\Delta f + \nu\|\nabla f\|^2 + n d\lambda) \\
&= -\tfrac{1}{2} d\Delta f + \tfrac{\nu}{2} d\|\nabla f\|^2 + \tfrac{1}{2}\|\nabla f\|^2 d\nu + \tfrac{n}{2} d\lambda
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Portanto, por (2.2) e (2.3) implica que

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}d\Delta f+\tfrac{\nu}{2}d\|\nabla f\|^2+\tfrac{\|\nabla f\|^2}{2}d\nu+\tfrac{n}{2}d\lambda &= \tfrac{1}{2}d\|\nabla f\|^2-d(\lambda f)+fd\lambda-d\Delta f\\ &+ d\lambda+\operatorname{div}(\nu\nabla f)df+\tfrac{\nu}{2}d\|\nabla f\|^2,\end{aligned}$$

que se reduz a

$$\tfrac{1}{2}d\Delta f-\tfrac{1}{2}d\|\nabla f\|^2+\tfrac{(n-2)}{2}d\lambda+\tfrac{\|\nabla f\|^2}{2}d\nu \;=\; \operatorname{div}(\nu\nabla f)df+fd\lambda,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}[\Delta f+(n-2)\lambda+2\lambda f]+\frac{\|\nabla f\|^2}{2}d\nu=\operatorname{div}(\nu\nabla f)df+fd\lambda$$

Pela derivada exterior, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}d^2[\Delta f+(n-2)\lambda+2\lambda f]+\frac{1}{2}d\|\nabla f\|^2\wedge d\nu+\frac{\|\nabla f\|^2}{2}d^2\nu &= d[\operatorname{div}(\nu\nabla f)]\wedge df\\ &+\operatorname{div}(\nu\nabla f)d^2f+df\wedge d\lambda\\ &+fd^2\lambda.\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{1}{2}d\|\nabla f\|^2\wedge d\nu\wedge df=d[\operatorname{div}(\nu\nabla f)-\lambda]\wedge df\wedge df.$$

Logo,

$$d\|\nabla f\|^2\wedge d\nu\wedge df=0.$$

□

Lema 2.4. *Sejam (M^n,g,f,λ,ν) uma variedade quasi-Einstein generalizada tal que $\nu=v\circ f$ para alguma função suave $v:I\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, onde $I=f(M)$ e ϕ dada por (**??**). Então*

$$Ric+\frac{1}{\phi'(f)}\nabla^2(\phi\circ f)=\lambda g. \tag{2.4}$$

Além disso,

$$\mathring{Ric}=-\frac{1}{\phi'(f)}\mathring{\nabla}^2(\phi\circ f). \tag{2.5}$$

Em particular, (M^n,g) é uma variedade Einstein se, e só se,$\nabla(\phi\circ f)$ é um campo vetorial conforme.

Demonstração. Pela equação (1.13), obtemos

$$\nabla^2(\phi\circ f)=\phi'(f)\nabla^2 f+\phi''(f)df\otimes df$$

isto é,

$$\nabla^2 f = \tfrac{1}{\phi'(f)}\nabla^2(\phi\circ f) - \tfrac{\phi''(f)}{\phi'(f)}df\otimes df$$

onde $\phi'(t)\neq 0$. Desde que ϕ é dada por (**??**), segue que

$$\phi''(t)+v(t)\phi'(t) = -c_1 v(t)e^{-\int^t v(s)ds} + c_1 v(t)e^{-\int^t v(s)ds} = 0.$$

Desta forma, $\nu = v(f) = -\frac{\phi''(f)}{\phi'(f)}$ substituindo na equação de estrutura (2)

$$\begin{aligned}
Ric + \nabla^2 f - \nu df\otimes df &= \lambda g\\
Ric + \tfrac{1}{\phi'(f)}\nabla^2(\phi\circ f) - \tfrac{\phi''(f)}{\phi'(f)}df\otimes df - \nu df\otimes df &= \lambda g\\
Ric + \tfrac{1}{\phi'(f)}\nabla^2(\phi\circ f) + \nu df\otimes df - \nu df\otimes df &= \lambda g\\
Ric + \tfrac{1}{\phi'(f)}\nabla^2(\phi\circ f) &= \lambda g.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que se v é uma função de f entäo vale (2.4).

De (2.4), podemos facilmente verificar a identidade (2.5), visto que

$$\begin{aligned}
\mathring{Ric} &= \lambda g - \frac{1}{\phi'(t)}\nabla^2(\phi\circ f) - \frac{1}{n}tr(\lambda g)g + tr\left(\frac{1}{\phi'(t)}\nabla^2(\phi\circ f)\right)\frac{g}{n}\\
&= -\frac{1}{\phi'(f)}\nabla^2(\phi\circ f) + \frac{1}{\phi'(f)}tr\nabla^2(\phi\circ f)\frac{g}{n}\\
&= -\frac{1}{\phi'(f)}\left[\nabla^2(\phi\circ f) - \frac{tr\nabla^2(\phi\circ f)}{n}g\right]\\
&= -\frac{1}{\phi'(f)}\mathring{\nabla}^2(\phi\circ f).
\end{aligned}$$

Além disso, segue também de (2.4) que (M^n, g) é uma variedade Einstein se, e somente se, $\nabla(\phi\circ f)$ for um campo vetorial conforme.

Para verificar suponhamos que (M^n, g) seja uma variedade Einstein, disso segue que $\mathring{Ric}\equiv 0$, mas se isso ocorre então $\mathring{\nabla}^2(\phi\circ f)\equiv 0$, temos ainda por definição de um $(0,2)$–tensor sem traço 1.15 e pela Proposição 1.27 que

$$\begin{aligned}
\mathring{\nabla}^2(\phi\circ f) &= \nabla^2(\phi\circ f) - \tfrac{\Delta(\phi\circ f)}{n}g\\
&= \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}_{\nabla(\phi\circ f)}g - \tfrac{\Delta(\phi\circ f)}{n}g.
\end{aligned}$$

Então,

$$2\frac{\Delta(\phi\circ f)}{n}g = \mathfrak{L}_{\nabla(\phi\circ f)}g. \tag{2.6}$$

Desta forma, temos pela equaçao (1.17) refente a campos conformes que $\nabla(\phi\circ f)$ é um campo de vetores conforme gradiente com função conforme $\varphi = \frac{\Delta(\phi\circ f)}{n}$. Por outro lado, se o campo $\nabla(\phi \circ f)$ é conforme com fator $\varphi = \frac{\Delta(\phi\circ f)}{n}$, temos

$$\begin{array}{rcl} 2\frac{\Delta(\phi\circ f)}{n}g & = & \mathfrak{L}_{\nabla(\phi\circ f)}g \\ 2\frac{\Delta(\phi\circ f)}{n}g & = & 2\nabla^2(\phi\circ f) \\ 0 & = & \nabla^2(\phi\circ f) - \frac{\Delta(\phi\circ f)}{n}g, \end{array} \tag{2.7}$$

donde segue que $\mathring{\nabla}^2(\phi \circ f) \equiv 0$, o que implica que $\mathring{Ric} \equiv 0$, e, portanto, (M^n, g) é uma variedade Einstein. □

O próximo resultado apresenta uma forma característica da hessiana de uma função suave u numa variedade Einstein (M^n, g), cujo campo gradiente ∇u é conforme.

Lema 2.5. *Seja (M^n, g) uma variedade de Einstein conexa, $n \geqslant 3$, e seja $u : M \to \mathbb{R}$ uma função suave cujo gradiente ∇u é um campo vetorial conforme. Então*

$$\nabla^2 u = \left[-\frac{Su}{n(n-1)} + c\right] g,$$

para alguma constante c.

Demonstração. Como (M^n, g) é uma variedade Einstein, isto é, $Ric = \frac{S}{n}g$, pelo lema de (Schur) 1.20 a curvatura escalar S é constante, por hipótese ∇u é um campo de vetores conforme. Portanto, segue de (1.19) que

$$\nabla^2 u = \frac{\Delta u}{n} g \tag{2.8}$$

Pelo item (3) da proposição 1.32 e fazendo $w = \frac{\Delta u}{n}$ obtemos

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{div}(\nabla^2 u) & = & \mathrm{div}(wg) \\ Ric(\nabla u) + d\Delta u & = & dw \\ \frac{S}{n}du + d\Delta u & = & \frac{1}{n}d\Delta u \\ \frac{S}{n}du + \frac{(n-1)d\Delta u}{n} & = & 0 \end{array}$$

dividindo por $(n-1)$, temos

$$d\left[\frac{Su}{n(n-1)} + \frac{\Delta u}{n}\right] = 0$$

por integracao,

$$\frac{\Delta u}{n} = -\frac{Su}{n(n-1)} + c,$$

para alguma constante c. Substituindo em (2.8), segue que

$$\nabla^2 u = \left[-\frac{Su}{n(n-1)} + c\right] g,$$

de onde segue o resultado. □

Os dois próximos resultados finalizam a técnica necessária para a demonstração do Teorema 2.9.

Teorema 2.6 (Teorema da Divergência). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta, orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se o bordo ∂M de M está munido com a orientação e a métrica induzida por M, e ν denota o normal exterior a M ao longo de ∂M, então*

$$\int_M \operatorname{div} X \mathrm{dvol}_g = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M).$$

Em particular, se $\partial M = \emptyset$ tem-se

$$\int_M \operatorname{div} X \mathrm{dvol}_g = 0.$$

Teorema 2.7 (Princípio do Máximo de Hopf). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanianna compacta sem bordo, orientável e f uma função suave em M. Se $\Delta f \geqslant 0$ (ou $\Delta f \leqslant 0$), então f é constante.*

Finalmente, o último resultado auxiliar será o Teorema de Karp, o qual é uma extensão do Teorema de Stokes, e será usado para provar o Teorema 2.10.

Lema 2.8 (Teorema de Karp [19]). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta. Considere a bola geodésica $B(r)$ de raio r centrada em algum ponto fixo $x \in M^n$ e um campo vetorial X tal que*

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int\limits_{B(2r) \setminus B(r)} \|X\| \mathrm{dvol}_g = 0$$

Se $\operatorname{div} X$ tiver uma integral (ou seja, se $(\operatorname{div} X)^+$ ou $(\operatorname{div} X)^-$ for integrável), então $\int_M \operatorname{div} X \mathrm{dvol} g = 0$. Em particular, se $divX$ não mudar o sinal fora de algum conjunto compacto, então $\int_M \operatorname{div} X \mathrm{dvol} g = 0$.

Caso compacto

Nesta seção apresentaremos nosso primeiro resultado de rigidez, o qual é uma caracterização da esfera padrão.

Teorema 2.9. *Seja $(M^n, g, f, \lambda, \nu)$ uma variedade quasi-Einstein generalizada compacta com f não constante, curvatura escalar constante e $\nu = v \circ f$ para alguma função suave $v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $I = f(M)$. Então, (M^n, g) é isométrica à esfera padrão $\mathbb{S}^n(r)$ de raio r. Além disso, a menos de reescalonamento, a função potencial é dada por $f =$*

*$\phi^{-1}(c - h_w/n)$, onde ϕ é dado por (**??**), c é uma constante e h_w é a função altura na esfera unitária $\mathbb{S}^n$, em relação a um vetor diferente de zero w.*

Demonstração. Consideramos $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por (**??**). Podemos verificar pela Proposição 2.1 que

$$\operatorname{div}(\mathring{Ric}(\nabla(\phi \circ f))) = \frac{n-2}{2n}\langle \nabla S, \nabla(\phi \circ f)\rangle + \langle \nabla^2(\phi \circ f), \mathring{Ric}\rangle$$

pela Proposição 1.16 e tendo em vista que a curvatura escalar é constante, obtemos

$$\operatorname{div}(\mathring{Ric}(\nabla(\phi \circ f))) = \langle Ric, \mathring{\nabla}^2(\phi \circ f)\rangle$$

Segue do Lema 2.4 que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathring{Ric}(\nabla(\phi \circ f))) &= \left\langle \lambda g - \tfrac{1}{\phi'(f)}\nabla^2(\phi \circ f), \nabla^2(\mathring{\phi} \circ f)\right\rangle \\
&= \langle \lambda g, \mathring{\nabla}^2(\phi \circ f)\rangle - \tfrac{1}{\phi'(f)}\langle \nabla^2(\phi \circ f), \mathring{\nabla}^2(\phi \circ f)\rangle \\
&= -\tfrac{1}{\phi'(f)}\left\langle \mathring{\nabla}^2(\phi \circ f) + \tfrac{\Delta(\phi \circ f)}{n} g, \mathring{\nabla}^2(\phi \circ f)\right\rangle \\
&= -\tfrac{1}{\phi'(f)}\left[\|\mathring{\nabla}^2(\phi \circ f)\|^2 + \tfrac{\Delta(\phi \circ f)}{n}\langle g, \mathring{\nabla}^2(\phi \circ f)\rangle\right] \\
&= -\tfrac{1}{\phi'(f)}\|\mathring{\nabla}^2(\phi \circ f)\|^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{div}(\mathring{Ric}(\nabla(\phi \circ f))) = -\frac{1}{\phi'(f)}\|\mathring{\nabla}^2(\phi \circ f)\|^2. \tag{2.9}$$

Integrando (2.9) e aplicando o teorema da divergência, uma vez que M é compacta, concluímos que

$$0 = \int_M \operatorname{div}(\mathring{Ric}(\nabla(\phi \circ f)))\mathrm{dvol}_g = \int_M -\frac{1}{\phi'(f)}\|\mathring{\nabla}^2(\phi \circ f)\|^2 \mathrm{dvol}_g.$$

Deste modo, $\mathring{\nabla}^2(\phi \circ f) = 0$, pelo Lema 2.4, (M^n, g) é uma varidade Einstein. Verificamos em (2.6) que $\nabla(\phi \circ f)$ é um campo vetorial conforme gradiente não trivial com fator conforme $\psi = \frac{\Delta(\phi \circ f)}{n}$. Assim, pelo Lema 2.5,

$$\nabla^2(\phi \circ f) = \left[-\frac{S(\phi \circ f)}{n(n-1)} + c\right] g,$$

para alguma constante c. Segue do Princípio do Máximo de Hopf 2.7 e da estrutura quasi-Einstein gradiente ser não trivial que ψ não pode ser constante.

Como por hipótese S é constante, pela equação (1.18) referente a campos conformes, temos

$$-\Delta\psi = \frac{S}{n-1}\psi \tag{2.10}$$

e, portanto $\frac{S}{n-1}$ é um autovalor do laplaciano, desta forma $\nabla(\phi \circ f)$ é um campo conforme gradiente que satisfaz $\Delta\psi + \frac{S}{n-1}\psi{=}0$. Segue que $S > 0$, pois ψ não é constante.

Por (M^n, g) ser Einstein temos pela equação (1.19) referente a campos conformes, obtemos que

$$\nabla^2\psi = -\frac{S}{n(n-1)}\psi g.$$

Como a variedade M é compacta, o teorema de Obata [24] implica que (M^n, g) é isométrica a esfera padrão $\mathbb{S}^n(r)$ de raio $r = \sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}$. Fazendo homotetia na métrica podemos supor $S = n(n-1)$. Substituindo em (2.10) e usando o fato de que $\psi = \frac{\Delta(\phi\circ f)}{n}$, obtemos

$$-\Delta\Delta(\phi\circ f) = n\Delta(\phi\circ f)) \tag{2.11}$$

Portanto, $\Delta(\phi\circ f)$ é uma autofunção associada ao primeiro autovalor da esfera unitária. Por Berger [3], segue que existe um vetor w tal que $\Delta(\phi\circ f) = h_w$, onde $w \in \mathbb{S}^n$. Assim, podemos reescrever a equação (2.12) como

$$-\Delta h_w = n\Delta(\phi\circ f) \Rightarrow \Delta\left(\frac{h_w}{n} + (\phi\circ f)\right) = 0$$

Pelo Princípio do Máximo de Hopf 2.7 concluímos que $(\phi\circ f) = c - \frac{h_w}{n}$, onde c é uma constante positiva. Finalmente, como ϕ é estritamente monótona, concluímos que $f = \phi^{-1}(c - \frac{h_w}{n})$. □

2.2 Caso não compacto e exemplos não rígidos

Nesta seção, iremos demonstrar o resultado de rigidez para o caso não compacto. No final apresentamos duas classes de variedades quasi-Einstein não rígidas.

Teorema 2.10. *Seja $(M^n, g, f, \lambda, \nu)$ uma variedade quasi-Einstein generalizada completa não compacta com f não constante, curvatura escalar constante e $\nu = v\circ f$ para alguma função suave $v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $I = f(M)$. Considere a bola geodésica $B(r)$ de raio r centrada em algum ponto fixo $x_0 \in M$. Além disso, suponha que*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int\limits_{B(2r)\setminus B(r)} \|\mathring{Ric}(\nabla(\phi\circ f))\| \mathrm{dvol}_g = 0 \tag{2.12}$$

onde $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado por (2) e $\mathring{Ric}$ denota o tensor de Ricci sem traço. Então, (M^n, g) é uma variedade Einstein de curvatura escalar não-positiva e f tem no máximo um ponto crítico. Mais precisamente, (M^n, g) é isométrica a uma das seguintes variedades

(i) um produto Riemanniano $\mathbb{R} \times N^{n-1}$.

(ii) um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

(iii) *um espaço Hiperbólico* $\mathbb{H}^n\left(\sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}\right)$.

(iv) *um Produto Warped* $\left(\mathbb{R}\times N^{n-1}, dt^2 + e^{2\sqrt{\frac{S}{n(n-1)}}t}g_N\right)$, *onde* (N^{n-1,g_N}) *é uma variedade Einstein.*

Demonstração. Como na prova anterior, por hipótese temos

$$\mathrm{div}(\mathring{Ric}(\nabla(\phi\circ f))) = -\frac{1}{\phi'(f)}\|\mathring{\nabla}^2(\phi\circ f)\|^2. \tag{2.13}$$

Como $\phi'(f)\neq 0$, segue que a constante c_1 de (**??**) é diferente de zero, portanto $\mathrm{div}(\mathring{Ric}(\nabla(\phi\circ f)))$ não muda de sinal. Integrando (1.13) segue do lema 2.8 (Teorema de Karp) que

$$0 = \int_M \mathrm{div}(\mathring{Ric}(\nabla(\phi\circ f)))\mathrm{dvol}_g = -\int_M \frac{1}{\phi'(f)}\|\mathring{\nabla}^2(\phi\circ f)\|^2\mathrm{dvol}_g$$

ademais, $\mathring{Ric}\equiv 0$ e $\nabla(\phi\circ f)$ é um campo de vetorial conforme gradiente. Portanto, (M,g) é uma variedades Einstein. Asim sendo, o lema 2.5 implica

$$\nabla^2(\phi\circ f) = \left[-\frac{S(\phi\circ f)}{n(n-1)} + c\right]g,$$

e, portanto, a classificação de (M^n,g) depende da curvatura escalar S e da existência de pontos críticos de f. Ademais, como (M^n,g) também é completa e não compacta, segue do Teorema de Bonnet-Myers que $S\leq 0$.

Supondo $S=0$ temos dois casos a considerar: $c=0$ ou $c\neq 0$.

Se $S=c=0$, então (M^n,g) é isométrico ao produto Riemanniano $\mathbb{R}\times N^{n-1}$ (veja [20]).

Se $S=c\neq 0$ então (M^n,g) é isométrica ao espaço euclidiano $(\mathbb{R}^n,g_0)$ (veja [20] ou Teorema 5.5 em [5]), o que prova (i) e (ii).

Agora suponha que $S<0$, então devemos considerar os pontos críticos de f, que também são os mesmos pontos críticos de $\phi\circ f$.

Se f tem um ponto crítico, então (M^n,g) é isométrica a um espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^n\left(\sqrt{\frac{n(n-1)}{|S|}}\right)$. (ver [18] ou Teorema 5.7 em [5]), que prova (iii).

Se f não tem pontos críticos, então (M^n,g) é isométrico a $\mathbb{R}\times N^{n-1}$, com a métrica dada por $dt^2+e^{2\sqrt{\frac{|S|}{n(n-1)}}t}g_N$ e (N^{n-2},g_N) (ver [18] ou Teorema 5.7 em [5]), que prova (iv).

Se f não tem pontos críticos (N^{n-1},g_N) é uma variedade Riemanniana Einstein, (veja [20] ou Teorema 5.7 em [5]). Isso prova (iv). □

Corolário 2.11. *Seja* (M^n,g) *uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura escalar constante* S. *Suponha que* $\overline{g}=\frac{1}{\varphi^2}g$ *é uma métrica de Einstein em* M^n

onde φ é uma função suave positiva não constante. Seja $B(r)$ a bola geodésica de raio r centrada em algum ponto fixo $x_0 \in M$. Além disso, suponha que

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int\limits_{B(2r)\backslash B(r)} \|\mathring{Ric}(\nabla(\varphi))\|\mathrm{dvol}_g = 0. \tag{2.14}$$

Então, (M^n, g) é uma variedade de Einstein com $S \leq 0$ e φ tem no máximo um ponto estacionário. Mais precisamente, (M^n, g) é isométrica a uma das seguintes variedades:

(i) um produto Riemanniano $\mathbb{R} \times N^{n-1}$.

(ii) um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

(iii) um espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^n\left(\sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}\right)$.

(iv) um Produto Warped $\left(\mathbb{R} \times N^{n-1}, dt^2 + e^{2\sqrt{\frac{S}{n(n-1)}}t} g_N\right)$, onde (N^{n-1,g_N}) é uma variedade Einstein.

Demonstração. Inicialmente, notamos que (M^n, g) tem curvatura escalar constante S e existe uma métrica de Einstein conforme $\overline{g}$, cujo tensor de Ricci $\overline{Ric}$ é dado como no item (7) da proposicao 1.34, ou seja,

$$\overline{Ric} = Ric + \frac{(n-2)}{\varphi}\nabla^2\varphi + \frac{\Delta\varphi}{\varphi}g - (n-1)\frac{\|\nabla\varphi\|^2}{\varphi}g$$

Além disso

$$\overline{Ric} = \frac{\overline{S}}{n}g = \frac{\overline{S}}{n\varphi^2}g$$

onde S é a curvatura escalar (constante) de $\overline{g}$. Então

$$Ric + \frac{(n-2)}{\varphi}\nabla^2\varphi = \lambda g$$

com

$$\lambda = \frac{\overline{S}}{n\varphi^2} - \frac{\Delta\varphi}{\varphi} + (n-1)\frac{\|\nabla\varphi\|^2}{\varphi^2}$$

Agora, tomando $f = (n-2)\ln\varphi$ i.e., $\varphi = \phi \circ f$, por um cálculo direto $(M^n, g, f, \lambda, -\frac{1}{n-2})$ Variedade de Einstein e desde

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_{B(2r)\backslash B(r)} \|\mathring{Ric}(\nabla(\phi\circ f))\|\mathrm{dvol}_g = \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_{B(2r)\backslash B(r)} \|\mathring{Ric}(\nabla\varphi))\|\mathrm{dvol}_g = 0$$

a classificação de (M^n, g) segue pelo Teorema 2.10 $\square$

Observação 2.12. *Note que podíamos ter demonstrado o Teorema 2.10 e o Corolário 2.11 usando o Teorema 2 e [33].*

Exemplos não rígidos

Os resultados de rigidez indicados acima requerem uma curvatura escalar constante. Se liberarmos esse requisito, obteremos o seguintes teoremas, que provam a existência de classes de variedades quasi-Einstein generalizadas completas, conformes ao espaço euclidiano $(\mathbb{R}^n, g_0)$, onde g_0 é a métrica padrão. Essas variedades são obtidas considerando-se o fator conforme e a função potencial como radial ou invariante sob a ação de um grupo de traslação $(n-1)$-dimensional.

Lema 2.13. *Seja $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $n \geq 3$, o espaço euclidiano. Considere as funções suaves φ, f, λ e $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que φ não se anula. Então $(\mathbb{R}^n, g, f, \lambda, \nu)$, com $g = \frac{g_0}{\varphi^2}$ é uma variedade quasi-Einstein generalizada não trivial se, e somente se, as funções f, λ, ν e φ satisfazem para todo $i = j$, $1 \leq i, j \leq n$,*

$$(n-2)\frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} + f_{x_i x_j} + f_{x_i}\frac{\varphi_{x_j}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} f_{x_j} - \nu f_{x_i} f_{x_j} = 0 \tag{2.15}$$

para todo i,

$$(n-2)\frac{\varphi_{x_i x_i}}{\varphi} + f_{x_i x_i} + 2 f_{x_i}\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} - \nu \cdot (f_{x_i})^2 + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\varphi_{x_k x_k}}{\varphi} - (n-1)\left(\frac{\varphi_{x_k}}{\varphi}\right)^2 - f_{x_k}\frac{\varphi_{x_k}}{\varphi}\right] = \frac{\lambda}{\varphi^2}. \tag{2.16}$$

Demonstração. A prova segue calculando cada termo da equação fundamental (2) para a métrica $g_{ij} = \delta_{ij}/\varphi^2$. Pelo item (7) Proposição 1.34, referente a métricas conformes, temos

$$\begin{aligned}
(Ric_g)_{ij} &= (Ric_\delta)_{ij} + \tfrac{(n-2)}{\varphi}\varphi_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{n}\varphi_{x_k x_k}\delta_{ij} - \frac{(n-1)}{\varphi^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_{x_k}^2\delta_{ij} \\
&= \tfrac{(n-2)}{\varphi}\varphi_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\varphi_{x_k x_k}}{\varphi} - (n-1)\left(\frac{\varphi_{x_k}}{\varphi}\right)^2\right]\delta_{ij},
\end{aligned}$$

Para calcular a Hessiana vamos utilizar o item (6), daí segue,

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 f)_{ij} &= f_{x_i x_j} + \tfrac{1}{\varphi}(df \otimes d\varphi)(\partial_i, \partial_j) + \tfrac{1}{\varphi}(d\varphi \otimes df)(\partial_i, \partial_j) - \tfrac{1}{\varphi}\sum_{k=1}^{k} f_{x_k}\varphi_{x_k}\delta_{ij} \\
&= f_{x_i x_j} + \tfrac{1}{\varphi}df(\partial_i)d\varphi(\partial_j) + \tfrac{1}{\varphi}d\varphi(\partial_i)df(\partial_j) - \tfrac{1}{\varphi}\sum_{k=1}^{k} f_{x_k}\varphi_{x_k}\delta_{ij} \\
&= f_{x_i x_j} + f_{x_i}\tfrac{\varphi_{x_j}}{\varphi} + \tfrac{\varphi_{x_i}}{\varphi} f_{x_j} - \tfrac{1}{\varphi}\textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{x_k}\varphi_{x_k}\delta_{ij}
\end{aligned}$$

Substuindo em (2) e observando que $(df \otimes df)_{ij} = f_{x_i} f_{x_j}$, obtemos

$$\begin{aligned} &\tfrac{(n-2)}{\varphi}\varphi_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{n}\left[\tfrac{\varphi_{x_k x_k}}{\varphi} - (n-1)\left(\tfrac{\varphi_{x_k}}{\varphi}\right)^2\right]\delta_{ij} + f_{x_i x_j} \\ &+ f_{x_i}\frac{\varphi_{x_j}}{\varphi} + \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} f_{x_j} - \tfrac{1}{\varphi}\sum_{k=1}^{n} f_{x_k}\varphi_{x_k}\delta_{ij} - \nu f_{x_i} f_{x_j} = \lambda g \end{aligned}$$

concluímos que (2) vale se, e somente se, (2.15) e (2.16) valem. □

Observe que pelo item (8) a curvatura escalar da métrica $g = g_0/\varphi^2$ é dada por

$$S = (n-1)(2\varphi\Delta_{g_0}\varphi - n|\nabla_{g_0}\varphi|^2). \tag{2.17}$$

Ressaltamos que o sistema de equações (2.15) e (2.16) admite soluções radiais e também soluções que são invariantes sob a ação de um grupo de translação $(n-1)$–dimensional. Essas soluções fornecem as variedades quasi-Einstein generalizadas dadas nos teoremas seguintes.

Teorema 2.14. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana conformemente plana, onde $g = g_0/\varphi^2$. Suponha que $\varphi(r)$ e $f(r)$ sejam funções radiais de $r = ||x||^2$, tais que φ não se anule e f seja estritamente monótona. Então $(\mathbb{R}^n, g, f, \lambda, \nu)$ é uma variedade quasi-Einstein generalizada se, e somente se, λ e ν também são funções de r que são dadas por*

$$\nu = \frac{1}{(f')^2}\left[(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} + f'' + 2f'\frac{\varphi'}{\varphi}\right], \tag{2.18}$$

$$\lambda = 4[(n-1)\varphi'(\varphi - r\varphi') + r\varphi(\varphi'' - f'\varphi')] + 2f'\varphi^2. \tag{2.19}$$

Nest caso,

$$S = 4(n-1)[2r\varphi\varphi'' - nr(\varphi')^2 + n\varphi\varphi']. \tag{2.20}$$

além disso, se φ é uma função limitada, então é uma variedade completa.

Demonstração. Suponha que φ e f sejam funções de $r = ||x||^2$. Como conseqüência do Lema 2.13, $(\mathbb{R}^n, g, f, \lambda, \nu)$ é uma variedade quasi-Einstein generalizada, onde $g = g_0/\varphi^2$ se, e somente se, (2.15) e (2.16) valem. Um cálculo direto mostra que essas equações se reduzem, respectivamente, a

$$4x_i x_j\left[(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} + f'' + 2f'\frac{\varphi'}{\varphi} - \nu(f')^2\right] = 0,$$

para todo $i \neq j$, $x \in \mathbb{R}^n$ e todo i,

$$4x_i^2\left[(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi}+f''+2f'\frac{\varphi'}{\varphi}-\nu(f')^2\right]+2f'$$
$$+4\left[(n-1)\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{\varphi''}{\varphi}r-(n-1)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2r-f'\frac{\varphi'}{\varphi}r\right]=\frac{\lambda}{\varphi^2}.$$

Como $f(r)$ é uma função estritamente monótona, então $f'\neq 0$. Portanto, segue de (2.15) e (2.16) que $(\mathbb{R}^n,g,f,\lambda,\nu)$ é uma variedade quasi-Einstein generalizada se, e somente se, ν é dado em termos de φ e f por (2.18) e λ é definido por (2.19). A expressão (2.20) da curvatura escalar segue de (2.17).

Se φ é uma função limitada, então a completude da variedade segue do fato de que o comprimento de qualquer divergente curva é ilimitada.

□

Apresentamos agora alguns exemplos de variedades quasi-Einstein generalizadas, conformemente planas e completas em $\mathbb{R}^n$, descritas no Teorema 2.14

Exemplo 2.15. *Consideramos o fator conforme $\varphi(r)$, onde $r=||x||^2$, dado por $\varphi(r)=e^{-\frac{r^2}{2}}$ e o potencial do sóliton gaussiano, $f(r)=cr$, $c\neq 0$ nas Equações (2.18) e (2.19) obtemos*

$$\begin{aligned}\nu(r) &= \tfrac{1}{c^2}\left[(n-2)\left(\frac{-e^{\frac{r^2}{2}}+r^2e^{\frac{r^2}{2}}}{e^{\frac{r^2}{2}}}\right)-2cr\frac{e^{\frac{r^2}{2}}}{e^{\frac{r^2}{2}}}\right]\\ &= \tfrac{1}{c^2}[(n-2)(r^2-1)-2cr]\\ &= \tfrac{1}{c^2}[nr^2-2rc-2r^2-n+2]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda(r) &= 4\left[(n-1)(-r)e^{\frac{r^2}{2}}(e^{\frac{r^2}{2}}+e^{\frac{r^2}{2}})+re^{\frac{r^2}{2}}(r^2e^{\frac{r^2}{2}}-e^{\frac{r^2}{2}}+cre^{\frac{r^2}{2}})\right]+2cre^{-r^2}\\ &= 4e^{-r^2}[-(n-1)r(r^2+1)+r(r^2-1+cr)]+2ce^{-r^2}\\ &= 4e^{-r^2}r[-(n-1)(r^2+1)+r^2-1+cr]+2ce^{-r^2}\\ &= 4e^{-r^2}r[-nr^2-n+r^2+1+r^2-1+cr]+2cre^{-r^2}\\ &= 4e^{-r^2}r[nr^2+2r^2+cr-n]+2ce^{-r^2}\end{aligned}$$

Como $||\varphi||\leqslant 1$, segue do Teorema 2.14 que $(\mathbb{R}^n,g_0/\varphi^2,f,\lambda,\nu)$ é uma variedade quasi-Einstein generalizada completa, cuja curvatura escalar não constante (negativa) é dada por

$$S(r)=4(n-1)e^{-r^2}r(nr^2-2r^2+n+2).$$

Exemplo 2.16. *Consideramos o fator conforme $\varphi(r)=1/(1+r)$, onde $r=\|x\|^2$ e o potencial do sóliton gaussiano, $f(r)=cr$, $c\neq 0$. Das Equações (2.18) e (2.19) obtemos*

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{c^2}[(n-2)2(r+1)^{-2} - 2c(r+1)^{-1}] \\ &= \frac{2}{c^2(r+1)}[n-2-c(1+r)]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda(r) &= 4[(n-1)\phi'(r)(\phi(r) - r\phi'(r)) + r\phi(\phi'' - f'(r)\phi'(r))] + 2f'(r)(\phi(r)^2 \\ &= 4[-(n-1)(1+r^{-2})((1+r^{-1}) + r(1+r)^{-2}) + r(1+r)^{-1}(2(1+r)^{-3} \\ &\quad +c(1+r)^{-2})] + 2c(1+r)^{-2} \\ &= 4[-(n-1)(1+r)^{-3} - (n-1)r(1+r)^{-4} + 2r(1+r)^{-4} + cr(1+r)^{-3}] \\ &\quad +2c(1+r)^{-2} \\ &= 4(1+r)^{-4}[-(n-1)(1+r) - (n-1)r + 2r + cr(1+r)] + 2c(1+r)^{-2} \\ &= 4(1+r)^{-4}[cr(1+r) - n - nr + 1 + r - nr + r + 2r] + 2c(1+r)^{-2} \\ &= 4(1+r)^{-4}[cr(1+r) - 2nr - n + 4r + 1] + 2c(1+r)^{-2} \\ &= \frac{4}{(1+r)^{-4}}[cr(1+r) - 2r(n-2) - n + 1] + \frac{2c}{(1+r)^{-2}}\end{aligned}$$

Desde $\|\varphi\| \leqslant 1$, Teorema 2.14 implica que $(\mathbb{R}^n, g_\circ/\varphi^2, f, \lambda, \nu)$ é uma variedade quasi-Einstein generalizada completa, cuja curvatura escalar é dada por

$$S(r) = \frac{4(n-1)}{(1+r)^4}(4r - 2nr - n).$$

Pode-se certamente produzir muitos outros exemplos explícitos de variedades quasi-Einstein generalizadas, escolhendo outras funções radiais potenciais $f(r)$ que são estritamente monótonas e outras funções radiais limitadas positivas $\varphi(r)$, onde $r = \|x\|^2$.

Teorema 2.17. *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ uma variedade Riemanniana conformemente flat , onde $g = g_\circ/\varphi^2$ e $\varphi(u)$ é um função não nula de $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$, onde $\alpha_k \in \mathbb{R}$ são tais que $a = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \neq 0$. Seja $f(u)$ uma função estritamente monótona. Entao existe $\nu(u)$ e $\lambda(u)$ tais que $(\mathbb{R}^n, g, f, \lambda, \nu)$ e uma variedade quasi-Einstein generalizada se, e somente se,*

$$\nu = \frac{1}{(f')^2}\left[(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} + f'' + 2f'\frac{\varphi'}{\varphi}\right], \tag{2.21}$$

$$\lambda = a\,[\varphi\varphi'' - f'\varphi\varphi' - (n-1)(\varphi')^2]. \tag{2.22}$$

Sua curvatura escalar é dada por

$$S = a(n-1)[2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2].$$

Além disso, se φ for uma função limitada, então a variedade (M^n, g) é completa.

Demonstração. Suponha que $f(u)$ e $\varphi(u)$ sejam funções de $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$, onde $a =$

$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\neq 0$, tal que φ não se anula. Como consequência do Lema 2.13, $(\mathbb{R}^n,g,f,\lambda,\nu)$ é uma variedade quasi-Einstein generalizada, onde $g=g_0/\varphi^2$ se, e somente se, para todos os $i\neq j$

$$\alpha_i\alpha_j\left[(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi}+f''+2f'\frac{\varphi'}{\varphi}-\nu(f')^2\right]=0, \tag{2.23}$$

e para todo i

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha_i^2[(n-2)\varphi\varphi''+\varphi^2f''+2\varphi f'\varphi'-\nu\varphi^2(f')^2]\\ &\quad +a\,[\varphi\varphi''-(n-1)(\varphi')^2-f'\varphi\varphi'].\end{aligned} \tag{2.24}$$

Se existe $i\neq j$ tal que $\alpha_i\alpha_j\neq 0$, então segue de (2.23) que

$$(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi}+f''+2f'\frac{\varphi'}{\varphi}-\nu(f')^2=0. \tag{2.25}$$

Portanto, (2.24) se reduz a

$$\lambda=a\,[\varphi\varphi''-(n-1)(\varphi')^2-f'\varphi\varphi']. \tag{2.26}$$

Se para todos os pares $i\neq j$, $\alpha_i\alpha_j=0$, então u depende apenas de uma das variáveis x_i e sem perda de generalidade, podemos assumir $u=\alpha_1x_1$, $\alpha_1\neq 0$. Então (2.23) é trivialmente satisfeito para todo $i\neq j$. Além disso, para $i>1$, (2.24) se reduz a (2.26) com $a=\alpha_1^2\neq 0$ e para $i=1$, reduz-se a

$$\lambda=\alpha_1^2[(n-2)\varphi\varphi''+\varphi^2f''+2\varphi f'\varphi'-\nu\varphi^2(f')^2]+a[(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi}+f''+2f'\frac{\varphi'}{\varphi}-\nu(f')^2],$$

Portanto, como λ satisfaz (2.26), segue de a última equação que (2.25) mantém. $\square$

Exemplo 2.18. *Consideramos o fator conforme $\varphi(u)=1+\tanh u$,onde $u=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kx_k$, com $a=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\neq 0$ e a função potencial $f(u)=u$. Das equações (2.21) e (2.22), e observando que derivada $\varphi'(u)=-\frac{1}{\cosh^2 u}$, $\varphi''(u)=-\frac{2\,\mathrm{senh}\,u}{\cosh^3 u}$ e $f'(r)=1$ obtemos*

$$\begin{aligned}\nu &= \tfrac{1}{(f'(u))^2}\left[(n-2)\tfrac{\varphi''(u)}{\varphi(u)}+f''(u)+2f'(u)\tfrac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\right]\\ &= \left[-(n-2)\tfrac{2\tanh u}{\cosh^2 u(1+\tanh u)}+\tfrac{2}{\cosh^2(1+\tanh u)}\right]\\ &= 2\left[\tfrac{1-(n-2)\tanh u}{\cosh^2 u(1+\tanh u)}\right]\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\lambda &= a\left[\varphi(u)\varphi''(u) - f'\varphi(u)\varphi'(u) - (n-1)(\varphi'(u))^2\right] \\
&= a\left[(1+\tanh u)\left(-\tfrac{2\,\mathrm{senh}\,u}{\cosh^3 u}\right) - (1+\tanh u)\,\mathrm{sech}^3\,u - (n-1)\,\mathrm{sech}^4\,u\right] \\
&= a\left[-2\tfrac{\tanh u}{\cosh^2 u}(1+\tanh u) - (1+\tanh u)\,\mathrm{sech}^2\,u - (n-1)\,\mathrm{sech}^4\,u\right] \\
&= \tfrac{a}{\cosh^2 u}\left[-2\tanh u(1+\tanh u) - (1+\tanh u) - (n-1)\,\mathrm{sech}^2\,u\right] \\
&= \tfrac{a}{\cosh^2 u}\left[-2\tanh u - 2\tanh^2 u - 1 - \tanh u - n\,\mathrm{sech}^2\,u + \mathrm{sech}^2\,u\right] \\
&= \tfrac{a}{\cosh^2 u}\left[-3\tanh u - 2\tanh^2 u - 1 - n(1-\tanh^2 u) + 1 - \tanh^2 u\right] \\
&= \tfrac{a}{\cosh^2 u}\left[-3\tanh u - 3\tanh^2 u - n + n\tanh^2 u\right] \\
&= \tfrac{a}{\cosh^2 u}\left[(n-3)\tanh^2 u - 3\tanh u - n\right]
\end{aligned}
$$

Como φ é uma função limitada, segue do Teorema 2.17 que $(\mathbb{R}^n, g_\circ/\varphi^2, f, \lambda, \nu)$ é uma variedade quasi-Einstein generalizada completa, cuja curvatura escalar é dada por

$$
\begin{aligned}
S &= a(n-1)[2\varphi(u)\varphi''(u) - n(\varphi')^2] \\
&= a(n-1)\left[2(1+\tanh u)\left(\tfrac{2\,\mathrm{senh}\,u}{\cosh^3 u}\right) - n\,\mathrm{sech}^4\,u\right] \\
&= a(n-1)\left[-4\tfrac{\mathrm{senh}\,u}{\cosh^3 u}(1+\tanh u) - n(\mathrm{sech}^2\,u)^2\right] \\
&= a(n-1)\left[-4\tfrac{\mathrm{senh}\,u}{\cosh^3 u}(1+\tanh u) - \tfrac{n}{\cosh^4 u}\right] \\
&= \tfrac{a(n-1)}{\cosh^2 u}\left[-4\tfrac{\mathrm{senh}\,u}{\cosh u}(1+\tanh u) - n\,\mathrm{sech}^2\,u\right] \\
&= \tfrac{a(n-1)}{\cosh^2 u}\left[-4\tanh u - 5\tanh^2 u - n(1-\tanh^2 u)\right] \\
&= \tfrac{a(n-1)}{\cosh^2 u}\left[(n-4)\tanh^2 u - 4\tanh u - n\right]
\end{aligned}
$$

Pode-se produzir muitos outros exemplos explícitos de variedades quasi-Einstein generalizadas, escolhendo outras funções potenciais estritamente monótonas $f(u)$ e funções limitadas positivas $\varphi(u)$, onde $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ e $a = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \neq 0$, que são invariantes sob a ação de um grupo de translação $(n-1)$–dimensional .

Referências Bibliográficas

[1] AUBIN, T. *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*. J. Math. Pures Appl. 55 (1976) 269–296

[2] BESSE, A. L. *Einstein manifolds*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987

[3] BERGER, M.; GAUDUCHON, P.; MAZET, E. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 194, Springer-Verlag, New York, 1971

[4] BIEZUNER, R. B. *Notas de aula, Geometria Riemanniana*. UFMG, Minas Gerais, 2017

[5] BORGES, V.; TENENBLAT, K. *Ricci almost solitons on semi-Riemannian warped products*. Mathematische Nachrichten. 295 (2022) 22–43

[6] BOURGUIGNON, J. P. *Ricci curvature and Einstein metrics*. Global differential geometry and global analysis, Lecture Notes in Math., v.838. Springe, Berlin, 1981, p. 42-63

[7] CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. 5ª ed. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011

[8] CATINO, G. *Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor*. Math. Z. (2012) v. 271 751–756

[9] CATINO, G.; MASTROLIA, P.; MONTICELLI, D.; RIGOLI, M. *On the geometry of gradient Einstein-type manifolds*. Pac. J. Math. 286 (1) (2017) 39–67

[10] EJIRI, N. *A negative answer to a conjecture of conformal transformations of Riemannian manifolds*. J. Math. Soc. Japan, v. 33, (1981) 261–266

[11] FEITOSA, F. E. S.; FREITAS FILHO, A. A.; GOMES, J. N. V. *On the construction of gradient Ricci soliton warped product*. Nonlinear Analysis. 161 (2017) 30–43

[12] Feitosa, F. E. S.; Freitas Filho, A. A.; Gomes, J. N. V.; Pina, R. S. *Gradient Ricci almost soliton warped product*. Journal of Geometry and Physics 143 (2019) 22–32

[13] Freitas Filho, A. A.; Tenenblat, K. *On generalized quasi-Einstein manifolds.* J. Geom. Phys. 178 (2022) 104562

[14] Gomes, J. N. V. *Operadores diferenciais em variedades Riemannianas, Notas de Aula*. USP, São Paulo, 2015

[15] Gomes, J. N. V. *A note on gradient Einstein-type manifolds*. Differential Geometry and its Applications 66 (2019) 13–22

[16] Gomes, J. N. V.; Wang, Q.; Xia, C. *On the h–almost Ricci soliton*. Journal of Geometry and Physics. 114 (2017) 216–222

[17] Hamilton, R. S. *Three-manifolds with positive Ricci curvature*. J. Differential Geom. 17 (2) (1982) 255–306

[18] Kanai, M. *On a differential equation characterizing a Riemannian structure of a manifold*. Tokyo journal of mathematics. v. 6 (1983), n. 1, p. 143–151

[19] Karp, L. *On Stokes' theorem for noncompact manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981) 487–490

[20] Kerbrat, Y. *Transformations conformes des variétés pseudo-riemanniennes*. Journal of Differential Geometry. v. 11 (1976), n. 4, p. 547–571

[21] Lee, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. 2ª ed. Springer-Verlag, New York, 2013. (Graduate Texts in Mathematics v. 176)

[22] Maschler, G. *Special Kähler-Ricci potentials and Ricci solitons*. Ann. Global Anal. Geom. 34 (2008) 367–380

[23] Mirshafeazadeh, M. A.; Bidabad, B. *On generalized quasi-Einstein manifolds.* Advances in Pure and Applied Mathematics, Volume 10, Issue 3, Pages 193–202.

[24] Obata, M. *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*. J. Math. Soc. Japan 14 (1962) 333–340

[25] Obata, M. *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds.* J. Differential Geometry 6(2) (1971), 247–258

[26] Obata, M.; Yano, K. *Conformal changes of Riemann metrics*. J. Diff. Geo. 4 (1970) 53-72

[27] Perelmann, G. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. arXiv:math/0211159v1 [math.DG]

[28] Perelmann, G. *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. arXiv:math/0303109v1 [math.DG]

[29] Perelmann, G. *Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds*. arXiv:math/0307245v1 [math.DG]

[30] Petersen, P. *Riemannian geometry*. 3ª ed. Springer-Verlag, New York, 2016. (Graduate Texts in Mathematics v. 171)

[31] Pigola, S.; Rigoli, M.; Rimoldi, M.; Setti, A. *Ricci Almost solitons*. Ann. S. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) X (2011) 757–799

[32] Schoen, R. M. *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*. J. Diff. Geom. 20, (1984) 479–495

[33] Tashiro, Y. *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*. Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965) 251-275

[34] Trudinger, N. *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 22, (1968) 265–274

[35] Yamabe, H. *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*. Osaka Math. J. 12 (1960) 21–37

[36] Yano, K. *Integral Formulas in Riemannian Geometry*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1970