

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

**SOBRE O FLUXO DE CURVATURA NO PLANO
HIPERBÓLICO**

Daniel Moraes dos Reis

Manaus - AM
2022

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

**SOBRE O FLUXO DE CURVATURA NO PLANO
HIPERBÓLICO**

por

Daniel Moraes dos Reis

sob a orientação da

Prof^ª. Dra. Maria Rosilene Barroso dos Santos

**Manaus - AM
2022**

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

R375f Reis, Daniel Moraes dos
Sobre o fluxo de curvatura no plano hiperbólico / Daniel Moraes dos Reis . 2022
83 f.: 31 cm.

Orientador: Maria Rosilene Barroso dos Santos
Dissertação (Mestrado em Matemática - Geometria) -
Universidade Federal do Amazonas.

1. Espaço de Minkowski. 2. Plano hiperbólico. 3. Transformações de Lorentz. 4. Fluxo de curvatura. 5. Isometrias. I. Santos, Maria Rosilene Barroso dos. II. Universidade Federal do Amazonas III.
Título

SOBRE O FLUXO DE CURVATURA NO PLANO HIPERBÓLICO

por

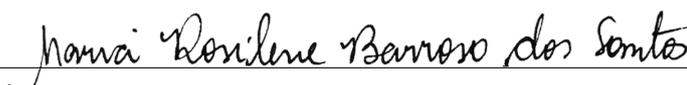
Daniel Moraes dos Reis ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

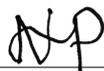
Aprovada em 20 de setembro de 2022.

Banca Examinadora:


Prof^a. Dra. Maria Rosilene Barroso dos Santos – UFAM
(Orientador)



Prof. Dr. Ronaldo Freire de Lima – UFRN
(Examinador Externo)



Prof^a. Dra. Neilha Marcia Pinheiro – UFAM
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por me conceder a vida e me fazer chegar até aqui.

Aos meus pais, Reven e Rosiane Reis, por todo o apoio e incentivo.

Agradeço à minha orientadora, Maria Rosilene, por toda paciência, atenção, disponibilidade e por todo conhecimento que adquiri durante a elaboração desta dissertação.

Agradeço aos membros da banca, Neilha Marcia e Ronaldo Freire, por aceitarem avaliar o trabalho e pelas correções e sugestões para a melhoria do texto.

Aos professores da UFAM: Dimas Martínez, Dragomir Tsonev, Elkin Quintero, Hudson Lima, Moacir Nascimento e Thiago Alves.

Aos amigos da UFAM: Alejandro Rodríguez, Cristiano Silva, Erick Botelho, Edwin Mateus, Felipe André, Filipe Vital, Gustavo Costa, Hamilton Nascimento, Leonardo Brito, Matheus Hudson, Mikaela Aires, Miquéias Lobo, Roberta Luzia, Roseane Souza, Samiles Lima, Vinícius Chagas, Vinícius Costa, Wanessa Tavares e Yeimy Escobar.

Aos amigos da Missão Sião: Abner Miranda, Adam Guimarães, Amanda Guimarães, Ana Paula, Bruno Matias, Gladson Ewertom, Habi Plaza, Jocélia Guimarães, Lucas Vinícius, Patrick Dantas, Rute Almeida, Thanael Lima e Thiago Melo.

Aos amigos da UNIFAP: Ana Karoline, Aleph Reis, Bruno Leal, Cíntia Santos, Emily Magalhães, Eriel Freitas, Geovana Fernandes, Guilherme Luz, Marcos Roberto, Mayara Gomes, Nazaré Farias, Sérgio Vitor e Tainá Picanço.

Aos amigos do Mar: Dilfran Belo, Girlaine Ciriaca, Jéssica Nayara, Jorge Brito, Josué Ciriaca, Lorrany Belo, Mateus Sales, Renan Levi e Rodrigo Colares.

Agradeço também aos amigos: Lanna Carolina, Lívia Picanço, Lorena Katriny e Luã Picanço.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta dissertação é baseada no artigo “*Soliton solutions to the curve shortening flow on the 2-dimensional hyperbolic space*” de da Silva e Tenenblat [2]. Nosso objetivo é apresentar a demonstração que caracteriza quando uma curva regular é um soliton do fluxo de curvatura. A saber, uma curva regular $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco é um soliton do fluxo de curvatura se, e somente se, sua curvatura geodésica é igual ao pseudo-produto interno entre seu campo de vetores tangente e um vetor não nulo do espaço de Minkowski. Esse resultado permite estabelecer uma relação entre os solitons e um sistema de equações diferenciais ordinárias. Por meio da análise qualitativa do sistema, é possível mostrar que os solitons são curvas definidas em toda reta, mergulhadas em \mathbb{H}^2 e sua curvatura geodésica, em cada fim, converge para -1 , 0 ou 1 .

Palavras-chave: Espaço de Minkowski. Plano hiperbólico. Transformações de Lorentz. Fluxo de curvatura. Isometrias.

Abstract

This work is based on the article “*Soliton solutions to the curve shortening flow on the 2-dimensional hyperbolic space*” by da Silva and Tenenblat [2]. Our goal is to present the proof that characterize when a regular curve is a soliton of the curvature flow. Namely, a regular curve $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ parameterized by arc length is a soliton of the curvature flow, if only if, its geodesic curvature is equal to the pseudo inner product between its tangent vector field and a non-null vector of the Minkowski space. This result enables us to establish a relationship between the solitons and a system of ordinary differential equations. Through the system qualitative analysis, it is possible to proof that the solitons are defined curves on the entire real line, embedded in \mathbb{H}^2 and its geodesic curvature, at each end, converges to -1 , 0 ou 1 .

keywords: Minkowski space. Hyperbolic plane. Lorentz transformations. Curvature flow. Isometries.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	12
1.1 O Espaço de Minkowski	12
1.1.1 O pseudo-produto vetorial em \mathbb{R}_1^3	15
1.2 Transformações de Lorentz	18
1.3 O grupo $O_1(3, \mathbb{R})$	27
1.4 Curvas parametrizadas em \mathbb{R}_1^n	37
2 O Espaço Hiperbólico	40
2.1 Isometrias de \mathbb{H}^n	40
2.2 Curvas Parametrizadas em \mathbb{H}^2	44
2.2.1 O Triedro de Darboux-Ribaucour	45
3 Solitons do Fluxo de Curvatura no Plano Hiperbólico	50
3.1 Fluxo de curvatura em \mathbb{H}^2	50
Referências Bibliográficas	82

Introdução

O problema do fluxo de curvas contraindo pela função curvatura consiste em analisar o comportamento de uma família de curvas que evoluem na direção do vetor normal e com velocidade igual à sua curvatura.

No plano euclidiano, dada uma curva suave, regular e fechada, $X_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dizemos que uma variação suave $X : [a, b] \times [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de X_0 é um fluxo contraindo pela função curvatura, se X satisfaz o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = kN \\ X(\cdot, 0) = X_0, \end{cases}$$

em que k é a curvatura de X_0 , e N o campo normal unitário a X .

Ao longo dos anos, o estudo de objetos geométricos que evoluem por meio da função curvatura foi alvo de pesquisas por muitos geômetras. Um dos trabalhos pioneiros sobre a evolução de curvas pela função curvatura foi o artigo “*Curve shortening makes convex curves circular*” por Gage [4]. Nesse trabalho, o autor provou que as curvas fechadas, convexas e normalizadas pelo fator $\sqrt{\frac{\pi}{A(t)}}$, em que $A(t)$ representa a área delimitada pela curva, convergem para o círculo unitário. Gage e Hamilton [5] provaram que curvas fechadas, convexas e mergulhadas em \mathbb{R}^2 evoluem para um ponto em tempo finito e, além disso, a curva permanece convexa em todo tempo, tornando-se circular à medida que o fluxo a contrai. Em 1987, Grayson [6] estendeu o resultado obtido por Gage e Hamilton, provando que as curvas mergulhadas em \mathbb{R}^2 , não necessariamente convexas, convergem para um ponto em tempo finito, sendo sua forma limite um círculo redondo.

Um caso particular de soluções do fluxo de curvatura são as soluções autossimilares, isto é, soluções que evoluem por isometrias ou homotetias. Halldorsson [7] estudou todas as soluções autossimilares do fluxo de curvas no plano, classificando-as em translações, expansões, contrações e rotações.

Em outros ambientes, por exemplo no plano de Minkowski \mathbb{R}_1^2 , Halldorsson [8] classificou todas as soluções autossimilares, a saber, as translações, expansões, contrações, rotações hiperbólicas, expansões hiperbólicas e contrações hiperbólicas.

Também, destacamos o artigo de dos Reis e Tenenblat [3], cujo espaço ambiente é a esfera euclidiana bidimensional. Nesse trabalho, os autores classificaram as soluções autossimilares, mais especificamente, mostraram que uma curva é um soliton do fluxo de curvatura se, e somente se, sua curvatura geodésica é proporcional ao produto interno entre seu vetor tangente e um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ fixo. Além disso, em cada fim, os solitons são assintóticos para o equador da esfera que é ortogonal a v .

Dando continuidade ao estudo dos solitons nos espaços de curvatura constante de dimensão 2, o artigo de da Silva e Tenenblat [2] trouxe informações sobre os solitons no plano hiperbólico. Seguindo os passos desse trabalho, apresentamos nesta dissertação os principais resultados sobre as soluções autossimilares no plano hiperbólico. A saber, uma curva parametrizada pelo comprimento de arco é um soliton do fluxo de curvatura se, e somente se, sua curvatura pode ser escrita como o pseudo-produto interno entre seu vetor tangente e um vetor não nulo do espaço de Minkowski, e para cada vetor não nulo de \mathbb{R}_1^3 existe uma família a 2-parâmetros de solitons do fluxo de curvatura em \mathbb{H}^2 . Além disso, os solitons são curvas mergulhadas, definidas em toda reta e, em cada fim, sua curvatura geodésica tende para -1 , 0 ou 1 . A seguir, descrevemos brevemente cada capítulo.

No capítulo 1, apresentamos o espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} e suas propriedades elementares, a definição de pseudo-produto interno e o caráter causal de um vetor de \mathbb{R}_1^{n+1} . Além disso, apresentamos a definição de matriz lorentziana e exibimos uma base para a álgebra de Lie do grupo das matrizes lorentzianas. Por último, destacamos o resultado sobre a classificação das matrizes lorentzianas positivas (Teorema 1.16).

No Capítulo 2, estudamos o espaço hiperbólico de dimensão n . Apresentamos a demonstração de que toda transformação de Lorentz positiva de \mathbb{R}^{n+1} quando restrita a \mathbb{H}^n é uma isometria de \mathbb{H}^n , e que toda isometria de \mathbb{H}^n se estende a uma única transformação de Lorentz positiva de \mathbb{R}^{n+1} . Introduzimos o triedro de Darboux-Ribaucour com o objetivo de apresentar o Teorema Fundamental das Curvas no plano hiperbólico.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo dos solitons do fluxo de curvatura em \mathbb{H}^2 . O primeiro resultado mostra que uma curva regular $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco é um soliton do fluxo de curvatura se, e somente se, sua curvatura geodésica é igual

ao pseudo-produto interno do vetor tangente a X com um vetor não nulo do espaço de Minkowski. Esse resultado permite estabelecer uma relação entre os solitons e um sistema de equações diferenciais ordinárias que advém do triedro de Darboux-Ribaucour de X . O segundo resultado deste capítulo afirma que os solitons são curvas definidas em toda reta, mergulhadas em \mathbb{H}^2 , e que a curvatura geodésica, em cada fim, converge para uma das seguintes constantes: -1 , 0 ou 1 .

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo são introduzidas as noções básicas sobre o espaço de Minkowski. Na primeira seção, apresentamos a definição de pseudo-produto interno no espaço euclidiano de dimensão n , a definição do pseudo-produto vetorial no espaço de Minkowski tridimensional e mostramos suas propriedades. Na segunda seção, estudamos as aplicações que preservam o pseudo-produto interno, chamadas transformações de Lorentz. Na terceira seção, mostramos como obter os elementos do grupo das transformações de Lorentz nos casos de dimensão dois e três. Na quarta seção, apresentamos resultados básicos sobre curvas no espaço de Minkowski. Para mais detalhes, sugerimos ao leitor as referências [1, 10, 11, 12].

1.1 O Espaço de Minkowski

Sejam o espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , $n > 1$, e a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{n+1}y_{n+1}, \quad (1.1)$$

em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ são vetores em \mathbb{R}^{n+1} .

Notemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisfaz as propriedades de *simetria* e *homogeneidade*, isto é, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ e $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, porém $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um produto interno em \mathbb{R}^{n+1} , pois se tomarmos os vetores $x = (1, 0, \dots, 0)$ e $y = (1, 0, \dots, 0, 1)$ temos que $\langle x, x \rangle < 0$ e $\langle y, y \rangle = 0$. O produto (1.1) é chamado de pseudo-produto interno.

O par $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado de espaço de Minkowski ou espaço de Lorentz-Minkowski. Por simplicidade, denotamos o espaço de Minkowski por \mathbb{R}_1^{n+1} , em que o subscrito 1, cha-

mado de *índice* de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, indica que se $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é o menor subespaço tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V \times V}$ é negativa-definida, então a dimensão de V é igual a 1. De forma geral, dados um número inteiro $1 \leq v \leq n+1$ e vetores $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ e $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$, um pseudo-produto interno, de índice v , em \mathbb{R}^{n+1} é definido por

$$\langle x, y \rangle = - \sum_{i=1}^v x_i y_i + \sum_{i=v+1}^{n+1} x_i y_i, \quad (1.2)$$

em que v é a maior dimensão de um subespaço W de \mathbb{R}^{n+1} tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W}$ é negativa. O espaço \mathbb{R}^{n+1} munido do pseudo-produto interno (1.2) é denotado por \mathbb{R}_v^{n+1} .

Para cada vetor de \mathbb{R}^{n+1} , o pseudo-produto interno em \mathbb{R}_1^{n+1} pode ser positivo, nulo ou negativo. Em virtude disso, definimos o *caráter* ou *tipo causal* de um vetor $x \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ como segue.

Definição 1.1. Dizemos que $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ é *tipo espaço*, se $\langle x, x \rangle > 0$ ou $x = 0$, *tipo luz*, se $\langle x, x \rangle = 0$ e $x \neq 0$, e *tipo tempo*, se $\langle x, x \rangle < 0$.

Vejamos que, se alterarmos o sinal de quaisquer coordenadas de um vetor de \mathbb{R}_1^{n+1} , o caráter causal do vetor não se altera, pois, no pseudo-produto interno, todas as coordenadas são elevadas ao quadrado. Ademais, se $\lambda \in \mathbb{R}$, então λv tem o mesmo tipo causal de v .

A aplicação $\|\cdot\| : \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$ é chamada de norma. Contudo, esta aplicação não define uma norma no sentido usual, pois se x é um vetor tipo luz, então $\|x\| = 0$. Além disso, a desigualdade triangular não é satisfeita para esta norma, pois se $u = (-1, 0, \dots, 0, 1)$ e $v = (1, 0, \dots, 0, 1)$, então $u + v = (0, 0, \dots, 0, 2)$, $\|u + v\| = 2$ e $\|u\| = \|v\| = 0$. Logo, $\|u + v\| > \|u\| + \|v\|$.

Daqui em diante, usamos a seguinte notação: dado um vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, denotamos o vetor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ por $\bar{x} = (x_2, \dots, x_{n+1})$. Com essa notação, reescrevemos (1.1) como

$$\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad (1.3)$$

em que \cdot é o produto interno usual de \mathbb{R}^n , ou seja, $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_2 y_2 + \dots + x_{n+1} y_{n+1}$.

Denotamos por $\|\cdot\|_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a norma euclidiana usual de \mathbb{R}^n , definida por, $\|\bar{x}\|_E = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$. Assim, se x é um vetor tipo espaço, então $|x_1| < \|\bar{x}\|_E$; se x é tipo luz, então $|x_1| = \|\bar{x}\|_E$ e, se x é tipo tempo, então $|x_1| > \|\bar{x}\|_E$.

Proposição 1.1. Se $x, y \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ não são vetores tipo espaço e x_1 e y_1 têm o mesmo sinal, então $\langle x, y \rangle \leq 0$. A igualdade é válida se, e somente se, x e y são vetores tipo luz e linearmente dependentes.

Demonstração. Por hipótese, x e y são vetores tipo tempo ou tipo luz. Assim, $|x_1| \geq \|\bar{x}\|_E$, $|y_1| \geq \|\bar{y}\|_E$ e $|x_1| |y_1| = x_1 y_1$. Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz, aplicada aos vetores \bar{x} e \bar{y} , que

$$x_1 y_1 \geq \|\bar{x}\|_E \|\bar{y}\|_E \geq \bar{x} \cdot \bar{y}. \quad (1.4)$$

Por (1.3), temos que $\langle x, y \rangle \leq 0$.

Agora, se x e y são vetores tipo luz e linearmente dependentes, então $|x_1| = \|\bar{x}\|_E$, $|y_1| = \|\bar{y}\|_E$ e $\bar{x} \cdot \bar{y} = \|\bar{x}\|_E \|\bar{y}\|_E$. Portanto, $\langle x, y \rangle = 0$, pois $x_1 y_1 = \bar{x} \cdot \bar{y}$. Reciprocamente, se $\langle x, y \rangle = 0$, então $x_1 y_1 = \bar{x} \cdot \bar{y}$. Pela desigualdade (1.4), temos $x_1 y_1 \geq \|\bar{x}\|_E \|\bar{y}\|_E \geq x_1 y_1$, logo $x_1 y_1 = \|\bar{x}\|_E \|\bar{y}\|_E$. Desta forma, x e y são vetores tipo luz, pois se x ou y são tipo tempo, temos que $x_1 y_1 < \|\bar{x}\|_E \|\bar{y}\|_E$, uma contradição. Analogamente, pela desigualdade (1.4) concluímos que $\bar{x} \cdot \bar{y} = \|\bar{x}\|_E \|\bar{y}\|_E$, logo x e y são linearmente dependentes. \square

Definição 1.2. Dizemos que um vetor tipo tempo $x \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ é positivo (resp. negativo) se $x_1 > 0$ (resp. $x_1 < 0$). Quando dois vetores $x, y \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ forem ambos positivos ou negativos, diremos que x e y têm o mesmo sinal.

Da Proposição 1.1, se x e y são vetores tipo tempo com o mesmo sinal, então $\langle x, y \rangle < 0$. Agora, se x e y têm sinais opostos, então $\langle x, y \rangle > 0$, pois x e $-y$ têm o mesmo sinal, donde $\langle x, -y \rangle < 0$. A mesma observação é válida quando x é um vetor tipo tempo e y um vetor tipo luz.

A noção de ortogonalidade em \mathbb{R}_1^{n+1} é introduzida de modo análogo ao caso euclidiano. Dizemos que dois vetores não nulos $x, y \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ são pseudo-ortogonais se, e somente se, $\langle x, y \rangle = 0$. Nesse caso, x e y também são chamados Lorentz ortogonais.

Corolário 1.2. Sejam $x, y \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ vetores pseudo-ortogonais. Se x é tipo tempo, então y é tipo espaço.

Demonstração. Sejam x e y tais que $\langle x, y \rangle = 0$, em que x é um vetor tipo tempo. Da Proposição 1.1, y não pode ser um vetor tipo tempo ou tipo luz, pois $\langle x, y \rangle < 0$ se x e y têm o mesmo sinal e $\langle x, y \rangle > 0$ se x e y têm sinais opostos, o que contradiz o fato de que $\langle x, y \rangle = 0$. Portanto, y é um vetor tipo espaço. \square

Os subespaços de \mathbb{R}_1^{n+1} e \mathbb{R}^{n+1} são os mesmos, pois a definição de subespaços independe de (1.2). A próxima definição traz a ideia do tipo causal de um subespaço de \mathbb{R}_1^{n+1} .

Definição 1.3. Dizemos que um subespaço $V \neq \{0\}$ de \mathbb{R}^{n+1} é:

- (1) tipo espaço, se $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V \times V}$ é positiva-definida;
- (2) tipo tempo, se $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V \times V}$ é negativa-definida ou indefinida e não-degenerada;
- (3) tipo luz, se $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{V \times V}$ é degenerada.

Notemos que, se $V \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ é um subespaço de tipo espaço, então V possui apenas vetores tipo espaço; se V é um subespaço de tipo tempo, temos duas possibilidades, ou V possui apenas vetores tipo tempo, e neste caso V é uma reta, ou possui vetores de todos os tipos causais. Agora, se V é um subespaço de tipo luz, então V possui vetores tipo luz mas não contém vetores tipo tempo. O espaço nulo $\{0\} \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ e o espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} são de tipo espaço e tipo tempo, respectivamente.

O conceito de base para um espaço vetorial também independe de qualquer produto interno. A seguir, introduzimos o conceito de base pseudo-ortogonal em \mathbb{R}_1^{n+1} . Uma base ordenada $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ de \mathbb{R}_1^{n+1} é dita pseudo-ortogonal se

$$\langle v_i, v_j \rangle \begin{cases} < 0, & \text{se } i = j = 1, \\ = 0, & \text{se } i \neq j, \\ > 0, & \text{se } i = j \neq 1. \end{cases}$$

Observemos que v_1 é tipo tempo e v_i , $i = 2, \dots, n+1$, é tipo espaço. Dizemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ é uma base pseudo-ortonormal se for pseudo-ortogonal e $\|v_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n+1$. A base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ de \mathbb{R}^{n+1} é uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}_1^{n+1} .

1.1.1 O pseudo-produto vetorial em \mathbb{R}_1^3

Sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ vetores de \mathbb{R}_1^3 e

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O pseudo-produto vetorial de x e y é definido por

$$x \times y = G(x \wedge y), \quad (1.5)$$

em que \wedge é o produto vetorial usual de \mathbb{R}^3 .

Observemos que,

$$G(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Se $x \wedge y = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, então $x \times y = G(x \wedge y) = (-\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Assim, escrevemos

$$x \times y = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

em que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^3 . Notemos que $G(x \times y) = x \wedge y$.

Lema 1.3. Se x e y são vetores de \mathbb{R}^3 , então $x \times y = G(y) \wedge G(x)$.

Demonstração. Uma vez que $G(x) = (-x_1, x_2, x_3)$ e $G(y) = (-y_1, y_2, y_3)$, segue das propriedades do determinante que

$$x \times y = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -y_1 & y_2 & y_3 \\ -x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = G(y) \wedge G(x),$$

em que multiplicamos a primeira coluna por -1 e trocamos as linhas 2 e 3. \square

Dados x, y, z em \mathbb{R}_1^3 , de (1.1) e (1.5) segue que $\langle z, x \times y \rangle = z \cdot (x \wedge y)$, em que \cdot denota o produto interno usual de \mathbb{R}^3 . De fato, se $z = (z_1, z_2, z_3)$ e $x \wedge y = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, então

$$\langle z, x \times y \rangle = -z_1(-\lambda_1) + z_2\lambda_2 + z_3\lambda_3 = z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2 + z_3\lambda_3 = z \cdot (x \wedge y). \quad (1.6)$$

Notemos que $\langle x, x \times y \rangle = x \cdot (x \wedge y) = 0$ e $\langle y, x \times y \rangle = y \cdot (x \wedge y) = 0$. Assim, $x \times y$ é pseudo-ortogonal aos vetores x e y .

Teorema 1.4. *Se x, y, z, w são vetores de \mathbb{R}^3 , então*

$$1. \ x \times y = -y \times x,$$

$$2. \ \langle x \times y, z \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

$$3. \ x \times (y \times z) = \langle x, y \rangle z - \langle z, x \rangle y,$$

$$4. \ \langle x \times y, z \times w \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, w \rangle & \langle x, z \rangle \\ \langle y, w \rangle & \langle y, z \rangle \end{vmatrix}.$$

Demonstração. 1. Pelo Lema 1.3, segue que

$$x \times y = G(y) \wedge G(x) = -G(x) \wedge G(y) = -y \times x,$$

2. Pela equação (1.6), segue que

$$\langle x \times y, z \rangle = (x \wedge y) \cdot z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

3. Novamente pelo Lema 1.3, temos

$$\begin{aligned} x \times (y \times z) &= G(y \times z) \wedge G(x) \\ &= (y \wedge z) \wedge G(x) \\ &= -G(x) \wedge (y \wedge z) \\ &= (G(x) \cdot y)z - (G(x) \cdot z)y \\ &= \langle x, y \rangle z - \langle z, x \rangle y. \end{aligned}$$

4. Usando a equação (1.6) e o Lema 1.3, segue que

$$\begin{aligned}
 \langle x \times y, z \times w \rangle &= (x \wedge y) \cdot (z \times w) \\
 &= (x \wedge y) \cdot (G(w) \wedge G(z)) \\
 &= \begin{vmatrix} x \cdot G(w) & x \cdot G(z) \\ y \cdot G(w) & y \cdot G(z) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \langle x, w \rangle & \langle x, z \rangle \\ \langle y, w \rangle & \langle y, z \rangle \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

1.2 Transformações de Lorentz

Nesta seção, estudaremos as propriedades das transformações $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preservam o pseudo-produto interno (1.1).

Definição 1.4. Uma aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação de Lorentz (ou transformação lorentziana), se

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 1.1. A aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(x) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma transformação de Lorentz, pois, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle &= -(-x_1)(-y_1) + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \\
 &= -x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \\
 &= \langle x, y \rangle.
 \end{aligned}$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \varphi(\alpha x + y) &= (-(\alpha x_1 + y_1), \alpha x_2 + y_2, \dots, \alpha x_n + y_n) \\
 &= (-\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (-y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 &= \alpha(-x_1, x_2, \dots, x_n) + (-y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 &= \alpha\varphi(x) + \varphi(y)
 \end{aligned}$$

e, portanto, φ é uma transformação linear. Além disso, como $\varphi(e_1) = -e_1$ e $\varphi(e_j) = e_j$,

segue que $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ é uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}^n , em que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica do \mathbb{R}^n .

Em geral, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.5. *Uma aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação de Lorentz de \mathbb{R}^n se, e somente se, φ é linear e $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ é uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Suponha que φ seja uma transformação de Lorentz de \mathbb{R}^n . Então,

$$\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} -1 & \text{se } i = j = 1, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j \neq 1. \end{cases}$$

Logo, $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ é uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}^n .

Seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Então, existem coeficientes c_1, \dots, c_n em \mathbb{R} tais que

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi(e_j).$$

Como $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ é uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}^n , temos

$$-c_1 = \langle \varphi(x), \varphi(e_1) \rangle = \langle x, e_1 \rangle = -x_1$$

e

$$c_j = \langle \varphi(x), \varphi(e_j) \rangle = \langle x, e_j \rangle = x_j, \quad \text{para } j > 1.$$

Então,

$$\varphi \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \varphi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j).$$

Reciprocamente, suponha que φ é linear e $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ é uma base pseudo-

ortonormal de \mathbb{R}^n . Então, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle &= \left\langle \varphi \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right), \varphi \left(\sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^n y_j \varphi(e_j) \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle \\
 &= -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\
 &= \langle x, y \rangle.
 \end{aligned}$$

Portanto, φ é uma transformação de Lorentz. □

Seja $M(n, \mathbb{R})$ o espaço das matrizes reais de ordem n . Dizemos que $A \in M(n, \mathbb{R})$ é lorentziana, se a transformação associada $\varphi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi_A(x) = Ax$ é lorentziana. O conjunto das matrizes lorentzianas de ordem n será denotado por $O_1(n, \mathbb{R})$.

Voltando ao exemplo 1.1, a transformação de Lorentz $\varphi(x) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ pode ser escrita como $\varphi(x) = Gx$, em que

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

A matriz G é a matriz lorentziana associada a φ .

O resultado a seguir nos mostra condições para verificar quando uma matriz A é lorentziana. Para o que se segue, A^\top denota a transposta da matriz A .

Teorema 1.6. *Sejam $A \in M(n; \mathbb{R})$ e G a matriz diagonal dada por (1.7). As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A matriz A é lorentziana.*
2. *As colunas da matriz A formam uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}^n .*
3. *A matriz A satisfaz a equação $A^\top G A = G$.*

Demonstração. Seja $\varphi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a transformação de Lorentz associada à matriz A . Por linearidade, $\varphi_A(x) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi_A(e_j)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se A_j denota as colunas da matriz A , então $Ax = \sum_{j=1}^n x_j A_j$. Como $\varphi_A(x) = Ax$, então $\varphi_A(e_j) = A_j$, $1 \leq j \leq n$. Do Teorema 1.5, $\{\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_n)\}$ é uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}^n .

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Então,

$$A^\top G = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ -a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se A_j , $1 \leq j \leq n$, são as colunas de A , então

$$A^\top G A = \begin{pmatrix} \langle A_1, A_1 \rangle & \langle A_1, A_2 \rangle & \cdots & \langle A_1, A_n \rangle \\ \langle A_2, A_1 \rangle & \langle A_2, A_2 \rangle & \cdots & \langle A_2, A_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A_n, A_1 \rangle & \langle A_n, A_2 \rangle & \cdots & \langle A_n, A_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Como as colunas da matriz A formam uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}^n , segue que

$$\langle A_i, A_j \rangle = \begin{cases} -1 & \text{se } i = j = 1, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j \neq 1. \end{cases}$$

Logo, $A^\top G A = G$.

Se $A^\top G A = G$, então a transformação $\varphi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi_A(x) = Ax$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, é uma transformação lorentziana. De fato, para cada $u, v \in \mathbb{R}^n$ podemos

escrever $\langle u, v \rangle = u^\top Gv$. Daí, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_A(x), \varphi_A(y) \rangle &= (\varphi_A(x))^\top G \varphi_A(y) \\
 &= (Ax)^\top G(Ay) \\
 &= (x^\top A^\top)G(Ay) \\
 &= x^\top (A^\top GA)y \\
 &= x^\top Gy \\
 &= \langle x, y \rangle,
 \end{aligned}$$

completando a demonstração do Teorema. □

Corolário 1.7. Seja $A \in M(n, \mathbb{R})$.

- (i) Se A é lorentziana, então $\det A = \pm 1$.
- (ii) A é lorentziana se, e somente se, A^\top é lorentziana.

Demonstração. (i) Como $A^\top GA = G$, então $\det G = \det(A^\top GA) = (\det G)(\det A)^2$. Logo, $(\det A)^2 = 1$, pois $\det G = -1$, e assim $\det A = \pm 1$.

(ii) Usando que $A^\top GA = G$, pois A é lorentziana, e $G^2 = Id$, segue que

$$\begin{aligned}
 A^\top GA = G &\iff (AG)A^\top GA = (AG)G \\
 &\iff (AGA^\top)GA = A \\
 &\iff AGA^\top = A(GA)^{-1} \\
 &\iff AGA^\top = AA^{-1}G \\
 &\iff AGA^\top = G.
 \end{aligned}$$

Como $A = (A^\top)^\top$, concluímos que A^\top é lorentziana. □

Do Corolário acima, segue que toda matriz lorentziana A pertence ao grupo $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes invertíveis de ordem n . Assim, o conjunto das matrizes lorentzianas de ordem n é caracterizado como o conjunto de todas as matrizes $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tais que $A^\top GA = G$.

Os resultados a seguir mostram que $O_1(n, \mathbb{R})$ com a operação de multiplicação de matrizes é um subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$. Além disso, $O_1(n, \mathbb{R})$ é fechado para transposição de matrizes.

Corolário 1.8. Uma matriz A é lorentziana se, e somente se, sua inversa A^{-1} é lorentziana.

Demonstração. Sendo A lorentziana, segue que

$$\begin{aligned} A^\top GA = G &\iff (A^\top)^{-1}A^\top GA = (A^\top)^{-1}G \\ &\iff GA = (A^\top)^{-1}G \\ &\iff GAA^{-1} = (A^\top)^{-1}GA^{-1} \\ &\iff G = (A^\top)^{-1}GA^{-1}. \end{aligned}$$

Como $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ a última igualdade é equivalente a dizer que A^{-1} é lorentziana. \square

Corolário 1.9. Se A e B são matrizes lorentzianas, então a matriz AB é lorentziana.

Demonstração. Vamos mostrar que $(AB)^\top G(AB) = G$. De fato, usando as propriedades de transposição de matrizes, a associatividade do produto de matrizes e que A e B satisfazem $A^\top GA = G$ e $B^\top GB = G$, temos que

$$\begin{aligned} (AB)^\top G(AB) &= (B^\top A^\top)G(AB) \\ &= B^\top (A^\top G)(AB) \\ &= B^\top (A^\top GA)B \\ &= B^\top GB \\ &= G. \end{aligned}$$

\square

Definição 1.5. Uma transformação de Lorentz é dita positiva (resp. negativa) se leva vetores tipo tempo positivos (vide Definição 1.2) em vetores tipo tempo positivos (resp. negativos). A matriz associada à transformação lorentziana positiva (resp. negativa) é chamada matriz lorentziana positiva (resp. negativa). O grupo das matrizes lorentzianas positivas será denotado por $PO_1(n, \mathbb{R})$.

Os próximos resultados que veremos são relativos às matrizes lorentzianas positivas. Nosso primeiro objetivo é mostrar que a inversa de uma matriz lorentziana positiva é

também positiva. Para simplificar a demonstração da proposição a seguir, seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

uma matriz lorentziana positiva e A^{-1} a sua inversa, com A_i e A^i os vetores colunas de A e A^{-1} , respectivamente. Como $A^\top G A = G$, segue que $A^{-1} = G A^\top G$, isto é,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{21} & \dots & -a_{n1} \\ -a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Então, para cada $x \in \mathbb{R}_1^n$, temos

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

e

$$A^{-1}x = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{21} & \dots & -a_{n1} \\ -a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 - a_{21}x_2 - \dots - a_{n1}x_n \\ -a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n \\ \vdots \\ -a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$Ax = \begin{pmatrix} -\langle A^1, x \rangle \\ \langle A^2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle A^n, x \rangle \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1}x = \begin{pmatrix} -\langle A_1, x \rangle \\ \langle A_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle A_n, x \rangle \end{pmatrix}.$$

Portanto, A é lorentziana positiva se, e somente se, $\langle A^1, x \rangle < 0$ para cada vetor tipo

tempo positivo $x \in \mathbb{R}_1^n$. Do mesmo modo, A^{-1} é lorentziana positiva se, e somente se, $\langle A_1, x \rangle < 0$ para cada tal $x \in \mathbb{R}_1^n$.

Proposição 1.10. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz lorentziana. Então, A é positiva se, e somente se, $a_{11} > 0$.

Demonstração. Se $a_{11} > 0$, então A^1 é um vetor tipo tempo positivo. Assim, se $x \in \mathbb{R}_1^n$ é um vetor tipo tempo positivo, a Proposição 1.1 garante que $\langle A^1, x \rangle < 0$, e disto A é positiva. Reciprocamente, se A é positiva, então para cada vetor tipo tempo positivo $x \in \mathbb{R}_1^n$, temos que $\langle A^1, x \rangle < 0$, ou seja,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = -\langle A^1, x \rangle > 0. \quad (1.9)$$

Notemos que se $a_{11} < 0$, então por $\langle A^1, A^1 \rangle = -1$ temos

$$a_{11} = -\sqrt{1 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2}.$$

Como x é tipo tempo positivo, segue que

$$x_1 > \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Portanto, de (1.9)

$$a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n > \sqrt{1 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2} \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Isto contradiz a desigualdade de Cauchy-Schwarz em \mathbb{R}^n aplicada aos vetores $(1, a_{12}, \dots, a_{1n})$ e $(0, x_2, \dots, x_n)$. Assim, $a_{11} > 0$. \square

Corolário 1.11. Uma matriz A é lorentziana positiva se, e somente se, A^{-1} é positiva.

Demonstração. A prova deste resultado segue diretamente do Corolário 1.8 e da identidade (1.8). \square

De modo análogo, é facilmente provado que A é lorentziana positiva se, e somente se, A^\top é lorentziana positiva.

Corolário 1.12. Se A e B são matrizes lorentzianas positivas, então AB é positiva.

Demonstração. Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $AB = (c_{ij})$. Tome $u = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ e $v = (b_{11}, b_{21}, \dots, b_{n1})$. Como A e B são matrizes lorentzianas positivas, u e v são vetores tipo tempo positivos. Se $c_{11} < 0$, então

$$0 > c_{11} = \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j1} = a_{11}b_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j}b_{j1} = a_{11}b_{11} + \bar{u} \cdot \bar{v}.$$

Vejam os que $a_{11} > \|\bar{u}\|_E$ e $b_{11} > \|\bar{v}\|_E$, pois a_{11} e b_{11} são positivos. Assim

$$\|\bar{u}\|_E \|\bar{v}\|_E + \bar{u} \cdot \bar{v} < 0.$$

O que contradiz a desigualdade de Cauchy-Schwarz, em \mathbb{R}^{n-1} , aplicada aos vetores \bar{u} e \bar{v} . Portanto, $c_{11} > 0$. □

Proposição 1.13. Para cada par de vetores tipo tempo positivos $x, y \in \mathbb{R}_1^n$, existe uma única transformação lorentziana positiva A tal que $Ax = y$.

Demonstração. Sejam $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica e $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base qualquer de \mathbb{R}^n , em que u_1 é um vetor tipo tempo positivo. Usando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt obtemos uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}^n da seguinte forma. Escrevemos $w_1 = u_1/\|u_1\|$ e assim $\langle w_1, w_1 \rangle = -1$. Agora, consideramos $v_2 = u_2 + \langle u_2, w_1 \rangle w_1$. Então, v_2 é não nulo, uma vez que u_1 e u_2 são linearmente independentes. Além disso,

$$\langle w_1, v_2 \rangle = \langle w_1, u_2 \rangle + \langle u_2, w_1 \rangle \langle w_1, w_1 \rangle = 0.$$

Pela Proposição 1.1, v_2 é um vetor tipo espaço. Escrevendo $w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$ e seguindo o mesmo processo, obtemos:

$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 + \langle u_3, w_1 \rangle w_1 - \langle u_3, w_2 \rangle w_2, \\ w_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|}, \\ &\vdots \\ v_n &= u_n + \langle u_n, w_1 \rangle w_1 - \langle u_n, w_2 \rangle w_2 - \dots - \langle u_n, w_{n-1} \rangle w_{n-1}, \\ w_n &= \frac{v_n}{\|v_n\|}. \end{aligned}$$

Portanto, $\{w_1, \dots, w_n\}$ é uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}^n , pois

$$\langle w_i, w_j \rangle = \begin{cases} -1 & \text{se } i = j = 1, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j \neq 1. \end{cases}$$

Seja A a matriz cujas colunas são w_1, \dots, w_n . Então, pelo Teorema 1.6, A é lorentziana e, uma vez que $Ae_1 = w_1$ é um vetor tipo tempo positivo, A é positiva.

Agora, sejam x e y vetores tipo tempo positivos. Completando $\{x\}$ e $\{y\}$ à bases de \mathbb{R}^n e aplicando o processo acima, concluímos que existem matrizes lorentzianas positivas B e C tais que $Be_1 = \frac{x}{\|x\|}$ e $Ce_1 = \frac{y}{\|y\|}$. Tomando $A = \frac{\|y\|}{\|x\|}CB^{-1}$, segue que $Ax = y$ e dos Corolários 1.11 e 1.12 obtemos que A é uma matriz lorentziana positiva. \square

1.3 O grupo $O_1(3, \mathbb{R})$

Aqui mostramos como obter os elementos do grupo $O_1(3, \mathbb{R})$. Para isso, consideramos $A \in O_1(3, \mathbb{R})$ na forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Para essa matriz, destacamos o menor principal $A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ associado ao termo a_{11} . A matriz A_{11} é chamada a *parte espacial* de A .

Lema 1.14. Se $A \in O_1(3, \mathbb{R})$, então $a_{11} \det A = \det A_{11}$.

Demonstração. Uma vez que A é lorentziana, temos

$$\begin{aligned} -a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= -1, \\ -a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ -a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Desenvolvendo o determinante de A pelos menores principais da primeira coluna e usando

(1.10), obtemos

$$\begin{aligned}
a_{11} \det A &= a_{11}^2 \det A_{11} - a_{11}a_{21} \det A_{21} + a_{11}a_{31} \det A_{31} \\
&= a_{11}^2 \det A_{11} - (a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23})(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + (a_{12}a_{32} + a_{13}a_{32})(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\
&= a_{11}^2 \det A_{11} - a_{12}^2(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{13}^2(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) \\
&= (a_{11}^2 - a_{12}^2 - a_{13}^2) \det A_{11} \\
&= \det A_{11}. \quad \square
\end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos as igualdades

$$\begin{aligned}
a_{12} \det A &= a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}, \\
a_{13} \det A &= a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21}, \\
a_{21} \det A &= a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}, \\
a_{22} \det A &= a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}, \\
a_{23} \det A &= a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11}, \\
a_{31} \det A &= a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}, \\
a_{32} \det A &= a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}, \\
a_{33} \det A &= a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21},
\end{aligned} \tag{1.11}$$

que serão importantes na demonstração do Teorema 3.1.

Pelo Lema 1.14, o grupo $O_1(3, \mathbb{R})$ fica completamente determinado pelos sinais de a_{11} e do determinante de A_{11} . Isto nos permite escrever o grupo $O_1(3, \mathbb{R})$ como união disjunta dos seguintes conjuntos

$$\begin{aligned}
PO_1^+(3, \mathbb{R}) &= \{A \in O_1(3, \mathbb{R}) ; \det A_{11} > 0 \text{ e } a_{11} > 0\}, \\
PO_1^-(3, \mathbb{R}) &= \{A \in O_1(3, \mathbb{R}) ; \det A_{11} < 0 \text{ e } a_{11} > 0\}, \\
NO_1^+(3, \mathbb{R}) &= \{A \in O_1(3, \mathbb{R}) ; \det A_{11} > 0 \text{ e } a_{11} < 0\}, \\
NO_1^-(3, \mathbb{R}) &= \{A \in O_1(3, \mathbb{R}) ; \det A_{11} < 0 \text{ e } a_{11} < 0\}.
\end{aligned}$$

Os elementos de $PO_1^-(3, \mathbb{R})$, $NO_1^+(3, \mathbb{R})$ e $NO_1^-(3, \mathbb{R})$ podem ser escritos como produto à esquerda das matrizes I_1 , G e I_2 , respectivamente, pelos elementos de $PO_1^+(3, \mathbb{R})$. Isto é,

$$PO_1^-(3, \mathbb{R}) = I_1 \cdot PO_1^+(3, \mathbb{R}), \quad NO_1^+(3, \mathbb{R}) = G \cdot PO_1^+(3, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad NO_1^-(3, \mathbb{R}) = I_2 \cdot PO_1^+(3, \mathbb{R}),$$

em que

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De fato, notemos que a matriz $I_1 \in PO_1^-(3, \mathbb{R})$ altera apenas o sinal do determinante de A_{11} , a matriz $G \in NO_1^+(3, \mathbb{R})$ muda apenas o sinal de a_{11} e a matriz $I_2 \in NO_1^-(3, \mathbb{R})$ altera o sinal de a_{11} e do determinante de A_{11} . Assim, para determinar os elementos do grupo $O_1(3, \mathbb{R})$, basta estudarmos os elementos do conjunto $PO_1^+(3, \mathbb{R})$.

Para prosseguirmos, se faz necessário determinar os elementos do grupo $O_1(2, \mathbb{R})$. É fácil verificar que o resultado do Lema 1.14 é válido para matrizes nesse grupo. Assim, consideremos $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in PO_1^+(2, \mathbb{R})$, isto é, $a_{11} > 0$ e $a_{22} > 0$. Como as colunas de A formam uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}_1^2 e $\det A = 1$, temos

$$-a_{11}^2 + a_{21}^2 = -1, \quad (1.12)$$

$$-a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad (1.13)$$

$$-a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0, \quad (1.14)$$

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1. \quad (1.15)$$

Então, de (1.12) e (1.13), $a_{11}, a_{22} \geq 1$. Agora, seja $f(x) = \cosh x$. Notamos que f é par e $f(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, existem únicos $t, s \in \mathbb{R}_+$ tais que $a_{11} = \cosh t$ e $a_{22} = \cosh s$. Usando (1.12), (1.13) e a relação fundamental da trigonometria hiperbólica mostra-se que $|a_{21}| = \sinh t$ e $|a_{12}| = \sinh s$. De (1.15) obtemos

$$a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - 1 = \cosh t \cosh s - 1 \geq 0.$$

Então, a_{21} e a_{12} possuem o mesmo sinal. Dessa forma, de (1.14)

$$0 = \cosh t \cosh s - \sinh t \sinh s = \sinh(t - s).$$

Como $\sinh x = 0$ se, e somente se, $x = 0$, segue que $t = s$. Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad \text{para } t > 0.$$

Reescrevemos as matrizes acima como

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Agora, observamos que

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} PO_1^-(2, \mathbb{R}) &= I_1 \cdot PO_1^+(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & -\cosh \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}, \\ NO_1^+(2, \mathbb{R}) &= G \cdot PO_1^+(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} -\cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}, \\ NO_1^-(2, \mathbb{R}) &= I_2 \cdot PO_1^+(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} -\cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & -\cosh \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Agora, voltemos à classificação de $O_1(3, \mathbb{R})$. No que segue, consideramos o subgrupo

$$SO_1(3, \mathbb{R}) = \{A \in O_1(3, \mathbb{R}); \det A = 1\}.$$

Proposição 1.15. Se $A \in SO_1(3, \mathbb{R})$, então 1 é autovalor de A .

Demonstração. Vamos mostrar que a identidade $\det(A - Id) = 0$ é satisfeita. Com efeito,

sendo $G^2 = Id$, em que Id denota a matriz identidade de ordem 3,

$$\begin{aligned}
\det(A - Id) &= \det(A - G^2) \\
&= \det(A - GA^\top GA) \\
&= \det(Id - GA^\top G) \det A \\
&= \det(G^2 - GA^\top G) \\
&= \det G \det(Id - A^\top) \det G \\
&= \det(Id - A^\top) \\
&= \det(Id - A)^\top \\
&= -\det(A - Id).
\end{aligned}$$

Portanto, $\det(A - Id) = 0$. □

Assim, se $v \in \mathbb{R}_1^3$ é um autovetor de $A \in SO_1(3, \mathbb{R})$ associado ao autovalor 1, então a matriz A deixa fixa a reta cuja direção é dada por v .

Definição 1.6. Seja $A \in SO_1(3, \mathbb{R})$, $A \neq Id$, e v um autovetor de A associado ao autovalor 1. Dizemos que A é:

- (1) hiperbólica, se v é tipo espaço;
- (2) elíptica, se v é tipo tempo;
- (3) parabólica, se v é tipo luz.

É importante observar que A possui somente um autovetor associado ao autovalor 1. De fato, se existem dois autovetores linearmente independentes associados ao 1, então $A = Id$, pois $\det A = 1$.

Com as informações acima em mãos, apresentamos como são os elementos do grupo $PO_1^+(3, \mathbb{R})$. Consequentemente, conhecemos os elementos de $O_1(3, \mathbb{R})$.

Sejam $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in PO_1^+(3, \mathbb{R})$ e \mathcal{U} uma reta fixada por A . Tomando e_j , $1 \leq j \leq 3$, os vetores da base canônica de \mathbb{R}^3 , estudamos os casos em que $\mathcal{U} = \text{span}\{e_3\}$ (A é hiperbólica) ou $\mathcal{U} = \text{span}\{e_1\}$ (A é elíptica) ou $\text{span}\{e_1 + e_2\}$ (A é parabólica), ou seja, \mathcal{U} é uma reta de cada tipo causal.

Se $\mathcal{U} = \text{span}\{e_3\}$, então $Ae_3 = e_3$. Como $\langle Ae_3, Ae_j \rangle = \langle e_3, e_j \rangle = 0$, para $j = 1, 2$,

segue que $Ae_1, Ae_2 \in \text{span}\{e_1, e_2\}$. Logo, $a_{31} = a_{32} = 0$ e obtemos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sendo $A \in PO_1^+(3, \mathbb{R})$, as colunas de A satisfazem as condições dadas de (1.12) à (1.15).

Deste modo, existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Se $\mathcal{U} = \text{span}\{e_1\}$, então $Ae_1 = e_1$. Como $\langle Ae_1, Ae_j \rangle = \langle e_1, e_j \rangle = 0$, para $j = 2, 3$, segue que $Ae_2, Ae_3 \in \text{span}\{e_2, e_3\}$. Daí, $a_{12} = a_{13} = 0$ e então

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Como $A \in PO_1^+(3, \mathbb{R})$, as colunas de A formam uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}_1^3 e $\det A = 1$, ou seja,

$$a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1,$$

$$a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1,$$

$$a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0,$$

$$a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} = 1.$$

Das equações acima, concluímos que a matriz $(a_{ij})_{2 \leq i, j \leq 3} \in SO(2, \mathbb{R})$, em que

$$SO(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}); A \text{ é ortogonal e } \det A = 1\}.$$

Assim, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Por fim, se $\mathcal{U} = \text{span}\{e_1 + e_2\}$, vamos determinar A indiretamente, calculando primeiro A na base $\mathcal{B} = \{e_1 + e_2, e_2, e_3\}$, que denotamos por $A_{\mathcal{B}} = (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$. Nesta base, o pseudo-produto interno de \mathbb{R}_1^3 é dado por

$$\langle (x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{B}}, (x_2, y_2, z_2)_{\mathcal{B}} \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

em que $(x, y, z)_{\mathcal{B}} = x e_1 + (x + y) e_2 + z e_3$. Como $A(e_1 + e_2) = e_1 + e_2$, a primeira coluna de $A_{\mathcal{B}}$ é o vetor $(1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$. Além disso, $\langle e_3, e_1 + e_2 \rangle = 0$, então, $A e_3 \in \text{span}\{e_3, e_1 + e_2\}$, ou seja, $\lambda_{23} = 0$. Assim,

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

Uma vez que, $1 = \det A_{\mathcal{B}} = \lambda_{22} \lambda_{33}$, obtemos $\lambda_{22} = \frac{1}{\lambda_{33}}$. Para encontrar as demais entradas, notemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \langle e_2, e_1 + e_2 \rangle = \langle A e_2, A(e_1 + e_2) \rangle = \lambda_{22}, \\ 1 &= \langle e_2, e_2 \rangle = \langle A e_2, A e_2 \rangle = 1 + 2\lambda_{12} + \lambda_{32}^2, \\ 0 &= \langle e_2, e_3 \rangle = \langle A e_2, A e_3 \rangle = \lambda_{13} + \lambda_{32}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos $\lambda_{33} = \lambda_{22} = 1$, $\lambda_{32} = -\lambda_{13}$ e $\lambda_{12} = -\frac{\lambda_{13}^2}{2}$. Denotando $\lambda = \lambda_{13}$, temos

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Voltando para a base canônica, temos

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ 1 & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\lambda^2}{2} & -\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \frac{\lambda^2}{2} & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Teorema 1.16. *Seja $A \in PO_1^+(3, \mathbb{R})$. Então, A é conjugada a uma das matrizes dadas por (1.16), (1.17) e (1.18). Isto é, existe uma matriz $Q \in O_1(3, \mathbb{R})$ tal que $A = QM_iQ^{-1}$, em que*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

é a matriz que fixa o vetor $(1, 0, 0)$,

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\lambda^2}{2} & -\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \frac{\lambda^2}{2} & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

é a matriz que fixa o vetor $(1, 1, 0)$ e

$$M_3 = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

é a matriz que fixa o vetor $(0, 0, 1)$.

Demonstração. Seja \mathcal{U} uma reta fixada por A . Consideramos os casos:

Se A é hiperbólica, seja $u_3 \in \mathcal{U}$ um vetor unitário. Complete $\{u_3\}$ para uma base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de \mathbb{R}_1^3 . Seja $Q \in O_1(3, \mathbb{R})$ tal que $Qe_i = u_i$, para $1 \leq i \leq 3$. Temos que $Q^{-1}AQ \in PO_1^+(3, \mathbb{R})$, pois

$$\det(Q^{-1}AQ) = \det Q^{-1} \det A \det Q = (\det Q)^2 \det A = 1.$$

Além disso,

$$Q^{-1}AQe_3 = Q^{-1}Au_3 = Q^{-1}u_3 = e_3.$$

Logo, existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = Q \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Se A é elíptica, seja $u_1 \in \mathcal{U}$ um vetor unitário. Complete $\{u_1\}$ para uma base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de \mathbb{R}_1^3 . Tome $Q \in O_1(3, \mathbb{R})$ tal que $Qe_i = u_i$, para $1 \leq i \leq 3$. Daí $Q^{-1}AQ \in PO_1^+(3, \mathbb{R})$ satisfaz

$$Q^{-1}AQe_1 = Q^{-1}Au_1 = Q^{-1}u_1 = e_1.$$

Então, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Por fim, se A é parabólica, seja $u \in \mathcal{U}$ tal que $u = (1, a, b)$. Como $a^2 + b^2 = 1$, existe $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos \theta_0$ e $b = \sin \theta_0$. Tomando $Q \in PO_1^+(3, \mathbb{R})$ da forma

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix},$$

temos $Q^{-1}AQ \in PO_1^+(3, \mathbb{R})$ e

$$Q(e_1 + e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = u.$$

Daí

$$Q^{-1}AQ(e_1 + e_2) = Q^{-1}Au = Q^{-1}u = e_1 + e_2.$$

Portanto existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 + \frac{\lambda^2}{2} & -\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \frac{\lambda^2}{2} & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} \quad (1.19)$$

□

Para finalizar, determinamos a álgebra de Lie do grupo $O_1(3, \mathbb{R})$, que será denotada por $\mathfrak{o}_1(3, \mathbb{R})$.

Seja X um vetor tangente a $O_1(3, \mathbb{R})$ em Id . Então, existe uma curva diferenciável (C^∞) $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow O_1(3, \mathbb{R})$ tal que $\alpha(0) = Id$ e $\alpha'(0) = X$. Como $\alpha(s) \in O_1(3, \mathbb{R})$, para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, segue que $(\alpha(s))^\top G \alpha(s) = G$. Derivando, obtemos $(\alpha'(s))^\top G \alpha(s) + (\alpha(s))^\top G \alpha'(s) = 0$. Para $s = 0$, $X^\top G Id = -Id^\top GX$, isto é, $X^\top G = -GX$. Portanto,

$$\mathfrak{o}_1(3, \mathbb{R}) = \{X \in M(3; \mathbb{R}) ; X^\top G = -GX\}. \quad (1.20)$$

Escrevendo

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},$$

segue de (1.20) que,

$$\begin{pmatrix} -x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ -x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ -x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ -x_{21} & -x_{22} & -x_{23} \\ -x_{31} & -x_{32} & -x_{33} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & 0 & x_{23} \\ x_{13} & -x_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, concluímos que

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

é uma base para $\mathfrak{o}_1(3, \mathbb{R})$.

1.4 Curvas parametrizadas em \mathbb{R}_1^n

Finalizamos este capítulo com o estudo sobre curvas no espaço de Minkowski.

Definição 1.7. Uma curva parametrizada é uma aplicação suave $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$, em que I é um intervalo de \mathbb{R} . Chamamos a imagem $\gamma(I)$ de traço de γ . Para cada $s \in I$, o vetor $\gamma'(s)$ é chamado o vetor tangente de γ em s .

Todas as curvas estudadas nesta seção são parametrizadas.

Na seção 1.1 foi introduzido o tipo causal de vetores e de subespaços de \mathbb{R}_1^n . No caso de curvas temos a seguinte definição.

Definição 1.8. Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ uma curva e $s_0 \in I$.

- (1) Se $\gamma'(s_0)$ é um vetor de tipo espaço, dizemos que γ é uma curva tipo espaço em s_0 ;
- (2) Se $\gamma'(s_0)$ é um vetor de tipo tempo, dizemos que γ é uma curva tipo tempo em s_0 ;
- (3) Se $\gamma'(s_0)$ é um vetor de tipo luz, dizemos que γ é uma curva tipo luz em s_0 .

Se para todo $s \in I$, $\gamma'(s)$ é um vetor tipo espaço (resp. de tipo tempo, tipo luz), dizemos que γ é de tipo espaço (resp. de tipo tempo, tipo luz).

Exemplo 1.2.

1. Sejam $p, v \in \mathbb{R}_1^n$. A reta parametrizada por $\alpha(s) = p + sv$, $s \in \mathbb{R}$, tem vetor tangente $\alpha'(s) = v$. Logo, α tem o mesmo tipo causal de v .

2. Seja $\beta : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ o círculo $\beta(s) = (0, r \cos s, r \sin s)$ de raio $r > 0$ e centro na origem de \mathbb{R}_1^3 . Seu vetor tangente é $\beta'(s) = (0, -r \sin s, r \cos s)$ e assim $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = r^2 > 0$. Então, β é uma curva de tipo espaço.
3. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ a curva dada por $\gamma(s) = (bs, a \cos s, a \sin s)$, com $a, b > 0$. Temos $\gamma'(s) = (b, -a \sin s, a \cos s)$ e $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Portanto, se $a > b$, então γ é de tipo espaço; se $a = b$, segue que γ é de tipo luz e se $a < b$, γ é de tipo tempo.

Definição 1.9. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ uma curva. Dizemos que γ é regular se $\gamma'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Se existe $t_0 \in I$ tal que $\gamma'(t_0) = 0$, dizemos que t_0 é um ponto singular desta parametrização.

As curvas dadas no Exemplo 1.2 são regulares.

Teorema 1.17. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ uma curva. Se γ é de tipo luz ou tempo, então γ é regular.*

Demonstração. Se $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ é de tipo luz ou tipo tempo, então $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \leq 0$ para todo $t \in I$, isto é,

$$-(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2 + \dots + (x'_n(t))^2 \leq 0$$

e então $x'_1(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, e portanto $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. □

Definição 1.10. Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ uma curva e $a, b \in I$. O comprimento de arco de γ entre a e b é definido por

$$L_a^b[\gamma] = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Definição 1.11. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ uma curva. Uma reparametrização de γ é uma curva parametrizada da forma $\beta = \gamma \circ h$, onde $h : J \rightarrow I$ é um difeomorfismo entre os intervalos abertos J e I . A função h é chamada *mudança de parâmetro*.

Definição 1.12. Uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ tem velocidade unitária se $\|\gamma'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, e que está parametrizada pelo comprimento de arco se para todo $t_0 \in I$, a função comprimento de arco a partir de t_0 é dada por $s(t) = t - t_0$.

As definições acima, nos permitem enunciar o seguinte resultado.

Teorema 1.18. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ uma curva regular e que não seja de tipo luz. Então, γ admite uma reparametrização com velocidade unitária. Mas precisamente, existe um intervalo aberto J e um difeomorfismo $h : J \rightarrow I$ tal que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$ tem velocidade unitária.*

A demonstração desse Teorema é análogo ao caso de curvas no espaço euclidiano e pode ser visto em ([1], p. 116).

Capítulo 2

O Espaço Hiperbólico

No espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} munido do produto interno

$$\langle x, y \rangle_E = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i,$$

em que $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ e $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$, a esfera \mathbb{S}^n é definida como o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $\langle x, x \rangle_E = 1$. Analogamente, no espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} , definimos o conjunto

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+1} ; \langle x, x \rangle = -1, x_1 > 0\},$$

o qual chamamos de espaço hiperbólico de dimensão n . Note que, por definição, \mathbb{H}^n contém apenas vetores tipo tempo positivos e, se $n = 2$, o espaço \mathbb{H}^2 é uma superfície regular de \mathbb{R}_1^3 , a qual chamamos plano hiperbólico.

Neste capítulo, nosso objetivo é estudar as principais ferramentas geométricas que serão essenciais para o último capítulo deste trabalho.

2.1 Isometrias de \mathbb{H}^n

Dizemos que uma aplicação $\varphi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ é uma isometria de \mathbb{H}^n , se φ preserva o pseudo-produto interno (1.1), isto é, $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{H}^n$.

Exemplo 2.1. A aplicação $\psi_1 : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por

$$\psi_1(x, y, z) = (x, y \cos \theta + z \sin \theta, z \cos \theta - y \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

é uma isometria de \mathbb{H}^2 . De fato, sejam $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{H}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1(x_1, y_1, z_1), \psi_1(x_2, y_2, z_2) \rangle &= -x_1x_2 + (y_1 \cos \theta + z_1 \sin \theta)(y_2 \cos \theta + z_2 \sin \theta) \\
&\quad + (z_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)(z_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta) \\
&= -x_1x_2 + y_1y_2 \cos^2 \theta + y_1z_2 \cos \theta \sin \theta + z_1y_2 \cos \theta \sin \theta \\
&\quad + z_1z_2 \sin^2 \theta + z_1z_2 \cos^2 \theta - z_1y_2 \cos \theta \sin \theta \\
&\quad - y_1z_2 \cos \theta \sin \theta + y_1y_2 \sin^2 \theta \\
&= -x_1x_2 + y_1y_2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + z_1z_2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
&= -x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\
&= \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2. A aplicação $\psi_2 : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por

$$\psi_2(x, y, z) = \left(\frac{\lambda^2}{2}(x - y) + \lambda z + x, \frac{\lambda^2}{2}(x - y) + \lambda z + y, \lambda(x - y) + z \right), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

é uma isometria de \mathbb{H}^2 . Com efeito, se $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{H}^2$, então

$$\begin{aligned}
\langle \psi_2(x_1, y_1, z_1), \psi_2(x_2, y_2, z_2) \rangle &= - \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_1 - y_1) + \lambda z_1 + x_1 \right) \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_2 - y_2) + \lambda z_2 + x_2 \right) \\
&\quad + \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_1 - y_1) + \lambda z_1 + y_1 \right) \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_2 - y_2) + \lambda z_2 + y_2 \right) \\
&\quad + (\lambda(x_1 - y_1) + z_1)(\lambda(x_2 - y_2) + z_2) \\
&= - \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_1 - y_1) + \lambda z_1 \right) \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_2 - y_2) + \lambda z_2 \right) \\
&\quad - \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_1 - y_1) + \lambda z_1 \right) x_2 - \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_2 - y_2) + \lambda z_2 \right) x_1 - x_1x_2 \\
&\quad + \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_1 - y_1) + \lambda z_1 \right) \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_2 - y_2) + \lambda z_2 \right) \\
&\quad + \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_1 - y_1) + \lambda z_1 \right) y_2 + \left(\frac{\lambda^2}{2}(x_2 - y_2) + \lambda z_2 \right) y_1 + y_1y_2 \\
&\quad + \lambda^2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + \lambda(x_1 - y_1)z_2 + \lambda(x_2 - y_2)z_1 + z_1z_2 \\
&= - \frac{\lambda^2}{2}(x_1 - y_1)x_2 - \lambda z_1x_2 - \frac{\lambda^2}{2}(x_2 - y_2)x_1 - \lambda z_2x_1 - x_1x_2 \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{2}(x_1 - y_1)y_2 + \lambda z_1y_2 + \frac{\lambda^2}{2}(x_2 - y_2)y_1 + \lambda z_2y_1 + y_1y_2 \\
&\quad + \lambda^2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + \lambda(x_1 - y_1)z_2 + \lambda(x_2 - y_2)z_1 + z_1z_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\lambda^2}{2}(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) - \lambda(x_2 - y_2)z_1 - \frac{\lambda^2}{2}(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\
&\quad - \lambda(x_1 - y_1)z_2 - x_1x_2 + y_1y_2 + \lambda^2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\
&\quad + \lambda(x_1 - y_1)z_2 + \lambda(x_2 - y_2)z_1 + z_1z_2 \\
&= -x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\
&= \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3. A aplicação $\psi_3 : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por

$$\psi_3(x, y, z) = (x \cosh \varphi + y \sinh \varphi, y \cosh \varphi + x \sinh \varphi, z), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

é uma isometria de \mathbb{H}^2 . De fato, dados $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{H}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \psi_3(x_1, y_1, z_1), \psi_3(x_2, y_2, z_2) \rangle &= -(x_1 \cosh \varphi + y_1 \sinh \varphi)(x_2 \cosh \varphi + y_2 \sinh \varphi) \\
&\quad + (y_1 \cosh \varphi + x_1 \sinh \varphi)(y_2 \cosh \varphi + x_2 \sinh \varphi) + z_1z_2 \\
&= -x_1x_2 \cosh^2 \varphi - x_1y_2 \sinh \varphi \cosh \varphi - y_1x_2 \sinh \varphi \cosh \varphi \\
&\quad - y_1y_2 \sinh^2 \varphi + y_1y_2 \cosh^2 \varphi + y_1x_2 \sinh \varphi \cosh \varphi \\
&\quad + x_1y_2 \sinh \varphi \cosh \varphi + x_1x_2 \sinh^2 \varphi + z_1z_2 \\
&= -x_1x_2(\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi) + y_1y_2(\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi) + z_1z_2 \\
&= -x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\
&= \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle.
\end{aligned}$$

Observe que, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, tem-se $\psi_1(x) = M_1x$, $\psi_2(x) = M_2x$ e $\psi_3(x) = M_3x$, em que M_1 , M_2 e M_3 são as matrizes do Teorema 1.16. Ou seja, ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 são transformações de Lorentz positivas de \mathbb{R}^3 .

O próximo resultado caracteriza as isometrias de \mathbb{H}^n .

Teorema 2.1. *Toda transformação de Lorentz positiva de \mathbb{R}^{n+1} restrita a \mathbb{H}^n é uma isometria de \mathbb{H}^n . Toda isometria de \mathbb{H}^n se estende a uma única transformação de Lorentz positiva de \mathbb{R}^{n+1} .*

Demonstração. Sejam $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma transformação de Lorentz positiva e $\varphi = \psi|_{\mathbb{H}^n}$ a restrição de ψ a \mathbb{H}^n . Notemos que φ leva vetores de \mathbb{H}^n em vetores de \mathbb{H}^n , pois ψ preserva o pseudo-produto interno e assim se $x \in \mathbb{H}^n$, então $\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle x, x \rangle = -1$, ou seja, $\varphi(x) \in \mathbb{H}^n$. Daí, segue direto que $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{H}^n$.

Agora, consideramos $\varphi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ uma isometria. Vamos mostrar que existe uma única transformação de Lorentz positiva $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $\varphi = \psi|_{\mathbb{H}^n}$. De fato, seja $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ a base canônica de \mathbb{R}^{n+1} . Suponhamos inicialmente que $\varphi(e_1) = e_1$. Usando a notação $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ para as coordenadas de φ , segue que

$$\varphi_1(x) = -\langle \varphi(x), e_1 \rangle = -\langle \varphi(x), \varphi(e_1) \rangle = -\langle x, e_1 \rangle = x_1,$$

em que x_1 é a primeira coordenada de x . Assim, $\varphi(x) = (x_1, \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x))$.

Seja $p : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $p(x) = \bar{x}$. Notemos que p é uma bijeção. De fato, se $p(x) = p(y)$ para $x, y \in \mathbb{H}^n$, então $\bar{x} = \bar{y}$, ou seja, $x_i = y_i$, para todo $2 \leq i \leq n+1$. Como $x, y \in \mathbb{H}^2$, ou seja, $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = -1$, segue que $x_1^2 = y_1^2$ ou, equivalentemente, $x_1 = |y_1|$, mas $x_1 > 0$ e $y_1 > 0$ e portanto $x_1 = y_1$. Assim, p é injetiva. Agora, seja $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Notemos que $v = (v_1, u_1, \dots, u_n)$ com $v_1 = \sqrt{1 + u_1^2 + \dots + u_n^2}$ pertence a \mathbb{H}^n e $p(v) = u$.

Usando φ e p , definimos uma função $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\bar{\varphi}(u) = p \circ \varphi \circ p^{-1}(u)$. Disso, segue que para todo $x \in \mathbb{H}^n$

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = p \circ \varphi \circ p^{-1}(\bar{x}) = p \circ \varphi(x) = \overline{\varphi(x)}.$$

Combinando a última igualdade com a equação (1.3) e o fato de φ ser uma isometria, obtemos

$$\begin{aligned} -x_1 y_1 + \overline{\varphi(x)} \cdot \overline{\varphi(y)} &= -x_1 y_1 + \bar{x} \cdot \bar{y} \\ \overline{\varphi(x)} \cdot \overline{\varphi(y)} &= \bar{x} \cdot \bar{y} \\ \bar{\varphi}(\bar{x}) \cdot \bar{\varphi}(\bar{y}) &= \bar{x} \cdot \bar{y}. \end{aligned}$$

Daí, $\bar{\varphi}$ é uma transformação ortogonal. Assim, existe uma matriz ortogonal A tal que $Au = \bar{\varphi}(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$. Seja

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Observamos que \hat{A} é lorentziana positiva e $\hat{A}x = \varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{H}^n$, pois as colunas de A formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^n . Além disso, se $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um vetor tipo tempo

positivo, a primeira coordenada de $\hat{A}x$ é a primeira coordenada de x , que é positiva, logo \hat{A} é uma matriz lorentziana positiva. Sendo $A\bar{x} = \overline{\varphi(\bar{x})}$, para todo $x \in \mathbb{H}^n$, então

$$\begin{aligned}\hat{A}x &= (x_1, \varphi_2(p^{-1}(\bar{x})), \dots, \varphi_{n+1}(p^{-1}(\bar{x}))) \\ &= (x_1, \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)) \\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

Daí, concluímos que, se $\varphi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ é uma isometria de \mathbb{H}^n tal que $\varphi(e_1) = e_1$, então existe uma transformação de Lorentz positiva de \mathbb{R}^{n+1} que estende φ .

Para o caso geral, procedemos da seguinte forma. Suponhamos que φ seja uma isometria arbitrária de \mathbb{H}^n . Sejam e_1 e $\varphi(e_1)$ vetores tipo tempo positivos. Pela Proposição 1.13, existe $B \in PO_1(n+1, \mathbb{R})$, tal que $B\varphi(e_1) = e_1$. Assim, do caso anterior, existe uma transformação lorentziana positiva $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $\psi(x) = B\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{H}^n$. Usando os Corolários 1.11 e 1.12, mostra-se que $B^{-1}\psi$ é uma transformação lorentziana positiva de \mathbb{R}^{n+1} . Logo, $B^{-1}\psi$ estende φ . Para provar a unicidade, consideramos Φ e Ψ transformações de lorentz positivas do \mathbb{R}^{n+1} que estendem φ , isto é, $\Phi(x) = \varphi(x) = \Psi(x)$ para todo $x \in \mathbb{H}^n$. Considerando $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ a base canônica de \mathbb{R}^{n+1} , notemos que os vetores e_1 e $\sqrt{2}e_1 + e_j$, $j = 2, \dots, n+1$, pertencem a \mathbb{H}^n , pois $\langle e_1, e_1 \rangle = -1$ e

$$\langle \sqrt{2}e_1 + e_j, \sqrt{2}e_1 + e_j \rangle = 2\langle e_1, e_1 \rangle + 2\sqrt{2}\langle e_1, e_j \rangle + \langle e_j, e_j \rangle = -1.$$

Assim, $\Phi(e_1) = \Psi(e_1)$ e $\Phi(\sqrt{2}e_1 + e_j) = \Psi(\sqrt{2}e_1 + e_j)$, $j = 2, \dots, n+1$ e então da linearidade de Φ e Ψ segue que $\Phi(e_i) = \Psi(e_i)$ para todo $i = 1, \dots, n+1$. Portanto, é única a transformação de Lorentz positiva que estende φ . \square

2.2 Curvas Parametrizadas em \mathbb{H}^2

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados básicos sobre curvas no espaço hiperbólico bidimensional que serão utilizados no Capítulo 3.

Definição 2.1. Uma curva parametrizada regular em \mathbb{H}^2 é uma aplicação suave $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$, em que I é um intervalo de \mathbb{R} , tal que $\gamma'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$.

É importante observar que $\langle \gamma'(s), \gamma(s) \rangle = 0$ para todo $s \in I$, pois $\gamma(s) \in \mathbb{H}^2$. Assim, $\gamma(s)$ e $\gamma'(s)$ são vetores pseudo-ortogonais. Além disso, sendo $\gamma(s)$ um vetor tipo tempo,

segue da Proposição 1.1 que $\gamma'(s)$ é de tipo espaço e então, da Definição 1.8, γ é uma curva tipo espaço.

Exemplo 2.4. A aplicação $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por $\gamma(s) = (\cosh s, \sinh s, 0)$ é uma curva parametrizada regular em \mathbb{H}^2 , pois

$$\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = -\cosh^2 s + \sinh^2 s = -1$$

e $\gamma'(s) = (\sinh s, \cosh s, 0) \neq (0, 0, 0)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, γ está parametrizada pelo comprimento de arco, pois $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = -\sinh^2 s + \cosh^2 s = 1$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

No que segue, denotamos $\gamma'(s)$ por $t(s)$ e consideramos $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s , isto é, $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$ para todo $s \in I$.

O vetor normal à γ em $s \in I$ é definido por $n(s) = \gamma(s) \times t(s)$. Assim, $n(s)$ é pseudo-ortogonal a $\gamma(s)$ e $t(s)$. Além disso, $\langle n(s), n(s) \rangle = 1$, pois, do item 4 do Teorema 1.4,

$$\begin{aligned} \langle n(s), n(s) \rangle &= \langle \gamma(s) \times t(s), \gamma(s) \times t(s) \rangle \\ &= \begin{vmatrix} \langle \gamma(s), t(s) \rangle & \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle \\ \langle t(s), t(s) \rangle & \langle t(s), \gamma(s) \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\{\gamma(s), t(s), n(s)\}$ é uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{R}_1^3 ao longo de γ , pois $\gamma(s)$ é de tipo tempo e, pelo Corolário 1.2, os vetores $t(s)$ e $n(s)$ são de tipo espaço, para todo $s \in I$.

2.2.1 O Triedro de Darboux-Ribaucour

Nosso objetivo adiante é determinar as equações de Darboux-Ribaucour de $\gamma(s)$ associadas à base pseudo-ortonormal $\{\gamma(s), t(s), n(s)\}$, a qual chamamos triedro de Darboux-Ribaucour da curva γ . Essas equações nos possibilitam mostrar o Teorema Fundamental de Curvas em \mathbb{H}^2 . Para isso, começamos com a seguinte definição.

Definição 2.2. A curvatura geodésica de γ em $s \in I$ é a função $k_g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $k_g(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle$.

Notemos que, a curvatura geodésica $k_g(s)$ é a componente de $t'(s)$ na direção de $n(s)$.

Exemplo 2.5. A curva $\gamma(s) = (\cosh s, \sinh s, 0)$, do Exemplo 2.4, é uma geodésica de \mathbb{H}^2 . De fato, seu vetor tangente é $t(s) = (\sinh s, \cosh s, 0)$ e assim, $t'(s) = (\cosh s, \sinh s, 0)$. O vetor normal a $\gamma(s)$ é dado por

$$n(s) = \gamma(s) \times t(s) = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ \cosh s & \sinh s & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1).$$

Então,

$$k_g(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \langle (\cosh s, \sinh s, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0.$$

Portanto, γ é geodésica.

Exemplo 2.6. A curva $\beta(s) = (\cosh s, \cos \theta \sinh s, -\sin \theta \sinh s)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, é uma geodésica de \mathbb{H}^2 . De fato, notemos que $\beta = \mathcal{R} \circ \gamma$, em que \mathcal{R} é a rotação de um ângulo θ em torno da reta gerada pelo vetor $(1, 0, 0)$, isto é,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

e $\gamma(s) = (\cosh s, \sinh s, 0)$ é a geodésica do exemplo anterior. Como \mathcal{R} é uma isometria de \mathbb{H}^2 e a curvatura geodésica é invariante por isometrias, então β é uma geodésica.

Observemos que, para cada $p \in \mathbb{H}^2$, o espaço tangente a \mathbb{H}^2 no ponto p , denotado por $T_p\mathbb{H}^2$, é o conjunto

$$T_p\mathbb{H}^2 = \{v \in \mathbb{R}_1^3; \langle p, v \rangle = 0\}. \quad (2.1)$$

De fato, se $v \in T_p\mathbb{H}^2$, então existe uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Como $\alpha(s) \in \mathbb{H}^2$, para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, segue que $\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. Para $s = 0$, temos $\langle \alpha(0), \alpha'(0) \rangle = 0$, ou seja, $\langle p, v \rangle = 0$. Agora, seja $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ tal que $\langle p, v \rangle = 0$. Do Corolário 1.2, v é tipo espaço, e então $\langle v, v \rangle > 0$. Defina a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H}^2$ por $\alpha(s) = (\cosh(as))p + (\sinh(as))\bar{v}$, em que $a = \|v\|$ e $\bar{v} = \frac{v}{a}$. Temos

$\alpha'(s) = (\sinh(as))ap + (\cosh(as))v$ e $\alpha(s) \in \mathbb{H}^2$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, pois

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle &= \langle (\cosh(as))p + (\sinh(as))\bar{v}, (\cosh(as))p + (\sinh(as))\bar{v} \rangle \\ &= \cosh^2(as)\langle p, p \rangle + 2\cosh(as)\sinh(as)\langle p, \bar{v} \rangle + \sinh^2(as)\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \\ &= -\cosh^2(as) + \sinh^2(as) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Uma vez que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, segue que $v \in T_p\mathbb{H}^2$ e assim (2.1) está provada. Como consequência, $t(s)$ e $n(s)$ pertencem a $T_{\gamma(s)}\mathbb{H}^2$ para todo $s \in I$.

Escrevendo $t'(s)$ e $n'(s)$ em termos da base $\{\gamma(s), t(s), n(s)\}$, obtemos

$$\begin{cases} t'(s) &= -\langle t'(s), \gamma(s) \rangle \gamma(s) + \langle t'(s), t(s) \rangle t(s) + \langle t'(s), n(s) \rangle n(s) \\ n'(s) &= -\langle n'(s), \gamma(s) \rangle \gamma(s) + \langle n'(s), t(s) \rangle t(s) + \langle n'(s), n(s) \rangle n(s). \end{cases}$$

Sabendo que $\gamma(s)$ e $t(s)$ são pseudo-ortogonais e que $t(s)$ e $n(s)$ são unitários, temos que $\langle t'(s), \gamma(s) \rangle = -\langle t(s), t(s) \rangle = -1$, $\langle t'(s), t(s) \rangle = 0$ e $\langle n'(s), n(s) \rangle = 0$. Da igualdade $\langle n(s), \gamma(s) \rangle = 0$, segue que $\langle n'(s), \gamma(s) \rangle = -\langle n(s), t(s) \rangle = 0$. Por fim, como $\langle t(s), n(s) \rangle = 0$, obtemos $k_g(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = -\langle t(s), n'(s) \rangle$.

Assim, as equações de Darboux-Ribaucour de $\gamma(s)$ são

$$\begin{cases} \gamma'(s) &= t(s) \\ t'(s) &= \gamma(s) + k_g(s)n(s) \\ n'(s) &= -k_g(s)t(s). \end{cases} \quad (2.2)$$

No plano euclidiano \mathbb{R}^2 , uma curva regular é determinada, a menos de isometrias, por sua função curvatura. No espaço hiperbólico, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2 (Fundamental das Curvas em \mathbb{H}^2). *Dada uma função diferenciável $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma curva parametrizada regular $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$, tal que s é o comprimento de arco, e k é a curvatura geodésica de X . Além disso, qualquer outra curva \tilde{X} satisfazendo as mesmas condições difere de X por uma isometria de \mathbb{H}^2 , isto é, existe uma transformação de Lorentz positiva $A \in O_1(3, \mathbb{R})$, tal que $\tilde{X}(s) = AX(s)$.*

Demonstração. Sejam $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, $T(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$ e $N(s) =$

$(n_1(s), n_2(s), n_3(s))$. Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais em $I \times \mathbb{R}^9$

$$\begin{cases} x'_j(s) = t_j(s) \\ t'_j(s) = k(s)n_j(s) + x_j(s) \\ n'_j(s) = -k(s)t_j(s) \end{cases} \quad (2.3)$$

com $j = 1, 2, 3$.

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias, dadas condições iniciais $\{X_0, T_0, N_0\}$ e $s_0 \in I$, existe uma família de soluções $\{X(s), T(s), N(s)\}$, $s \in I$, satisfazendo $X(s_0) = X_0$, $T(s_0) = T_0$ e $N(s_0) = N_0$.

Afirmamos que a família $\{X(s), T(s), N(s)\}$ permanece pseudo-ortonormal para todo $s \in I$. De fato, de (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} \langle X, T \rangle' &= k\langle X, N \rangle + \langle X, X \rangle + \langle T, T \rangle \\ \langle X, N \rangle' &= -k\langle X, T \rangle + \langle T, N \rangle \\ \langle T, N \rangle' &= k\langle N, N \rangle + \langle X, N \rangle - k\langle T, T \rangle \\ \langle X, X \rangle' &= 2\langle X, T \rangle \\ \langle T, T \rangle' &= 2k\langle T, N \rangle + 2\langle X, T \rangle \\ \langle N, N \rangle' &= -2k\langle T, N \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Verifica-se facilmente que

$$\langle X, T \rangle = 0, \quad \langle X, N \rangle = 0, \quad \langle T, N \rangle = 0, \quad \langle X, X \rangle = -1, \quad \langle T, T \rangle = 1, \quad \text{e} \quad \langle N, N \rangle = 1$$

é solução do sistema (2.4) com condições iniciais $0, 0, 0, -1, 1, 1$ e, por unicidade, a família $\{X(s), T(s), N(s)\}$ é pseudo-ortonormal para todo $s \in I$.

Por (2.2), temos que $X' = T$ e $T' = X + kN$, logo

$$\langle T', N \rangle = \langle X + kN, N \rangle = \langle X, N \rangle + \langle kN, N \rangle = k$$

e, então, k é a curvatura geodésica de X .

Agora, afirmamos que X é a única curva, a menos de isometria, cuja curvatura geodésica é k . Sejam $\tilde{X} : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva com curvatura $\tilde{k}(s) = k(s)$, para todo $s \in I$, e $\{\tilde{X}_0, \tilde{T}_0, \tilde{N}_0\}$ o triedro de Darboux-Ribaucour de \tilde{X} em $s_0 \in I$. Existe uma

transformação de Lorentz positiva $A \in PO(3, \mathbb{R})$ que leva a base $\{X_0, T_0, N_0\}$ na base $\{\tilde{X}_0, \tilde{T}_0, \tilde{N}_0\}$. Temos

$$\langle A\tilde{T}', A\tilde{N} \rangle = \langle \tilde{T}', \tilde{N} \rangle = k,$$

isto é, a curva AX tem curvatura k . Além disso, satisfaz as condições iniciais $AX_0 = \tilde{X}_0$, $AT_0 = \tilde{T}_0$ e $AN_0 = \tilde{N}_0$ em $s_0 \in I$. Pela unicidade, segue que $\tilde{X} = AX$. \square

Capítulo 3

Solitons do Fluxo de Curvatura no Plano Hiperbólico

Este capítulo é dedicado ao estudo do fluxo de curvatura no plano hiperbólico e suas soluções autossimilares, isto é, soluções que evoluem por isometrias de \mathbb{H}^2 , chamadas solitons. Mais especificamente, apresentaremos os principais resultados do artigo “*Soliton solutions to the curve shortening flow on the 2-dimensional hyperbolic space*” de da Silva e Tenenblat [2].

3.1 Fluxo de curvatura em \mathbb{H}^2

Seja $X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}_1^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s . Denotamos por $T(s) = X'(s)$ o campo de vetores tangentes, $N(s) = X(s) \times T(s)$ o campo de vetores normais unitários e $k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ a curvatura geodésica de X . Uma família a um parâmetro de curvas $\hat{X} : I \times J \rightarrow \mathbb{H}^2$, em que J é um intervalo de \mathbb{R} , é chamada fluxo de curvatura com condição inicial X , se

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{N}(s, t) \right\rangle = \hat{k}(s, t) \\ \hat{X}(s, 0) = X(s) \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o pseudo-produto interno definido no Capítulo 1, $\hat{k}(s, t)$ é a curvatura geodésica de $\hat{X}(s, t)$, e $\hat{N}(s, t)$ é o campo de vetores normal unitário a $\hat{X}(s, t)$.

Definição 3.1. Seja $\hat{X} : I \times J \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}_1^3$ uma solução para o fluxo de curvatura (3.1)

em \mathbb{H}^2 , com condição inicial $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$. Dizemos que X é um *soliton para o fluxo de curvatura*, se existe uma família a 1-parâmetro de isometrias, $M(t) : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, tal que $M(0) = Id$ e

$$\hat{X}(s, t) = M(t)X(s) \quad (3.2)$$

para todo $t \in J$, em que Id é a aplicação identidade de \mathbb{H}^2 .

De (3.2), temos que os campos de vetores tangente e normal a $\hat{X}(s, t)$ para cada $t \in J$ são dados, respectivamente, por $\hat{T}(s, t) = M(t)T(s)$ e $\hat{N}(s, t) = M(t)N(s)$. Além disso, uma vez que a curvatura geodésica é invariante por isometrias, temos que $\hat{k}(s, t) = k(s)$ para todo $(s, t) \in I \times J$.

Observemos que, se escrevermos $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, $T(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$ e $N(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$, então, do Teorema 1.4 (item 4), $T(s) = -X(s) \times N(s)$ e, conseqüentemente,

$$T(s) = (x_2(s)n_3(s) - x_3(s)n_2(s), x_1(s)n_3(s) - x_3(s)n_1(s), x_2(s)n_1(s) - x_1(s)n_2(s)).$$

O primeiro resultado principal estabelece uma condição necessária e suficiente para uma curva parametrizada pelo comprimento de arco ser um soliton do fluxo de curvatura.

Teorema 3.1. *Seja $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $X(s)$ é um soliton para o fluxo de curvatura se, e somente se, existe um vetor $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$, tal que*

$$k(s) = \langle T(s), v \rangle, \quad (3.3)$$

em que $T(s)$ é o campo de vetores tangentes unitários e $k(s)$ é a curvatura geodésica de $X(s)$.

Demonstração. Seja $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s . Se X é um soliton do fluxo de curvatura, então $\hat{X}(s, t) = M(t)X(s)$ é uma solução de (3.1), em que $M(t)$ é uma família de isometrias de \mathbb{H}^2 tal que $M(0) = Id$. Derivando $\hat{X}(s, t)$ em relação a t ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t) = M'(t)X(s).$$

Por (3.1),

$$\hat{k}(s, t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{N}(s, t) \right\rangle = \langle M'(t)X(s), M(t)N(s) \rangle.$$

Logo, para $t = 0$,

$$k(s) = \langle M'(0)X(s), N(s) \rangle.$$

Como $M'(0)$ é um elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{o}_1(3)$, existem constantes $c_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq 3$, tais que $M'(0) = c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3$, em que

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base de $\mathfrak{o}_1(3)$. Para o que segue, escrevemos $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ e $N(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$. Assim,

$$M'(0)X(s) = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3x_2(s) + c_2x_3(s) \\ c_3x_1(s) + c_1x_3(s) \\ c_2x_1(s) - c_1x_2(s) \end{pmatrix}.$$

Sendo $X(s) \times N(s) = -T(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle M'(0)X(s), N(s) \rangle &= -(c_3x_2 + c_2x_3)n_1 + (c_3x_1 + c_1x_3)n_2 + (c_2x_1 - c_1x_2)n_3 \\ &= -(x_2n_3 - x_3n_2)c_1 + (x_1n_3 - x_3n_1)c_2 - (x_2n_1 - x_1n_2)c_3 \\ &= \langle -X(s) \times N(s), (c_1, c_2, -c_3) \rangle \\ &= \langle T(s), (c_1, c_2, -c_3) \rangle. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $v = (c_1, c_2, -c_3)$, concluímos que

$$k(s) = \langle T(s), v \rangle.$$

Reciprocamente, seja $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s tal que sua curvatura geodésica satisfaz $k(s) = \langle T(s), v \rangle$ para algum vetor $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$. Do Teorema 1.16, existe uma matriz $Q \in O_1(3, \mathbb{R})$, tal que $A = QM_iQ^{-1} \in PO_1^+(3, \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq 3$, fixa a reta gerada por v . Para cada tipo causal de v , definimos a evolução

$\hat{X}(s, t) = A_i(t)X(s)$, em que $A_i(t) = QM_i(t)Q^{-1}$ e

$$M_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_1(t)) & \sin(\varphi_1(t)) \\ 0 & -\sin(\varphi_1(t)) & \cos(\varphi_1(t)) \end{pmatrix},$$

$$M_2(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(\varphi_2(t))^2}{2} & -\frac{(\varphi_2(t))^2}{2} & \varphi_2(t) \\ \frac{(\varphi_2(t))^2}{2} & 1 - \frac{(\varphi_2(t))^2}{2} & \varphi_2(t) \\ \varphi_2(t) & -\varphi_2(t) & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3(t) = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi_3(t)) & \sinh(\varphi_3(t)) & 0 \\ \sinh(\varphi_3(t)) & \cosh(\varphi_3(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são famílias de isometrias que fixam o vetor v para cada tipo causal, e $\varphi_i(t)$ satisfaz $\varphi_i(0) = 0$ para cada $i = 1, 2, 3$. Isto implica que $\hat{T}(s, t) = A_i(t)T(s)$ e $\hat{N}(s, t) = A_i(t)N(s)$.

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{N}(s, t) \right\rangle &= \langle A_i'(t)X(s), A_i(t)N(s) \rangle \\ &= \langle QM_i'(t)Q^{-1}X(s), QM_i(t)Q^{-1}N(s) \rangle \\ &= (QM_i'(t)Q^{-1}X(s))^\top GQM_i(t)Q^{-1}N(s) \\ &= (X(s))^\top (Q^{-1})^\top (M_i'(t))^\top Q^\top GQM_i(t)Q^{-1}N(s) \\ &= (X(s))^\top (Q^{-1})^\top (M_i'(t))^\top GM_i(t)Q^{-1}N(s). \end{aligned}$$

Agora, analisamos os três casos do tipo causal de v . Em todos os casos, por simplicidade, escrevemos $X(s) = (x_1, x_2, x_3)$, $N(s) = (n_1, n_2, n_3)$ e $\varphi_i(t) = \varphi_i$, $i = 1, 2, 3$.

(i) Se v é tipo tempo, seja $A_1(t) = QM_1(t)Q^{-1}$, com $\varphi_1(t) = \|v\|t$, se $\det Q = 1$, ou $\varphi_1(t) = -\|v\|t$, se $\det Q = -1$. Dessa forma,

$$(M_1'(t))^\top GM_1(t) = \varphi_1' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_1' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \\
&= \varphi_1' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \varphi_1'(M_1'(0))^\top G.
\end{aligned}$$

Do Teorema 1.16, Q é uma matriz lorentziana que satisfaz $Qe_1 = \tilde{v}$, em que $\tilde{v} = v/\|v\|$ e $e_1 = (1, 0, 0)$. Dessa forma, escrevendo

$$Q = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{pmatrix},$$

temos $\tilde{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Logo

$$\begin{aligned}
(Q^{-1})^\top (M_1'(0))^\top G Q^{-1} &= \begin{pmatrix} v_1 & -u_1 & -w_1 \\ -v_2 & u_2 & w_2 \\ -v_3 & u_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 & -v_3 \\ -u_1 & u_2 & u_3 \\ -w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -w_1 & u_1 \\ 0 & w_2 & -u_2 \\ 0 & w_3 & -u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 & -v_3 \\ -u_1 & u_2 & u_3 \\ -w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & u_1 w_2 - u_2 w_1 & u_1 w_3 - u_3 w_1 \\ -(u_1 w_2 - u_2 w_1) & 0 & -(u_2 w_3 - u_3 w_2) \\ -(u_1 w_3 - u_3 w_1) & u_2 w_3 - u_3 w_2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Fazendo

$$Q_{11} = \begin{pmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_{31} = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{pmatrix},$$

segue de (1.11) que $\det Q_{11} = \pm v_1$, $\det Q_{21} = \pm v_2$ e $-\det Q_{31} = \pm v_3$, pois $\det Q = \pm 1$.

Logo,

$$(Q^{-1})^\top (M'_1(0))^\top G Q^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} (X(s))^\top (Q^{-1})^\top (M'_1(0))^\top G Q^{-1} N(s) &= \pm (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\ &= \pm (x_2 v_3 - x_3 v_2 \quad x_3 v_1 - x_1 v_3 \quad x_1 v_2 - x_2 v_1) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\ &= \pm [(x_2 v_3 - x_3 v_2)n_1 + (x_3 v_1 - x_1 v_3)n_2 + (x_1 v_2 - x_2 v_1)n_3] \\ &= \pm [-(x_2 n_3 - x_3 n_2)v_1 + (x_1 n_3 - x_3 n_1)v_2 + (x_2 n_1 - x_1 n_2)v_3] \\ &= \pm \langle (x_2 n_3 - x_3 n_2, x_1 n_3 - x_3 n_1, x_2 n_1 - x_1 n_2), (v_1, v_2, v_3) \rangle \\ &= \pm \langle T(s), \tilde{v} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{N}(s, t) \right\rangle &= (X(s))^\top (Q^{-1})^\top (M'_1(t))^\top G M_1(t) Q^{-1} N(s) \\ &= (X(s))^\top (Q^{-1})^\top \varphi'_1(t) (M'_1(0))^\top G Q^{-1} N(s) \\ &= \varphi'_1(t) (X(s))^\top (Q^{-1})^\top (M'_1(0))^\top G Q^{-1} N(s) \\ &= \pm \varphi'_1(t) \langle T(s), \tilde{v} \rangle \\ &= \|v\| \langle T(s), \tilde{v} \rangle \\ &= \langle T(s), v \rangle \\ &= k(s). \end{aligned}$$

(ii) Se $v = (v_1, v_2, v_3)$ é tipo luz, seja $A_2(t) = Q M_2(t) Q^{-1}$, com $\varphi_2(t) = v_1 t$. Assim,

$$(M'_2(t))^\top G M_2(t) = \varphi'_2 \begin{pmatrix} \varphi_2 & \varphi_2 & 1 \\ -\varphi_2 & -\varphi_2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\varphi_2^2}{2} & -\frac{\varphi_2^2}{2} & \varphi_2 \\ \frac{\varphi_2^2}{2} & 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} & \varphi_2 \\ \varphi_2 & -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_2' \begin{pmatrix} \varphi_2 & \varphi_2 & 1 \\ -\varphi_2 & -\varphi_2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 - \frac{\varphi_2^2}{2} & \frac{\varphi_2^2}{2} & -\varphi_2 \\ \frac{\varphi_2^2}{2} & 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} & \varphi_2 \\ \varphi_2 & -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \varphi_2' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \varphi_2'(M_2'(0))^\top G.
\end{aligned}$$

Agora, seja $\tilde{v} = (1, a, b)$, com $a = \frac{v_2}{v_1}$ e $b = \frac{v_3}{v_1}$. Do Teorema 1.16, Q é uma matriz lorentziana da forma

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix},$$

em que $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ é tal que $a = \cos \theta_0$ e $b = \sin \theta_0$. Assim,

$$\begin{aligned}
(Q^{-1})^\top (M_2'(0))^\top G Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta_0 & -\sin \theta_0 & -\cos \theta_0 \\ -\cos \theta_0 & \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 & 0 & -1 \\ -\cos \theta_0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -1 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
(X(s))^\top(Q^{-1})^\top(M'_2(0))^\top GQ^{-1}N(s) &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -1 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\
&= (x_2b - x_3a \quad x_3 - x_1b \quad x_1a - x_2) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\
&= (x_2b - x_3a)n_1 + (x_3 - x_1b)n_2 + (x_1a - x_2)n_3 \\
&= -(x_2n_3 - x_3n_2) + (x_1n_3 - x_3n_1)a + (x_2n_1 - x_1n_2)b \\
&= \langle (x_2n_3 - x_3n_2, x_1n_3 - x_3n_1, x_2n_1 - x_1n_2), (1, a, b) \rangle \\
&= \langle T(s), \tilde{v} \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{N}(s, t) \right\rangle &= (X(s))^\top(Q^{-1})^\top(M'_2(t))^\top GM_2(t)Q^{-1}N(s) \\
&= (X(s))^\top(Q^{-1})^\top \varphi'_2(t)(M'_2(0))^\top GQ^{-1}N(s) \\
&= \varphi'_2(t)(X(s))^\top(Q^{-1})^\top(M'_2(0))^\top GQ^{-1}N(s) \\
&= \varphi'_2(t) \langle T(s), \tilde{v} \rangle \\
&= v_1 \langle T(s), \tilde{v} \rangle \\
&= \langle T(s), v \rangle \\
&= k(s).
\end{aligned}$$

(iii) Se v é tipo espaço, seja $A_3(t) = QM_3(t)Q^{-1}$, com $\varphi_3(t) = -\|v\|t$, se $\det Q = 1$ ou $\varphi_3(t) = \|v\|t$, se $\det Q = -1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
(M'_3(t))^\top GM_3(t) &= \varphi'_3 \begin{pmatrix} \sinh \varphi_3 & \cosh \varphi_3 & 0 \\ \cosh \varphi_3 & \sinh \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \varphi_3 & \sinh \varphi_3 & 0 \\ \sinh \varphi_3 & \cosh \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \varphi'_3 \begin{pmatrix} \sinh \varphi_3 & \cosh \varphi_3 & 0 \\ \cosh \varphi_3 & \sinh \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cosh \varphi_3 & -\sinh \varphi_3 & 0 \\ \sinh \varphi_3 & \cosh \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi'_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \varphi'_3 (M'_3(0))^\top G.
\end{aligned}$$

Do Teorema 1.16, Q é uma matriz lorentziana que satisfaz $Qe_3 = \tilde{v}$, em que $\tilde{v} = v/\|v\|$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Dessa forma, escrevendo

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & v_1 \\ u_2 & w_2 & v_2 \\ u_3 & w_3 & v_3 \end{pmatrix},$$

temos $\tilde{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Logo,

$$\begin{aligned}
(Q^{-1})^\top (M'_3(0))^\top G Q^{-1} &= \begin{pmatrix} u_1 & -w_1 & -v_1 \\ -u_2 & w_2 & v_2 \\ -u_3 & w_3 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 \\ -w_1 & w_2 & w_3 \\ -v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_1 & u_1 & 0 \\ -w_2 & -u_2 & 0 \\ -w_3 & -u_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 \\ -w_1 & w_2 & w_3 \\ -v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & u_1 w_2 - u_2 w_1 & u_1 w_3 - u_3 w_1 \\ -(u_1 w_2 - u_2 w_1) & 0 & -(u_2 w_3 - u_3 w_2) \\ -(u_1 w_3 - u_3 w_1) & u_2 w_3 - u_3 w_2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Fazendo

$$Q_{13} = \begin{pmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix}, \quad Q_{23} = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_{33} = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{pmatrix},$$

segue de (1.11) que $-\det Q_{13} = \pm v_1$, $-\det Q_{23} = \pm v_2$ e $\det Q_{33} = \pm v_3$. Logo,

$$(Q^{-1})^\top (M'_3(0))^\top G Q^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(X(s))^\top(Q^{-1})^\top(M'_3(0))^\top GQ^{-1}N(s) &= \pm(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\
&= \pm(x_3v_2 - x_2v_3 \ x_1v_3 - x_3v_1 \ x_2v_1 - x_1v_2) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\
&= \pm[(x_3v_2 - x_2v_3)n_1 + (x_1v_3 - x_3v_1)n_2 + (x_2v_1 - x_1v_2)n_3] \\
&= \pm[-(x_3n_2 - x_2n_3)v_1 + (x_3n_1 - x_1n_3)v_2 + (x_1n_2 - x_2n_1)v_3] \\
&= \pm\langle(x_3n_2 - x_2n_3, x_3n_1 - x_1n_3, x_1n_2 - x_2n_1), (v_1, v_2, v_3)\rangle \\
&= \pm\langle -T(s), \tilde{v} \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{N}(s, t) \right\rangle &= (X(s))^\top(Q^{-1})^\top(M'_3(t))^\top GM_3(t)Q^{-1}N(s) \\
&= (X(s))^\top(Q^{-1})^\top\varphi'_3(t)(M'_3(0))^\top GQ^{-1}N(s) \\
&= \varphi'_3(t)(X(s))^\top(Q^{-1})^\top(M'_3(0))^\top GQ^{-1}N(s) \\
&= \pm\varphi'_3(t)\langle -T(s), \tilde{v} \rangle \\
&= \|v\|\langle T(s), \tilde{v} \rangle \\
&= \langle T(s), v \rangle \\
&= k(s).
\end{aligned}$$

□

Do Teorema 3.1, o estudo dos solitons do fluxo de curvatura no plano hiperbólico se reduz a descrever as curvas $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ regulares parametrizadas pelo comprimento de arco que satisfazem a equação (3.3) para algum vetor não nulo do espaço de Minkowski. Como as isometrias do plano hiperbólico satisfazendo $A_i = QM_iQ^{-1}$, com $i = 1, 2, 3$, implicam que a matriz A_i é semelhante à matriz M_i , podemos considerar, sem perda de generalidade, que $v = ae_i$, em que $a > 0$, $e_1 = (-1, 0, 0)$ se v é tipo tempo, $e_2 = (-1, 1, 0)$ se v é tipo luz e $e_3 = (0, 0, 1)$ se v é tipo espaço. Dessa forma, estudamos as curvas em \mathbb{H}^2 cuja curvatura geodésica satisfaz $k(s) = \langle T(s), ae_i \rangle$.

Proposição 3.2. Seja $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s . Considere os vetores

$$e_1 = (-1, 0, 0), \quad e_2 = (-1, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1). \quad (3.4)$$

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, defina as funções

$$\alpha_i(s) = \langle X(s), e_i \rangle, \quad \tau_i(s) = \langle T(s), e_i \rangle, \quad \eta_i(s) = \langle N(s), e_i \rangle,$$

em que T e N são os campos de vetores tangente e normal a X , respectivamente. Para $a > 0$ fixo, tem-se que a igualdade

$$k_i(s) = a\tau_i(s) \quad \forall s \in I$$

é válida se, e somente se, as funções $\alpha_i(s)$, $\tau_i(s)$ e $\eta_i(s)$ satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \alpha_i'(s) &= \tau_i(s), \\ \tau_i'(s) &= a\tau_i(s)\eta_i(s) + \alpha_i(s), \\ \eta_i'(s) &= -a\tau_i^2(s), \end{cases} \quad (3.5)$$

com condição inicial $(\alpha_i(0), \tau_i(0), \eta_i(0))$, tal que

$$-\alpha_i^2(0) + \tau_i^2(0) + \eta_i^2(0) = \begin{cases} -1, & \text{se } i = 1, \\ 0, & \text{se } i = 2, \\ 1, & \text{se } i = 3. \end{cases} \quad (3.6)$$

No caso afirmativo, $-\alpha_i^2(s) + \tau_i^2(s) + \eta_i^2(s)$ satisfaz (3.6) para todo $s \in I$, e $\eta_i(s)$ é uma função decrescente.

Demonstração. Sejam $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s , $T(s)$ e $N(s)$ seus campos de vetores tangente e normal, respectivamente, e $k(s)$ sua curvatura geodésica. O triedro $\{X(s), T(s), N(s)\}$ satisfaz as equações

$$\begin{cases} X'(s) &= T(s), \\ T'(s) &= k(s)N(s) + X(s), \\ N'(s) &= -k(s)T(s). \end{cases}$$

Tomando o produto interno das equações acima com e_i , obtemos

$$\begin{cases} \alpha'_i(s) &= \tau_i(s), \\ \tau'_i(s) &= k(s)\eta_i(s) + \alpha_i(s), \\ \eta'_i(s) &= -k(s)\tau_i(s), \end{cases} \quad (3.7)$$

para todo $s \in I$.

Se $k(s) = a\tau_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, com $a > 0$ fixo, obtemos (3.5). Além disso, observando-se que

$$e_i = -\alpha_i(s)X(s) + \tau_i(s)T(s) + \eta_i(s)N(s), \quad (3.8)$$

tem-se que $\langle e_i, e_i \rangle = -\alpha_i^2(s) + \tau_i^2(s) + \eta_i^2(s)$ é constante e igual ao lado direito de (3.6).

Reciprocamente, suponha que as funções $\alpha_i(s)$, $\tau_i(s)$ e $\eta_i(s)$ satisfazem as equações (3.5) e (3.6) para $i = 1, 2, 3$. Comparando (3.5) e (3.7), temos

$$\begin{cases} a\tau_i(s)\eta_i(s) + \alpha_i(s) &= k(s)\eta_i(s) + \alpha_i(s), \\ -a\tau_i^2(s) &= -k(s)\tau_i(s), \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} (a\tau_i(s) - k(s))\eta_i(s) &= 0, \\ (a\tau_i(s) - k(s))\tau_i(s) &= 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Observemos que, se $a\tau_i(s) - k(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, então $\tau_i(s) = 0$ e $\eta_i(s) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Assim, de (3.8), $e_i = -\alpha_i(s)X(s)$ e então

$$-\alpha_i^2(s) = \begin{cases} -1, & \text{se } i = 1, \\ 0, & \text{se } i = 2, \\ 1, & \text{se } i = 3. \end{cases} \quad (3.10)$$

As identidades (3.10) não ocorrem, caso contrário teríamos, se $i = 1$, $X(s) = \pm e_1$ implicando $T(s) = (0, 0, 0)$ ou se $i = 2$, $\alpha(s) = 0$ implicando $e_2 = (0, 0, 0)$ ou se $i = 3$, então $\alpha_3^2(s) = -1$. Portanto, $k(s) = a\tau_i(s)$ para todo $s \in I$ e $i = 1, 2, 3$. \square

Proposição 3.3. Dada uma solução $(\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ para o sistema (3.5) em algum intervalo I com $a > 0$ fixo e condições iniciais $(\alpha(0), \tau(0), \eta(0))$ satisfazendo $-\alpha^2(0) + \tau^2(0) + \eta^2(0) = -1$ (resp. $0, 1$), existe uma curva suave $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco s , tal que os campos de vetores tangente e normal T e N , de X ,

satisfazem:

$$\alpha(s) = \langle X(s), e \rangle, \quad \tau(s) = \langle T(s), e \rangle, \quad \eta(s) = \langle N(s), e \rangle, \quad (3.11)$$

em que $e = (-1, 0, 0)$ (resp. $e = (-1, 1, 0)$, $e = (0, 0, 1)$).

Demonstração. Defina a função $k(s) = a\tau(s)$. Considere as condições iniciais $X(0)$, $T(0)$ e $N(0)$, tais que

$$-\alpha(0)X(0) + \tau(0)T(0) + \eta(0)N(0) = e, \quad (3.12)$$

em que $e = (-1, 0, 0)$ (resp. $e = (-1, 1, 0)$, $e = (0, 0, 1)$). Pelo Teorema 2.2, existe, a menos de uma isometria de \mathbb{H}^2 , uma única curva $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura geodésica é $k(s)$. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(s) = -\alpha(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \eta(s)N(s). \quad (3.13)$$

Das equações de Darboux-Ribaucour para $\{X(s), T(s), N(s)\}$ e de (3.6), temos

$$\begin{aligned} f'(s) &= -\alpha'(s)X(s) - \alpha(s)X'(s) + \tau'(s)T(s) + \tau(s)T'(s) + \eta'(s)N(s) + \eta(s)N'(s) \\ &= -\alpha'(s)X(s) - \alpha(s)T(s) + \tau'(s)T(s) + k(s)\tau(s)N(s) + \tau(s)X(s) + \eta'(s)N(s) \\ &\quad - \eta(s)k(s)T(s) \\ &= (\tau(s) - \alpha'(s))X(s) + (\tau'(s) - k(s)\eta(s) - \alpha(s))T(s) + (\eta'(s) + k(s)\tau(s))N(s) \\ &= (\tau(s) - \alpha'(s))X(s) + (\tau'(s) - a\tau(s)\eta(s) - \alpha(s))T(s) + (\eta'(s) + a\tau^2(s))N(s) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Logo, f é uma função constante o que, juntamente com (3.12), implica que $f(s) = e$. As igualdades (3.11) seguem-se desse fato e da igualdade (3.13). \square

A Proposição 3.2 e as equações (3.6) sugerem introduzir os três seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} H &= \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3; -\alpha^2 + \tau^2 + \eta^2 = -1\}, \\ C &= \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3; -\alpha^2 + \tau^2 + \eta^2 = 0\}, \\ S &= \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3; -\alpha^2 + \tau^2 + \eta^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Sejam $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema (3.5) e $a > 0$ fixo. A Proposição 3.3 garante que existe uma curva $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $k(s) = a\langle T(s), e \rangle$ é a curvatura geodésica de X , em que $T(s)$ é o campo de vetores tangente a $X(s)$ e $e = (-1, 0, 0)$ se $\psi(0) \in H$, $e = (-1, 1, 0)$ se $\psi(0) \in C$, e

$e = (0, 0, 1)$ se $\psi(0) \in S$. Logo, pela segunda parte da Proposição 3.3,

$$-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = \delta, \quad \text{em que } \delta \in \{-1, 0, 1\}, \quad (3.14)$$

para todo $s \in I$, ou seja, $\psi(s)$ pertence a um, e somente um, dos conjuntos: H , C ou S .

No que segue, escreva $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$. Para $\psi(s) \in H$, obtemos

$$\alpha(s) = \langle (x_1(s), x_2(s), x_3(s)), (-1, 0, 0) \rangle = x_1(s).$$

Uma vez que $X(s) \in \mathbb{H}^2$ para todo $s \in I$, tem-se $x_1(s) > 0$, donde $\alpha(s) > 0$ para todo $s \in I$. Portanto, geometricamente, a função $\alpha(s)$ representa a altura euclidiana de $X(s)$ em relação ao vetor $(1, 0, 0)$.

Se $\psi(s) \in C$,

$$\alpha(s) = \langle (x_1(s), x_2(s), x_3(s)), (-1, 1, 0) \rangle = x_1(s) + x_2(s).$$

Como $X(s)$ é tipo tempo, segue que $x_1^2(s) > x_2^2(s) + x_3^2(s)$. Logo, $x_1(s) > |x_2(s)|$ e, por conseguinte, $x_1(s) + x_2(s) > 0$, ou seja, $\alpha(s) > 0$ para todo $s \in I$. Assim, a função $\frac{\alpha(s)}{\sqrt{2}}$ representa a altura euclidiana de $X(s)$ em relação ao vetor $(1, 1, 0)$. Observemos que $(0, 0, 0)$ satisfaz a equação (3.14), com $\delta = 0$, porém $\alpha(s) \neq 0$. Dessa forma, $(0, 0, 0) \notin C$.

Por fim, se $\psi(s) \in S$, então

$$\alpha(s) = \langle (x_1(s), x_2(s), x_3(s)), (0, 0, 1) \rangle = x_3(s).$$

Logo, a função $|\alpha(s)|$ representa a altura euclidiana de $X(s)$ em relação ao vetor $(0, 0, 1)$.

Da análise acima e das Proposições 3.2 e 3.3, concluímos que o estudo dos solitons do fluxo de curvatura no plano hiperbólico é equivalente ao estudo das soluções $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema

$$\begin{cases} \alpha'(s) = \tau(s) \\ \tau'(s) = a\tau(s)\eta(s) + \alpha(s) \\ \eta'(s) = -a\tau^2(s), \end{cases} \quad (3.15)$$

para cada constante $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C \cup S \subset \mathbb{R}_1^3$, em que

$$\begin{aligned} H &= \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3; -\alpha^2 + \tau^2 + \eta^2 = -1, \alpha > 0\}, \\ C &= \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; -\alpha^2 + \tau^2 + \eta^2 = 0, \alpha > 0\}, \\ S &= \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3; -\alpha^2 + \tau^2 + \eta^2 = 1\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

são conjuntos disjuntos e se a condição inicial $\psi(0) \in H$ (resp. C, S) então a solução $\psi(s)$ definida no intervalo máximo I está contida em H (resp. C, S) para todo $s \in I$.

Observação 3.1. Com as definições de H, C e S , analisemos alguns casos sobre as funções α, τ e η . Vejamos que se α é constante, então de (3.15), $\tau(s) = 0$ e assim $\alpha(s) = 0$. Logo $\psi(s) \in S$ e de (3.14), $\eta^2(s) = 1$ nos dá $\psi(s) = (0, 0, \pm 1)$ as únicas soluções singulares de (3.15) definidas em toda reta. Agora, se η é constante, novamente $\psi(s) = (0, 0, \pm 1)$. Neste caso, seja $X(s)$ um soliton correspondente a solução $\psi(s)$. Como $\alpha(s)$ representa a altura euclidiana do soliton X com respeito ao vetor $(0, 0, 1)$, segue que $X(s)$ é a interseção de \mathbb{H}^2 com o plano xy , isto é, $X(s) = (\cosh s, \sinh s, 0)$ e esta curva possui curvatura geodésica igual a zero (ver Capítulo 2).

Para o caso τ constante, temos o seguinte Lema.

Lema 3.4. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não nula de (3.15) definida no intervalo máximo $I = (\omega_-, \omega_+)$, com condição inicial $\psi(0) \in H \cup C \cup S$, em que H, C e S são dados em (3.16). Então $\tau(s) = b, s \in I$, em que b é uma constante real se, e somente se, $b \in \{-1, 0, 1\}, I = \mathbb{R}$ e $\psi(s) \in S$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso,

(i) Se $b = 0$, então $\psi(s) = (0, 0, \pm 1)$ são soluções singulares de (3.15) em S .

(ii) Se $b^2 = 1$, então $a = 1$ e $\psi(s) = (\pm s + \alpha(0), \pm 1, -s \pm \alpha(0))$.

Demonstração. Seja $\tau(s) = b$, em que b é uma constante. O sistema (3.15) se torna

$$\begin{cases} \alpha'(s) = b \\ \alpha(s) = -ab\eta(s) \\ \eta'(s) = -ab^2. \end{cases} \quad (3.17)$$

Da condição inicial $-\alpha^2(0) + \tau^2(0) + \eta^2(0) = \delta$, em que $\delta \in \{-1, 0, 1\}$, e da segunda equação em (3.17), segue que $-a^2b^2\eta^2(s) + b^2 + \eta^2(s) = \delta$. Logo,

$$\eta^2(s)(1 - a^2b^2) = \delta - b^2, \quad (3.18)$$

donde concluimos que $\eta^2(s)(1 - a^2b^2)$ é constante.

Se $1 - a^2b^2 \neq 0$, então η é constante e assim obtemos $\tau(s) = 0$ e $\alpha(s) = 0$. Consequentemente, $\eta(s) = \pm 1$. Além disso, $\psi(s) = (0, 0, \pm 1)$ são soluções singulares de (3.15) em S e definidas para todo $s \in \mathbb{R}$.

Se $1 - a^2b^2 = 0$ e η é não constante, então $ab = \pm 1$ e de (3.18) segue que $b^2 = \delta$. Neste caso, $\delta = 1$, ou seja, $b^2 = 1$. Assim, temos $a = 1$ e de (3.17), segue que $\alpha(s) = \mp \eta(s)$ e $\alpha(s) = \pm s + \alpha(0)$. Portanto, se $\tau(s) = \pm 1$, então $\psi(s) = (\pm s + \alpha(0), \pm 1, -s \mp \alpha(0))$ são soluções de (3.15) em S e definidas para todo $s \in \mathbb{R}$. \square

Observemos que, se $\tau(s)$ é constante, o Lema 3.4 garante que as soluções $\psi(s)$ para o sistema (3.15) pertencem a S . Além disso, $\tau \in \{-1, 0, 1\}$. Dessas conclusões, introduzimos a seguinte definição.

Definição 3.2. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução para o sistema (3.15) definida no intervalo máximo $I = (\omega_-, \omega_+)$ e $\psi(s) \in H \cup C \cup S$. Dizemos que ψ é uma *solução trivial*, se $\tau(s)$ é uma função constante.

Nos próximos resultados estudamos os pontos críticos da função τ e o comportamento das funções α e η nos extremos do intervalo máximo.

Lema 3.5. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução de (3.15) definida no intervalo máximo $I = (\omega_-, \omega_+)$ com condição inicial $\psi(0) \in H \cup C$, em que H e C são dados em (3.16).

- (i) Se s_0 é um ponto crítico de α , então s_0 é um ponto de mínimo global de α . Além disso, existe sempre $\bar{s} \in I$, tal que $\alpha(s)$ é estritamente monótona nos intervalos $(\omega_-, \bar{s}]$ e $[\bar{s}, \omega_+)$.
- (ii) Se s_0 é um ponto crítico de τ , então $a^2\tau^2(s_0) > 1$ e s_0 é um ponto de mínimo (resp. máximo) local de τ se, e somente se, $\tau(s_0) < 0$ (resp. $\tau(s_0) > 0$).

Demonstração. (i) Se $s_0 \in I$ é um ponto crítico de α , então $\tau(s_0) = \alpha'(s_0) = 0$. De (3.15),

$$\alpha''(s) = \tau'(s) = a\tau(s)\eta(s) + \alpha(s),$$

o que implica $\alpha''(s_0) = \alpha(s_0) > 0$. Logo, s_0 é ponto de mínimo global de α , pois se $\tilde{s} \in I$ é também um ponto crítico de α , então \tilde{s} é ponto de mínimo, assim existe um ponto de

máximo $s_1 \in (\tilde{s}, s_0) \subset I$. Mas, $\alpha''(s_1) = \alpha(s_1) > 0$ implica que s_1 é ponto de mínimo, o que é um absurdo. O caso é análogo para $\tilde{s} > s_0$. Portanto, α é estritamente decrescente no intervalo $(\omega_-, s_0]$ e estritamente crescente no intervalo $[s_0, \omega_+)$.

(ii) Se $s_0 \in I$ é um ponto crítico de τ , então $\tau'(s_0) = a\eta(s_0)\tau(s_0) + \alpha(s_0) = 0$. Como $\alpha(s) > 0$ para todo $s \in I$, segue que $a\eta(s_0)\tau(s_0) = -\alpha(s_0)$, isto é, $-\alpha^2(s_0) = -a^2\eta^2(s_0)\tau^2(s_0)$. Da condição inicial $\psi(0) \in H \cup C$, temos $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = \delta \leq 0$ para todo $s \in I$, em que $\delta \in \{0, -1\}$. Logo

$$0 \geq -a^2\eta^2(s_0)\tau^2(s_0) + \tau^2(s_0) + \eta^2(s_0) = \eta^2(s_0)[1 - a^2\tau^2(s_0)] + \tau^2(s_0).$$

Como $\eta^2(s_0)$ e $\tau^2(s_0)$ são positivos, segue que $a^2\tau^2(s_0) > 1$. Derivando a segunda equação de (3.15) e aplicando em s_0 , obtemos

$$\tau''(s_0) = a\tau'(s_0)\eta(s_0) + a\tau(s_0)\eta'(s_0) + \tau(s_0) = \tau(s_0)(1 - a^2\tau^2(s_0)),$$

donde concluímos que s_0 é ponto de mínimo (resp. máximo) local de τ se, e somente, se $\tau(s_0) < 0$ (resp. $\tau(s_0) > 0$). \square

De agora em diante, usaremos o seguinte resultado de equações diferenciais que no nosso contexto diz que, se $I = (\omega_-, \omega_+)$ é o intervalo máximo da solução $\psi(s)$ com condição inicial fixada e existe $p \in \mathbb{R}_1^3$ tal que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \psi(s) = p$, então $\omega_+ = +\infty$ e p é uma solução singular de (3.15). Vale um resultado análogo substituindo ω_+ por ω_- . A prova deste resultado pode ser vista em ([14], p.133).

Para o caso em que não existem pontos críticos para a função α , temos o seguinte resultado. Lembramos que não existem soluções singulares de (3.15) no conjunto C .

Lema 3.6. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução de (3.15) definida no intervalo máximo $I = (\omega_-, \omega_+)$ e condição inicial $\psi(0) \in C$, em que C é dado em (3.16).

(i) Se $\tau(s) > 0$ em I , então α é estritamente crescente em I , $\tau(s)$ é limitada e tem no máximo um ponto crítico em I . Além disso, $\omega_- = -\infty$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s) = (0, 0, 0)$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} -\eta(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$.

(ii) Se $\tau(s) < 0$ em I , então α é estritamente decrescente em I , $\tau(s)$ é limitada e tem no máximo um ponto crítico em I . Além disso, $\omega_+ = +\infty$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = (0, 0, 0)$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = +\infty$.

Demonstração. (i) Se $\tau(s) > 0$, segue da primeira equação em (3.15) que $\alpha'(s) > 0$ para todo $s \in I$, logo α é estritamente crescente em I . Afirmamos que α é ilimitada em I . Suponhamos que α é limitada em I . Segue da condição inicial $\alpha^2(s) = \tau^2(s) + \eta^2(s)$ que $\tau(s) \leq \alpha(s)$ e $|\eta(s)| \leq \alpha(s)$ para todo $s \in I$. Logo, as funções τ e η também são limitadas em I . Daí, $\omega_+ = +\infty$ e existe $p \in \mathbb{R}_1^3$ tal que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = p$ é solução singular de (3.15). Da igualdade $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = 0$, segue que $p \in C$, o que contradiz o Lema 3.4. Agora, vamos mostrar que τ é limitada. Suponhamos que τ é ilimitada em I . Nesse caso, existe $\bar{s} \in I$ tal que $a\tau(s) > 2$ para todo $s > \bar{s}$. Como $\tau(s) > 0$ em I , segue que $a\tau^2(s) > 2\tau(s)$ para $s > \bar{s}$. Usando (3.15),

$$2\alpha(s) - 2\alpha(\bar{s}) = \int_{\bar{s}}^s 2\tau(u) du < \int_{\bar{s}}^s a\tau^2(u) du = \eta(\bar{s}) - \eta(s).$$

Assim, $\alpha(s) < 2\alpha(\bar{s}) + \eta(\bar{s}) < 3\alpha(\bar{s})$ para $s > \bar{s}$. Isto significa que α é limitada, o que não ocorre. Logo, τ é limitada em I . Agora, note que, pelo Lema 3.5, se $s_0 \in I$ é ponto crítico de τ , então é um ponto de máximo local. Além disso, s_0 é único com essa característica. De fato, se existe $s_1 \in I$, com $s_1 > s_0$, que também é ponto de máximo de τ , então existiria $s_2 \in (s_0, s_1) \subset I$, tal que $\tau(s_2) < 0$, uma contradição. O caso é análogo se $s_1 < s_0$. Daí, concluímos que τ tem no máximo um ponto crítico em I .

Para completar a prova do item (i), notemos que dado $\bar{s} \in I$, α é limitada em (ω_-, \bar{s}) , pois $0 < \alpha(s) < \alpha(\bar{s})$ para todo $s \in (\omega_-, \bar{s})$ e como $\tau(s) \leq \alpha(s)$ e $|\eta(s)| \leq \alpha(s)$ para todo $s \in I$, τ e η também são limitadas em (ω_-, \bar{s}) . Daí, como $I = (\omega_-, \omega_+)$ é o intervalo máximo, $\omega_- = -\infty$. Agora, como α é estritamente crescente e positiva, segue que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \alpha(s) = 0$ e, pelo Teorema do Confronto ([9], p.198), $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s) = 0$. Assim, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s) = (0, 0, 0)$. Além disso, sendo η ser decrescente, temos que $\eta(s) < 0$ para todo $s \in I$.

Por fim, afirmamos que η é ilimitada em I . De fato, suponhamos que η seja limitada. Então, pela identidade $\alpha^2(s) = \tau^2(s) + \eta^2(s)$, τ é ilimitada, pois α é ilimitada, uma contradição. Portanto, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} -\eta(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$.

(ii) Se $\tau(s) < 0$, segue da primeira equação de (3.15) que $\alpha'(s) < 0$ para todo $s \in I$. Logo, α é estritamente decrescente em I . Vamos mostrar que α é ilimitada em I . Suponhamos que α é limitada em I , segue da condição inicial $\alpha^2(s) = \tau^2(s) + \eta^2(s)$ que $|\tau(s)| \leq \alpha(s)$ e $|\eta(s)| \leq \alpha(s)$ para todo $s \in I$, logo as funções τ e η também são limitadas

em I . Daí, $\omega_- = -\infty$ e existe $p \in \mathbb{R}_1^3$, tal que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = p$ é solução singular de (3.15). Da igualdade $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = 0$, segue que $p \in C$, o que contradiz o Lema 3.4. Agora, vejamos que τ é limitada. Com efeito, se τ é ilimitada em I , existe $\bar{s} \in I$ tal que $a\tau(s) < -2$ para todo $s < \bar{s}$. Como $\tau(s) < 0$ em I , segue que $a\tau^2(s) > -2\tau(s)$ para $s < \bar{s}$. Usando (3.15),

$$2\alpha(s) - 2\alpha(\bar{s}) = - \int_s^{\bar{s}} 2\tau(u) du < \int_s^{\bar{s}} a\tau^2(u) du = \eta(s) - \eta(\bar{s})$$

e obtemos, $\alpha(s) < 2\alpha(\bar{s}) - \eta(\bar{s}) < 3\alpha(\bar{s})$, para $s < \bar{s}$. Mas a última desigualdade não ocorre, pois α é ilimitada. Disso, concluímos que τ é limitada em I . A prova das últimas afirmações do item (ii) é análoga àquela do item (i). \square

O Lema a seguir garante que sempre existem pontos críticos para a função α no conjunto H . Contudo, não podemos garantir a existência de pontos críticos da função α nos conjuntos C e S , apesar da solução $\psi(s)$ ter o mesmo comportamento no conjunto em que existem pontos críticos.

Lema 3.7. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução de (3.15) definida no intervalo máximo $I = (\omega_-, \omega_+)$ e condição inicial $\psi(0) \in H$, em que H é dado em (3.16). Então :

- (i) Existe um único s_0 tal que $\alpha'(s_0) = \tau(s_0) = 0$.
- (ii) $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$.
- (iii) $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$.
- (iv) A função τ é limitada e possui dois pontos críticos.

Demonstração. (i) Suponhamos que não exista $s_0 \in I$, tal que $\tau(s_0) = 0$. Assim, $\tau(s) > 0$ ou $\tau(s) < 0$ para todo $s \in I$. Se $\tau(s) > 0$, então α é estritamente crescente. Para $\bar{s} \in I$ fixo, temos $\alpha(s) \leq \alpha(\bar{s})$ sempre que $s < \bar{s}$. De (3.14), obtemos

$$\tau^2(s) + \eta^2(s) = \alpha^2(s) - 1 < \alpha^2(s) \leq \alpha^2(\bar{s})$$

para todo $s < \bar{s}$. Dessa forma, as funções α e η são monótonas e limitadas em $(\omega_-, \bar{s}]$. Logo, existem os limites $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s)$, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s)$ e, conseqüentemente, existe o limite $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s)$. Assim, existe $p \in H$, tal que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \psi(s) = p$, $\omega_- = -\infty$ e p é uma solução singular de (3.15). Mas, pelo Lema 3.4, $p \in S$ e assim $p \in H \cap S$, o que é um absurdo.

Analogamente, se $\tau(s) < 0$, então α é estritamente decrescente. Para $\bar{s} \in I$ fixo, temos $\alpha(s) \leq \alpha(\bar{s})$ sempre que $s > \bar{s}$. De (3.14), obtemos

$$\tau^2(s) + \eta^2(s) = \alpha^2(s) - 1 < \alpha^2(s) \leq \alpha^2(\bar{s})$$

para todo $s > \bar{s}$. Dessa forma, as funções α e η são monótonas e limitadas em $[\bar{s}, \omega_+)$. Logo, existem os limites $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s)$, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s)$ e, conseqüentemente, existe o limite $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s)$. Assim, existe $p \in H$ tal que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \psi(s) = p$, $\omega_+ = +\infty$ e p é uma solução singular de (3.15). Mas, pelo Lema 3.4, $p \in S$ e assim $p \in H \cap S$, o que é um absurdo.

Portanto, existe $s_0 \in I$ tal que $\alpha'(s_0) = 0$. Pelo item (i) do Lema 3.5, s_0 é um ponto de mínimo global de α , e então é o único ponto crítico de α .

(ii) Se $s_0 \in I$ é o ponto de mínimo global de α , então α é monótona nos intervalos $(\omega_-, s_0]$ e $[s_0, \omega_+)$. Suponhamos que α seja limitada em $[s_0, \omega_+)$. Como $\tau^2(s) + \eta^2(s) = \alpha^2(s) - 1 \leq \alpha^2(s)$, segue que as funções α e η são monótonas e limitadas em $[s_0, \omega_+)$. Dessa forma, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s)$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s)$ existem e assim $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s)$ existe. Em vista disso, existe $p \in H$ tal que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \psi(s) = p$, $\omega_+ = +\infty$ e p é uma solução singular de (3.15), o que não pode ocorrer pelo Lema 3.4. Analogamente, mostra-se que α não é limitada em $(\omega_-, s_0]$. Portanto α é ilimitada em I e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$.

(iii) Seja $s_0 \in I$ o ponto de mínimo global de α . Temos $\tau(s) > 0$ para $s > s_0$ e $\tau(s) < 0$ para $s < s_0$. Suponhamos que a função η seja limitada em (s_0, ω_+) . Pelo item (ii) e de (3.14), segue que τ é uma função ilimitada e positiva. Logo, existe $s_1 \in (s_0, \omega_+)$, tal que $a\tau(s) > 1$. Então, $a\tau^2(s) > \tau(s)$ para $s > s_1$. De (3.15), temos

$$\alpha(s) - \alpha(s_1) = \int_{s_1}^s \tau(u) du < \int_{s_1}^s a\tau^2(u) du = \eta(s_1) - \eta(s).$$

Assim, $\alpha(s) < \eta(s_1) - \eta(s) + \alpha(s_1)$ para $s > s_1$, contradição pelo item (ii).

Agora, se η é limitada em $(\omega_-, s_0]$, então pelo item (ii) e (3.14), segue que τ é uma função ilimitada e negativa em $(\omega_-, s_0]$. Logo, existe $s_2 \in (\omega_-, s_0]$, tal que $a\tau(s) < -1$. Então, $-a\tau^2(s) < \tau(s)$ para todo $s < s_2$. Novamente, de (3.15),

$$\alpha(s) - \alpha(s_2) = - \int_s^{s_2} \tau(u) du < \int_s^{s_2} a\tau^2(u) du = \eta(s) - \eta(s_2),$$

ou seja, $\alpha(s) < \eta(s) - \eta(s_2) + \alpha(s_2)$ para $s < s_2$, o que contradiz o item (ii). Portanto, η

é ilimitada em I e então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$.

(iv) Notemos que se τ não possui ponto crítico em I , então $-1 < a\tau(s) < 0$ em (ω_-, s_0) e $0 < a\tau(s) < 1$ em (s_0, ω_+) . De fato, seja s_0 o ponto de mínimo global de α . Como $\tau(s_0) = 0$, segue de (3.15) que $\tau'(s_0) = \alpha(s_0) > 0$. Sendo $\tau'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, concluímos que $\tau'(s) = a\eta(s)\tau(s) + \alpha(s) > 0$. Logo, τ é uma função crescente em I , $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) \neq 0$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s) \neq 0$. Do item (iii), $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$ e assim existem $s_1 \in (\omega_-, s_0)$ e $s_2 \in (s_0, \omega_+)$ de modo que $\eta(s) > 0$ para $s < s_1$ e $\eta(s) < 0$ para $s > s_2$. Uma vez que τ é negativa em (ω_-, s_0) e positiva em (s_0, ω_+) , segue que $-\alpha(s) < a\eta(s)\tau(s) < 0$ para $s < s_1$ e $s > s_2$. Assim, $-\alpha^2(s) < -a^2\tau^2(s)\eta^2(s)$ em $I \setminus [s_1, s_2]$. Daí,

$$\delta = -\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) < -a^2\tau^2(s)\eta^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s),$$

equivalentemente,

$$a^2\tau^2(s)\eta^2(s) < -\delta + \tau^2(s) + \eta^2(s).$$

Portanto,

$$1 < -\frac{\delta}{a^2\tau^2(s)\eta^2(s)} + \frac{1}{a^2\eta^2(s)} + \frac{1}{a^2\tau^2(s)}. \quad (3.19)$$

Agora, como τ é crescente, temos que $\tau(s) < \tau(s_1) < 0$ para $s < s_1$ e $\tau(s) > \tau(s_2) > 0$ para $s > s_2$. Logo,

$$\frac{1}{\tau^2(s)} < \min \left\{ \frac{1}{\tau^2(s_1)}, \frac{1}{\tau^2(s_2)} \right\}, \quad \text{para } s \in I \setminus [s_1, s_2]$$

e daí, concluimos que a função $\frac{1}{\tau^2(s)}$ é monótona e limitada nos intervalos (ω_-, s_1) e (s_2, ω_+) . Visto que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) \neq 0$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s) \neq 0$, segue que

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} \frac{1}{a^2\tau^2(s)} \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \omega_+} \frac{1}{a\tau^2(s)}$$

existem. Usando (3.19), obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} \frac{1}{a^2\tau^2(s)} > 1 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \omega_+} \frac{1}{a^2\tau^2(s)} > 1,$$

ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} a^2 \tau^2(s) < 1 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \omega_+} a^2 \tau^2(s) < 1. \quad (3.20)$$

Do fato de τ ser crescente, $a^2 \tau^2(s) < 1$ para todo $s \in I$. Logo, $-1 < a\tau(s) < 0$ para $s \in (\omega_-, s_0)$ e $0 < a\tau(s) < 1$ para $s \in (s_0, \omega_+)$. O que prova a afirmação.

Suponhamos agora que τ não possui ponto crítico, e definamos as funções $f(s) = \alpha(s) + \eta(s)$ e $g(s) = \alpha(s) - \eta(s)$, que são positivas, pois $\alpha(s) > 0$ e $|\eta(s)| < \alpha(s)$. Derivando f e g , obtemos

$$\frac{d}{ds}(\alpha(s) \pm \eta(s)) = \tau(s) \pm a\tau^2(s) = \tau(s)(1 \pm a\tau(s)).$$

Ou seja, $f(s) = \tau(s)(1 - a\tau(s))$ e $g(s) = \tau(s)(1 + a\tau(s))$. Da afirmação anterior, segue que $1 - a\tau(s) > 0$ e $1 + a\tau(s) > 0$. Então, f e g são crescentes, se $\tau(s) > 0$, e decrescentes, se $\tau(s) < 0$ e

$$0 < f(s)g(s) = \alpha^2(s) - \eta^2(s) = \tau^2(s) - \delta < \frac{1}{a^2} - \delta$$

para todo $s \in I$, em que $\delta \in \{-1, 0\}$. Logo, as funções f e g são monótonas e limitadas no intervalos (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) . Desse modo, existem constantes positivas K_1 e K_2 , tais que

$$\begin{cases} \alpha(s) + \eta(s) \leq K_1 \\ \alpha(s) - \eta(s) \leq K_2 \end{cases}$$

para todo $s \in (\omega_-, s_0)$ e $s \in (s_0, \omega_+)$. Consequentemente, $2\alpha(s) \leq K_1 + K_2$ para todo $s \in (\omega_-, s_0)$ e $s \in (s_0, \omega_+)$. Isto mostra que τ possui pelo menos um ponto crítico em cada intervalo (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) . Do item (ii) do Lema 3.5, τ possui um ponto de mínimo global em (ω_-, s_0) e um ponto de máximo global em (s_0, ω_+) . Com isso, se s_1 e s_2 são os pontos de mínimo e máximo global de τ , respectivamente, então $\tau(s_1) \leq \tau(s) \leq \tau(s_2)$ para todo $s \in I$, isto é, a função τ é limitada. \square

Observação 3.2. No Lema 3.7, se substituirmos a hipótese $\psi(0) \in H$ por $\psi(0) \in C$, os itens (ii), (iii) e (iv) continuam verdadeiros desde que α possua um único ponto crítico.

Agora, analisamos o caso em que $\psi(s) \in S$.

Lema 3.8. Seja $\Phi : S \rightarrow T_q S \subset \mathbb{R}^3$ um campo de vetores diferenciáveis definido por

$$\Phi(\alpha, \tau, \eta) = (\tau, a\tau\eta + \alpha, -a\tau^2),$$

em que $T_q S$ denota o espaço tangente a S no ponto $q \in S$ e $a > 0$. Então, $p = (0, 0, 1)$ e $-p = (0, 0, -1)$ são pontos singulares de Φ e os autovalores de $d\Phi_p$ e $d\Phi_{-p}$ são dados, respectivamente, por

$$\lambda_p = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}, \quad \lambda_{-p} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Demonstração. Observemos que se $\Phi(\alpha, \tau, \eta) = 0$, então $\alpha(s) = \tau(s) = 0$ e $\eta(s) = \pm 1$, por (3.15). Logo, $\pm p = (0, 0, \pm 1)$ são os únicos pontos singulares de Φ . O plano tangente $T_{\pm p} S$ em cada ponto singular é o conjunto dos pontos $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3$ tais que $\langle w, \pm p \rangle = 0$, isto é, o conjunto dos pontos da forma $w = (x, y, 0)$. Assim, calculando a diferencial de Φ em $\pm p$, obtemos

$$(d\Phi_{\pm p}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \pm a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por definição, λ é um autovalor de $d\Phi_{\pm p}$ se existe um vetor $w \in T_{\pm p} S$ com $w \neq 0$, tal que $d\Phi_{\pm p}(w) = \lambda w$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \pm a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então, $y = \lambda x$ e $x \pm ay = \lambda y$. Isto implica que λ é solução da equação $\lambda^2 \mp a\lambda - 1 = 0$.

Portanto,

$$\lambda_p = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_{-p} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

□

Na observação 3.1, vimos que os pontos $p = (0, 0, 1)$ e $-p = (0, 0, -1)$ geram o mesmo soliton para o fluxo de curvatura, $X(s) = (\cosh s, \sinh s, 0)$. Assim, para estudar o comportamento das soluções não triviais do sistema (3.15) consideremos $p = (0, 0, 1)$ como único ponto singular e $\psi(s, q)$ uma solução do sistema com condição inicial $q \in S$. Como os autovalores de $d\Phi_p$ são não nulos, segue que p é um ponto singular hiperbólico de Φ . Pelo Teorema de Hartman-Grobman ([13], p.107) os campos Φ e $d\Phi_p$ são topologicamente conjugados (localmente). Uma vez que os autovalores de $d\Phi_p$ têm sinais opostos, existem

condições iniciais $q_1 \in S \setminus \{p\}$ e $q_2 \in S \setminus \{p\}$ tais que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s, q_1) = p$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s, q_2) = p$. Definimos, então, os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} W^u(p) &= \{q \in S; \lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s, q) = p\}, \\ W^s(p) &= \{q \in S; \lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s, q) = p\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Lema 3.9. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial de (3.15) definida no intervalo máximo $I = (\omega_-, \omega_+)$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, em que S é dado em (3.16). Se $s_0 \in I$ é um ponto crítico de α , então s_0 é o mínimo (resp. máximo) global de α se, e somente se, $\alpha(s_0) > 0$ (resp. $\alpha(s_0) < 0$). Além disso, existe sempre $\bar{s} \in I$ tal que a função α é monótona nos intervalos (ω_-, \bar{s}) e (\bar{s}, ω_+) .

Demonstração. Seja s_0 um ponto crítico de α . Então, de (3.15), segue que

$$\tau'(s_0) = \alpha(s_0). \tag{3.22}$$

Notemos que se \tilde{s} é ponto crítico de α , então $\alpha(\tilde{s}) \neq 0$, pois, se $\alpha(\tilde{s}) = 0$, obtemos de (3.14) $\eta(\tilde{s}) = \pm 1$ e assim $\psi(s)$ é uma solução trivial de (3.15). Dessa forma, $\alpha(s_0) > 0$ ou $\alpha(s_0) < 0$.

Se $\alpha(s_0) > 0$, de (3.22) segue-se que s_0 é um ponto de mínimo local de α . Para mostrar que s_0 é o ponto de mínimo global de α é suficiente provar que $\alpha(s_0) \leq \alpha(s)$ para todo $s \in I$. Para isso, suponhamos que exista $s_1 < s_0$ tal que $\alpha(s_1) < \alpha(s_0)$. Como s_0 é ponto de mínimo local, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que α é monótona decrescente no intervalo $(s_0 - \varepsilon_1, s_0)$. Existe também $\varepsilon_2 > 0$ de modo que α é monótona crescente no intervalo $(s_1, s_1 + \varepsilon_2)$, pois $\alpha(s_1) < \alpha(s_0)$. Nessas condições, existe um ponto de máximo local de α , $\bar{s} \in (s_1, s_0)$, mas como $\alpha(\bar{s}) > \alpha(s_0) > 0$, segue de (3.22) que \bar{s} é um ponto de mínimo local, um absurdo. Analogamente, se $s_2 > s_0$ é tal que $\alpha(s_2) < \alpha(s_0)$, então existem ε_1 e ε_2 positivos, tais que α é crescente no intervalo $(s_0, s_0 + \varepsilon_1)$ e decrescente no intervalo $(s_2 - \varepsilon_2, s_2)$. Logo, existe um ponto de máximo local de α , $\tilde{s} \in (s_0, s_2)$. Entretanto, $\alpha(\tilde{s}) > \alpha(s_0) > 0$ e (3.22) implicam que \tilde{s} é um ponto de mínimo local de α . Decorre daí que $\alpha(s_0) \leq \alpha(s)$ para todo $s \in I$ e, portanto, s_0 é o ponto de mínimo global de α . Além disso, α é uma função positiva.

Se $\alpha(s_0) < 0$, de modo análogo ao caso anterior, concluímos que s_0 é o ponto de máximo global de α . Além disso, α é uma função negativa.

Por fim, notemos que se α não possui pontos críticos, então $\alpha'(s) > 0$ ou $\alpha'(s) < 0$. Dessa forma, α é monótona em I . Caso contrário, α possui um único ponto crítico \bar{s} que é de máximo ou de mínimo global e, portanto, α é monótona em (ω_-, \bar{s}) e (\bar{s}, ω_+) . \square

Lema 3.10. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial de (3.15) definida no intervalo máximo $I = (\omega_-, \omega_+)$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, em que S é dado em (3.16). Considere $W^u(p)$ e $W^s(p)$ dados por (3.21). Se $\psi(0) \in S \setminus W^u(p)$ (resp. $S \setminus W^s(p)$), então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$ (resp. $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\alpha(s)| = +\infty$).

Demonstração. Do Lema 3.9, existe \bar{s} tal que α é monótona nos intervalos (ω_-, \bar{s}) e (\bar{s}, ω_+) . Se $\psi(0) \in S \setminus W^u(p)$ e α é limitada em (ω_-, \bar{s}) , segue de $\tau^2(s) + \eta^2(s) = \alpha^2(s) + 1$ que as funções η e α são monótonas e limitadas em (ω_-, \bar{s}) . Logo, existem os limites $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s)$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s)$. Em particular, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s)$ existe. Portanto, existe $q \in \mathbb{R}_1^3$ tal que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \psi(s) = q$, $\omega_- = -\infty$ e q é solução singular de (3.15), contradizendo a hipótese. Daí, concluímos que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$.

Analogamente, se $\psi(0) \in S \setminus W^s(p)$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\alpha(s)| = +\infty$. \square

Lema 3.11. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial de (3.15) definida no intervalo máximo $I = (\omega_-, \omega_+)$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, em que S é dado em (3.16).

- (i) Se s_0 é um ponto crítico de $\tau(s)$, então $\tau^2(s_0) \neq 1$, $a^2\tau^2(s_0) \neq 1$ e $\tau(s_0) \neq 0$. Se $\tau(s_0) > 0$, então s_0 é um ponto de mínimo (resp. máximo) de $\tau(s)$ se, e somente se, $0 < a\tau(s_0) < 1$ (resp. $a\tau(s_0) > 1$). Se $\tau(s_0) < 0$, então s_0 é um ponto de mínimo (resp. máximo) local de τ se, e somente se, $a\tau(s_0) < -1$ (resp. $-1 < a\tau(s_0) < 0$).

- (ii) A função τ é limitada em I .

Demonstração. (i) Seja s_0 um ponto crítico de τ . Se $\tau^2(s_0) = 1$, então de (3.14) segue que $\alpha^2(s_0) = \eta^2(s_0)$. Como $\tau'(s_0) = 0$ e $\tau(s_0) = \pm 1$, temos de (3.15) que $\pm a\eta(s) = -\alpha(s_0)$ e, portanto, $a = 1$, o que contradiz o Lema 3.4.

Se $a^2\tau^2(s_0) \neq 1$, então $a\tau(s_0) = \pm 1$. De (3.15), segue que $0 = \tau'(s_0) = \pm\eta(s_0) + \alpha(s_0)$. De (3.14), segue que $\tau^2(s_0) = 1$, o que contradiz a conclusão anterior.

Agora, se $\tau(s_0) = 0$, então $0 = \tau'(s_0) = \alpha(s_0)$ e conseqüentemente $\eta(s_0) = \pm 1$, o que contradiz o fato de $\psi(s)$ ser solução não trivial de (3.15).

Notemos que

$$\begin{aligned}
\tau''(s_0) &= a\eta'(s_0)\tau(s_0) + a\eta(s_0)\tau'(s_0) + \tau(s_0) \\
&= -a\tau^3(s_0) + \tau(s_0) \\
&= \tau(s_0)(1 - a^2\tau^2(s_0)) \\
&= \tau(s_0)(1 - a\tau(s_0))(1 + a\tau(s_0)).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Se $\tau(s_0) > 0$, então $1 + a\tau(s_0) > 0$, e de (3.23) s_0 , é ponto de mínimo (*resp.* *máximo*) local se, e somente se, $0 < a\tau(s_0) < 1$ (*resp.* $a\tau(s_0) > 1$). Se $\tau(s_0) < 0$, então $1 - a\tau(s_0) > 0$, e de (3.23), s_0 é ponto de mínimo (*resp.* *máximo*) local de τ se, e somente se, $a\tau(s_0) < -1$ (*resp.* $-1 < a\tau(s_0) < 0$).

(ii) Do Lema 3.9, existe $\bar{s} \in I$, de modo que α é monótona nos intervalos (ω_-, \bar{s}) e (\bar{s}, ω_+) . Se $\psi(0) \in W^s(p)$ (*resp.* $\psi(0) \in W^u(p)$), então $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ (*resp.* $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$). Logo, τ é limitada em (\bar{s}, ω_+) (*resp.* (ω_-, \bar{s})).

Agora, seja $\psi(0) \in W^s(p) \cup W^u(p)$. A seguir, analisamos as condições em cada intervalo, notando que o Lema 3.9 garante que $\tau(s) > 0$ ou $\tau(s) < 0$ em cada um dos intervalos.

Caso 1: Suponhamos que τ é ilimitada em (\bar{s}, ω_+) . Então, existe $s_1 \in (\bar{s}, \omega_+)$ tal que $|\tau(s)| > 1$ e $a|\tau(s)| > 2$ para todo $s > s_1$. Como $\alpha^2(s) - \eta^2(s) = \tau^2(s) - 1$, temos $|\alpha(s)| > |\eta(s)|$ e $a\tau^2(s) > 2|\tau(s)|$ para $s > s_1$.

Se $\tau(s) > 0$ em (\bar{s}, ω_+) , então α é crescente e, do Lema 3.10, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$. Logo, podemos tomar \bar{s} de modo que $\alpha(s) > 0$ para $s > \bar{s}$. Da desigualdade $|\eta(s)| < \alpha(s)$, obtemos $\alpha(s) + \eta(s) > 0$ e, de (3.15), temos

$$2\alpha(s) - 2\alpha(s_1) = \int_{s_1}^s 2\tau(u) du < \int_{s_1}^s a\tau^2(u) du = \eta(s_1) - \eta(s),$$

isto é,

$$0 < \alpha(s) + \eta(s) < \eta(s_1) + 2\alpha(s_1) - \alpha(s).$$

Daí, concluimos que $\alpha(s) < \eta(s_1) + 2\alpha(s_1)$ para todo $s > s_1$, o que contradiz o fato de que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$.

Se $\tau(s) < 0$ em (\bar{s}, ω_+) , então α é decrescente e, do Lema 3.10, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = -\infty$. Logo, podemos tomar \bar{s} de modo que $\alpha(s) < 0$ para $s > \bar{s}$. Da desigualdade $|\eta(s)| < -\alpha(s)$,

obtemos $\alpha(s) - \eta(s) < 0$ e, de (3.15), temos

$$2\alpha(s_1) - 2\alpha(s) = - \int_{s_1}^s 2\tau(u) du < \int_{s_1}^s a\tau^2(u) du = \eta(s_1) - \eta(s),$$

isto é,

$$2\alpha(s_1) - \alpha(s) - \eta(s_1) < \alpha(s) - \eta(s) < 0.$$

Daí, concluimos que $\alpha(s) > 2\alpha(s_1) - \eta(s_1)$ para todo $s > s_1$, o que contradiz o fato de que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = -\infty$. Portanto, τ é limitada em (\bar{s}, ω_+) .

Caso 2: Suponhamos que τ é ilimitada em (ω_-, \bar{s}) . Então existe $s_2 \in (\omega_-, \bar{s})$ tal que $|\tau(s)| > 1$ e $a|\tau(s)| > 2$ para todo $s < s_2$. Como $\alpha^2(s) - \eta^2(s) = \tau^2(s) - 1$, temos $|\alpha(s)| > |\eta(s)|$ e $a\tau^2(s) > 2|\tau(s)|$ para $s < s_2$.

Se $\tau(s) > 0$ em (ω_-, \bar{s}) , então α é crescente e, do Lema 3.10, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$. Logo, podemos tomar \bar{s} de modo que $\alpha(s) < 0$ para $s < \bar{s}$. Da desigualdade $|\eta(s)| < -\alpha(s)$, obtemos $\eta(s) + \alpha(s) < 0$ e, de (3.15), temos

$$2\alpha(s_2) - 2\alpha(s) = \int_s^{s_2} 2\tau(u) du < \int_s^{s_2} a\tau^2(u) du = \eta(s) - \eta(s_2),$$

isto é,

$$2\alpha(s_2) + \eta(s_2) - \alpha(s) < \eta(s) + \alpha(s) < 0. \quad (3.24)$$

Daí, concluimos que $\alpha(s) > 2\alpha(s_2) + \eta(s_2)$ para todo $s < s_2$, o que contradiz o fato de que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$.

Se $\tau(s) < 0$ em (ω_-, \bar{s}) , então α é decrescente e, do Lema 3.10, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = +\infty$. Logo, podemos tomar \bar{s} de modo que $\alpha(s) > 0$ para $s < \bar{s}$. Da desigualdade $|\eta(s)| < \alpha(s)$, obtemos $\alpha(s) + \eta(s) > 0$ e, de (3.15), temos

$$2\alpha(s) - 2\alpha(s_2) = - \int_s^{s_2} 2\tau(u) du < \int_s^{s_2} a\tau^2(u) du = \eta(s) - \eta(s_2),$$

isto é,

$$0 < \alpha(s) + \eta(s) < 2\alpha(s_2) - \eta(s_2) - \alpha(s).$$

Daí, concluimos que $\alpha(s) < 2\alpha(s_2) - \eta(s_2)$ para todo $s < s_2$, o que contradiz o fato de que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = +\infty$. Portanto, τ é limitada em (ω_-, \bar{s}) . \square

Lema 3.12. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial de (3.15) definida no intervalo máximo $I = (\omega_-, \omega_+)$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, em que S é dado em (3.16). Considere $W^u(p)$ e $W^s(p)$ dados por (3.21). Se $\psi(0) \in S \setminus W^u(p)$ (resp. $S \setminus W^s(p)$), então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$ (resp. $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$).

Demonstração. Dos Lemas 3.10 e 3.11 e de $\tau^2(s) + \eta^2(s) = \alpha^2(s) + 1$, segue que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$ se $\psi(0) \in S \setminus W^u(p)$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$ se $\psi(0) \in S \setminus W^s(p)$, pois η é monótona decrescente. \square

Corolário 3.13. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial de (3.15) definida no intervalo máximo $I = (\omega_-, \omega_+)$ e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C \cup S$, em que H , C e S são dados em (3.16). Então, $I = \mathbb{R}$.

Demonstração. Do item (iv) do Lema 3.7, τ é limitada em I , e então existe uma constante positiva $M \in \mathbb{R}$, tal que $|\tau(s)| \leq M$ para todo $s \in I$. De (3.15),

$$|\alpha(s) - \alpha(s_0)| = \left| \int_{s_0}^s \tau(u) du \right| \leq M|s - s_0|. \quad (3.25)$$

Analisamos, a seguir dois casos:

Caso 1: $\psi(0) \in H \cup C$.

Se α possui pontos críticos, então, do Lema 3.7, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$. Logo, de (3.25) segue que $\omega_- = -\infty$ e $\omega_+ = +\infty$. Se α não possui pontos críticos, então $\tau(s) > 0$ ou $\tau(s) < 0$ para todo $s \in I$. Supondo que $\tau(s) > 0$, do Lema 3.6, temos $\omega_- = -\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$. Segue de (3.25) que $\omega_+ = +\infty$. Por fim, se $\tau(s) < 0$, do Lema 3.6, temos $\omega_+ = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = +\infty$. Segue de (3.25) que $\omega_- = -\infty$. Portanto, $I = \mathbb{R}$.

Caso 2: $\psi(0) \in S$.

Vejam que se $\psi(0) \in S \setminus W^s(p)$ (resp. $\psi(0) \in S \setminus W^u(p)$), o Lema 3.10 garante que α é ilimitada. Então, de (3.25), obtemos $\omega_+ = +\infty$ (resp. $\omega_- = -\infty$).

Agora, suponhamos que $\psi(0) \in W^s(p)$ (resp. $\psi(0) \in W^u(p)$). Então, por definição, $\omega_+ = +\infty$ (resp. $\omega_- = -\infty$), concluindo o resultado. \square

Lema 3.14. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial de (3.15) e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C \cup S$, em que H , C e S são dados em (3.16). Seja $X(s)$ o soliton correspondente à solução $\psi(s)$ para o fluxo de curvatura em \mathbb{H}^2 . Então, $\psi(s)$ e $X(s)$ são definidos para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, em cada fim a curvatura $k(s)$ de X converge para δ , em que $\delta \in \{-1, 0, 1\}$.

Demonstração. Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial de (3.15) e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C \cup S$. Se X é o soliton correspondente a ψ , então a curvatura geodésica de X é dada por $k(s) = a\tau(s)$. Do Lema 3.13, ψ está definida para todo $s \in \mathbb{R}$, assim como o soliton X .

Para provar que $k(s)$ converge para δ , vamos dividir a demonstração em dois casos. Inicialmente, vamos mostrar que existem $\lim_{s \rightarrow -\infty} k(s)$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s)$. Em seguida calculamos seus valores.

Caso 1: $\psi(0) \in H \cup C$.

Se α não possui pontos críticos, então $\tau(s) > 0$ ou $\tau(s) < 0$. Em cada caso, do Lema 3.6, τ é limitada e possui no máximo um ponto crítico em $s_0 \in I$, logo τ é monótona limitada nos intervalos (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) . Se α possui ponto crítico, então, pelo Lema 3.7, a função τ é limitada e possui dois pontos críticos $s_1, s_2 \in I$, com $s_1 < s_2$. Logo, τ é monótona limitada nos intervalos (ω_-, s_1) e (s_2, ω_+) . Portanto, existem $\lim_{s \rightarrow -\infty} k(s)$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s)$.

Caso 2: $\psi(0) \in S$.

Suponhamos que $\psi(0) \in S \setminus W^s(p)$. Se existe $s_1 \in I$ tal que τ é monótona em $(s_1, +\infty)$, então existe $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s)$, pois do Lema 3.11, a função τ é limitada. Do contrário, se τ não é monótona em nenhum intervalo do tipo $(s_1, +\infty)$, então τ possui infinitos pontos críticos. Do item (i) do Lema 3.11, a função τ não possui pontos críticos degenerados (isto é, pontos críticos tais que a segunda derivada é nula). Logo, τ possui uma quantidade enumerável de pontos críticos, pois τ é suave ([9], p.294). Seja $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de pontos críticos de τ . Notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, pois se existe $\bar{s} < \infty$ tal que (s_n) converge para \bar{s} , então τ seria monótona no intervalo $(\bar{s}, +\infty)$. De (3.15), temos $0 = \tau'(s_n) = a\eta(s_n)\tau(s_n) + \alpha(s_n)$ e então $-\alpha^2(s_n) = -a^2\eta^2(s_n)\tau^2(s_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De (3.14), obtemos

$$\tau^2(s_n) = \frac{1 - \eta^2(s_n)}{1 - a\eta^2(s_n)}.$$

Pelo Lema 3.12, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = -\infty$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} a\tau(s_n) = \pm 1$. Para concluir a existência do limite, consideremos uma sequência $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que a sequência dos pontos críticos satisfaz $|a\tau(s_n) - 1| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Sejam s_{n_1} um ponto de mínimo e s_{n_2} um ponto de máximo de τ , com $n_1 > n_0$ e $n_2 > n_0$, e tais que $\tau(s_{n_1}) \leq \tau(s) \leq \tau(s_{n_2})$ para todo $s > s_{n_0}$. Assim,

existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\tau(s_{n_1}) \leq \tau(s_m) \leq \tau(s_{n_2})$ para todo $m > m_0$. Consequentemente, $|a\tau(s_m) - 1| \leq |a\tau(s_n) - 1| < \varepsilon$ para $m > m_0$, donde se conclui que $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s)$ existe. De forma análoga mostra-se que $\lim_{s \rightarrow -\infty} k(s)$ existe. Observemos que, se $\psi(0) \in W^s(p)$ (resp. $\psi(0) \in W^u(p)$), então $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ (resp. $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$) por definição de $W^s(p)$. Logo, $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0$ (resp. $\lim_{s \rightarrow -\infty} k(s) = 0$).

Agora, suponhamos que $\psi(0) \notin W^s(p) \cup W^u(p)$. Dos Lemas 3.7 e 3.10, $\lim_{s \rightarrow \infty} |\alpha(s)| = +\infty$ e de $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = \delta$, $\delta \in \{-1, 0, 1\}$. Logo,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\eta^2(s)}{\alpha^2(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{\delta - \tau^2(s)}{\alpha^2(s)} + 1 \right) = 1. \quad (3.26)$$

Dos Lemas 3.7 e 3.12, $\lim_{s \rightarrow \infty} \eta^2(s) = \infty$. Usando a regra de L'Hôpital,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} -\frac{\eta(s)}{\alpha(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} -\frac{\eta'(s)}{\alpha'(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a\tau^2(s)}{\tau(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} a\tau(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} k(s). \quad (3.27)$$

De (3.26) e (3.27), obtemos $\lim_{s \rightarrow \infty} k(s) = \pm 1$. \square

Com os resultados anteriores em mente, podemos agora demonstrar o segundo resultado principal dessa dissertação.

Teorema 3.15. *Para cada $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$, existe uma família a 2-parâmetros de solitons não-triviais para o fluxo de curvatura no plano hiperbólico. Cada soliton é uma curva mergulhada $X(s)$ em \mathbb{H}^2 , definida para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, em cada fim, a função curvatura $k(s)$ tende para uma das seguintes constantes: -1 , 0 ou 1 .*

Demonstração. Para cada vetor $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$, consideremos, sem perda de generalidade, $v = ae$, em que $a > 0$, e

$$e = \begin{cases} (-1, 0, 0) & \text{se } v \text{ é tipo tempo,} \\ (-1, 1, 0) & \text{se } v \text{ é tipo luz,} \\ (0, 0, 1) & \text{se } v \text{ é tipo espaço.} \end{cases}$$

Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução de (3.15) definida no intervalo máximo $I =$

(ω_-, ω_+) e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C \cup S$ satisfazendo

$$-\alpha^2(0) + \tau^2(0) + \eta^2(0) = \begin{cases} -1, & \text{se } v \text{ é tipo tempo,} \\ 0, & \text{se } v \text{ é tipo luz,} \\ 1, & \text{se } v \text{ é tipo espaço.} \end{cases} \quad (3.28)$$

A Proposição 3.3 garante que existe um soliton $X(s)$ para o fluxo de curvatura, tal que $k(s) = a\tau(s)$, e os campos de vetores tangente e normal de X satisfazem as relações $\alpha(s) = \langle X(s), e \rangle$, $\tau(s) = \langle T(s), e \rangle$ e $\eta(s) = \langle N(s), e \rangle$. Logo, para $a > 0$, as condições iniciais de (3.15) determinam o soliton em cada caso. Daí, para cada vetor fixo $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$, existe uma família a 2-parâmetros de solitons não-triviais para o fluxo de curvatura em \mathbb{H}^2 . Além disso, segue do Corolário 3.13 que cada soliton é definido para todo $s \in \mathbb{R}$, e do Lema 3.14 que a curvatura geodésica de X , em cada fim, converge para uma das constantes: -1 , 0 ou 1 .

Agora, vamos mostrar que os solitons são mergulhados em \mathbb{H}^2 . Primeiramente, observemos que, dos Lemas 3.5 e 3.9, sempre existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que α é monótona nos intervalos $(-\infty, s_0)$ e $(s_0, +\infty)$. Como α descreve a altura euclidiana de X em relação a um plano fixo, temos que X não possui auto-interseção em cada um dos intervalos $(-\infty, s_0)$ e $(s_0, +\infty)$. Dessa forma, X é um mergulho, se α é uma função monótona em \mathbb{R} .

Verifiquemos, agora, o caso em que α não é monótona. Para tanto, suponhamos que existem $s_1 \neq s_2$ com $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ e $s_1 < s_0 < s_2$ tais que $X(s_1) = X(s_2)$. Consideramos R a região simples limitada por $X([s_1, s_2])$, e θ o ângulo externo entre os vetores tangentes $T(s_1)$ e $T(s_2)$, tal que $0 < \theta \leq \pi$. Usando o Teorema de Gauss-Bonnet para o plano hiperbólico, obtemos

$$\int_R K d\sigma + \int_{X([s_1, s_2])} k(s) ds + \theta = 2\pi\chi(R),$$

em que K é a curvatura seccional de \mathbb{H}^2 e $\chi(R)$ é a característica de Euler de R . Como

R é uma região simples, temos $\chi(R) = 1$. Então,

$$\begin{aligned}
0 < 2\pi - \theta &= \int_R K d\sigma + \int_{X([s_1, s_2])} k(s) ds \\
&= - \int_R d\sigma + \int_{X([s_1, s_2])} a\tau(s) ds \\
&= - \int_R d\sigma + a[\alpha(s_2) - \alpha(s_1)] \\
&= - \int_R d\sigma < 0,
\end{aligned}$$

o que é absurdo. Logo, o soliton X não possui auto-interseções. Uma vez que os dois fins das curvas são ilimitados, pelos Lemas 3.6 e 3.7, segue-se que X é um mergulho de \mathbb{R} em \mathbb{H}^2 . □

Referências Bibliográficas

- [1] COUTO, I. T.; LYMBEROPOULOS, A. *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*, Coleção Textos Universitários. Rio de Janeiro: SBM, 2018.
- [2] DA SILVA, F. N.; TENENBLAT, K. *Soliton solutions to the curve shortening flow on the 2-dimensional hyperbolic space*. Rev. Mat. Iberoam. (2022), published online first.
- [3] DOS REIS, H. F. S.; TENENBLAT, K. *Soliton solutions to the curve shortening flow on the sphere*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 147, 4955-4967 (2019).
- [4] GAGE, M. E. *Curve shortening makes convex curves circular*. Invent. Math., 76(2):357–364, 1984.
- [5] GAGE, M. E.; HAMILTON, R. S. *The heat equation shrinking convex plane curves*. J. Differential Geom., 23(1):69–96, 1986.
- [6] GRAYSON, M. A. *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*. J. Differential Geom., 26(2):285–314, 1987.
- [7] HALLDORSSON, H. P. *Self-similar solutions to the curve shortening flow*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 364, n. 10, p. 5285–5309 (2012).
- [8] HALLDORSSON, H. P. *Self-similar solutions to the curve shortening flow in the Minkowski plane $\mathbb{R}^{1,1}$* , J. Reine Angew. Math. 704 (2015), 209-243. MR 3365779.
- [9] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [10] LOPEZ, R. *Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space*. International Electronic Journal of Geometry, v. 7, n. 1, p. 44-107 (2014).

- [11] LYMBEROPOULOS, A. *Hipersuperfícies regradas e de Weingarten no Espaço Hiperbólico*, Tese de Doutorado, São Paulo: USP, 2009.
- [12] RATCLIFFE, J. G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. 2. ed. New York: Springer, 2006.
- [13] SOTOMAYOR, J. *Equações Diferenciais Ordinárias*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- [14] VIANA, M.; ESPINAR, J. *Equações Diferenciais: uma abordagem de sistemas dinâmicos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.