

Universidade Federal do Amazonas  
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla  
UFPA-UFAM

*Medidas espectrais com singularidades em dinâmica quântica e  
unitária*

Edson Lopes de Souza

Manaus - AM  
Março/2023

*Medidas espectrais com singularidades em dinâmica quântica e  
unitária*

por  
Edson Lopes de Souza

sob orientação do  
Prof. Dr. Moacir Aloisio

e sob coorientação do  
Prof. Dr. César R. de Oliveira

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em  
Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM,  
como requisito parcial para obtenção do grau de  
Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Manaus - AM  
Março/2023

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S729m Souza, Edson Lopes de  
Medidas espectrais com singularidades em dinâmica quântica e unitária / Edson Lopes de Souza . 2023  
53 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Moacir Aloisio Nascimento dos Santos  
Coorientador: César Rogério de Oliveira  
Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. equação de Schrödinger. 2. medidas espectrais. 3. teorema ergódico de von Neumann. 4. dinâmica quântica. 5. dinâmica unitária. I. Santos, Moacir Aloisio Nascimento dos. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título



Ministério da Educação  
Universidade Federal do Amazonas  
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática

## FOLHA DE APROVAÇÃO

### "MEDIDAS ESPECTRAIS COM SINGULARIDADES EM DINÂMICA QUÂNTICA E UNITÁRIA"

**EDSON LOPES DE SOUZA**

Tese de Doutorado defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Professores:

Prof. Dr. Moacir Aloísio Nascimento dos Santos - UFVJM - Presidente

Profª. Drª. Alessandra Aparecida Verri - UFSCar - Membro Externo

Prof. Dr. Carlos Felipe Lardizabal Rodrigues - UFRS - Membro Externo

Prof. Dr. Luiz Gustavo Farah - UFMG - Membro Externo

Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho - UFMG - Membro Externo

Manaus, 09 de Março de 2023



Documento assinado eletronicamente por **CARLOS FELIPE LARDIZABAL RODRIGUES, Usuário Externo**, em 14/03/2023, às 07:21, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Silas Luiz de Carvalho, Usuário Externo**, em 14/03/2023, às 07:59, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Moacir Aloisio Nascimento dos Santos, Professor do Magistério Superior**, em 14/03/2023, às 08:33, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luiz Gustavo Farah Dias, Usuário Externo**, em 14/03/2023, às 09:43, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alessandra Aparecida Verri, Usuário Externo**, em 15/03/2023, às 07:18, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1405653** e o código CRC **F0256E4D**.

---

Av. General Rodrigo Octávio, 6200 - Bairro Coroado 1 Campus Universitário Senador Arthur Virgílio Filho,  
Setor Norte - Telefone: (92) (92) 3305-1181 / Ramal 2405  
CEP 69080-900 Manaus/AM - pos-matematica@ufam.edu.br

---

Referência: Processo nº 23105.050702/2022-85

SEI nº 1405653

# Agradecimentos

Quero deixar meus agradecimentos, primeiramente, ao Deus imortal, invisível, mas real, que habita em luz inacessível, a quem homem algum jamais viu, nem é capaz de ver. Ele mesmo é quem a todos dá à vida, respiração e tudo mais.

Aos meus pais, João Lopes de Souza (em Memória) e Maria das D. de Souza, que nos incentivaram a estudar e sempre diziam ser este o caminho, certo, através do qual, encontraríamos grandes realizações.

À minha esposa, Sebastiana F. de Souza, pelo amor, incentivo e solidariedade e pela companheira compreensiva, paciente e tolerante nos momentos em que estive orfanado da sua presença, por breve tempo, não, porém, do coração.

Aos meus filhos, Esdras Lopes, Edson Júnior, Miguel Souza e Emanuel Souza, pelo grande amor que nutro e com que combato por eles. Vocês são verdadeiros presentes que Deus me deu.

Aos professores do PPGM - UFAM pelo ensino transmitido, pela paciência e boa convivência, em especial aos professores Nikolai Chemetov, Flávia Morgana, Cícero Mota e Jeremias Leão.

À SEMED pelo fomento financeiro e, especialmente, à Aldrey Noronha, coordenadora do programa QUALIFICA, por todo incentivo.

Ao meu orientador, professor Moacir Aloisio, pelos excelentes ensinamentos, dedicação e firme orientações desde as qualificações até a conclusão deste trabalho.

Ao professor César R. de Oliveira, que aceitou o convite para me coorientar com toda maestria e dedicação. Suas correções foram de grande contribuição. Ao professor Silas Carvalho pelas colaborações.

Aos membros da banca, pela disponibilidade, sugestões e observações para a versão final desta tese.

Aos amigos e colegas de doutorado, Leonardo, Júlio, Mário, Matheus, Claudeilsio, Abraão, Andreia, Adrian, Cristiano e Clebes, pelo convívio, experiências trocadas e cafés tomados. Vamos sentir saudades.

A todos os professores do colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da UEA, em particular, ao professor Almir Cunha pelo apoio, e à professora Geraldine Silveira, coordenadora em exercício, por ter ajustado meu horário de trabalho para que eu pudesse desenvolver as minhas atividades do doutorado.

Por fim, quero externar meus agradecimentos a todos que, de uma forma ou de outra, sempre estiveram torcendo ao meu lado para a realização desse sonho. A Deus toda honra e glória pelos séculos dos séculos, amém.

# Papers

1. M. Aloisio, S. L. Carvalho, C. R. de Oliveira, E. Souza, On the Fourier asymptotics of absolutely continuous measures with power-law singularities. arXiv:2205.03489v2 [math.SP], submitted for publication (2022).
2. M. Aloisio, S. L. Carvalho, C. R. de Oliveira, E. Souza, On spectral measures and convergence rates in von Neumann's ergodic theorem. arXiv:2209.05290 [math.SP], submitted for publication (2022).

# Resumo

Apresentamos um estudo sobre o comportamento assintótico de certas quantidades em dinâmica quântica e unitária. Especificamente: (1) Provamos estimativas precisas sobre o comportamento da média temporal do valor absoluto do quadrado da transformada de Fourier de algumas medidas absolutamente contínuas que podem ter singularidades lei de potência, no sentido de que suas derivadas Radon-Nikodym divergem com uma ordem lei de potência; discutimos uma aplicação para medidas espectrais de perturbações de posto finito do laplaciano discreto. (2) Mostramos que os expoentes de decaimento (lei de potência) no Teorema Ergódico de von Neumann são os expoentes pontuais de uma medida espectral no valor espectral 1. Também provamos que, sob uma hipótese de convergência fraca, na ausência de um gap espectral, as taxas de convergência da média temporal no Teorema Ergódico de von Neumann dependem de sequências de tempo que vão ao infinito.

**Palavras-chave:** equação de Schrödinger, medidas espectrais, teorema ergódico de von Neumann, dinâmica quântica, dinâmica unitária.

# Abstract

We present a study on the asymptotic behavior of some quantities in quantum and unitary dynamics. More specifically: (1) We prove sharp estimates on the time-average behavior of the squared absolute value of the Fourier transform of some absolutely continuous measures that may have power-law singularities, in the sense that their Radon-Nikodym derivatives diverge with a power-law order; we discuss an application to spectral measures of finite-rank perturbations of the discrete Laplacian. (2) We show that the power-law decay exponents in von Neumann's Ergodic Theorem are the pointwise scaling exponents of a spectral measure at the spectral value 1. We also prove that, under an assumption of weak convergence, in the absence of a spectral gap, the convergence rates of the time-average in von Neumann's Ergodic Theorem depend on sequences of time going to infinity.

**Keywords:** Schrödinger equation, spectral measures, von Neumann's ergodic theorem, quantum dynamics, unitary dynamics.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>Notação selecionada</b>	<b>9</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>10</b>
1.1 Análise de Fourier: teoria básica	10
1.1.1 Convolução	10
1.1.2 Séries de Fourier	11
1.1.3 Transformada de Fourier	13
1.2 Teoria espectral para operadores limitados	14
1.2.1 Adjunto de Hilbert	14
1.2.2 Grupos de evolução unitários	16
1.2.3 Teorema Espectral	16
1.3 Fundamentos de teoria ergódica	19
1.3.1 Medidas Invariantes	19
1.3.2 Operadores de Koopman	20
1.3.3 Teorema ergódico de von Neumann	21
<b>2 Transformada de Fourier de medidas espectrais com singularidades</b>	<b>24</b>
2.1 Contextualização	24
2.2 Uma desigualdade do tipo Strichartz	28
2.3 Perturbações de posto finito do laplaciano	30
2.3.1 Matrizes de transferência e derivada de medidas espectrais	30
2.3.2 Singularidades lei de potência e dinâmica quântica	32
2.4 Demonstração da desigualdade do tipo Strichartz	35
<b>3 Taxas de convergência para o Teorema Ergódico de von Neumann</b>	<b>39</b>
3.1 Contextualização	39
3.1.1 Expoentes de decaimento e comportamento genérico	39
3.2 Aplicação para operadores de Koopman	41
3.3 Demonstração dos principais resultados	43
3.3.1 Cálculo dos expoentes de decaimento	43
3.3.2 Obtenção dos conjuntos genéricos	45
<b>4 Trabalho futuro</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>50</b>

# Introdução

A teoria espectral de operadores lineares constitui a principal ferramenta para o estudo da dinâmica quântica e unitária. A medida espectral, em geral, diz algo sobre a dinâmica do estado quântico (ou unitário) correspondente. Nesta tese, nosso principal objetivo é estudar como singularidades de medidas espectrais podem influenciar no comportamento de algumas taxas de convergência (lei de potência) em dinâmica quântica e unitária.

## Dinâmica Quântica: breve contextualização

A mecânica quântica foi a revolução mais profunda da física; a equação de Schrödinger, formulada no final de 1925 e publicada em 1926 [51] descreve como o estado quântico de um sistema físico muda com o tempo. A saber, no espaço tridimensional a equação de Schrödinger para uma partícula escreve-se

$$i\hbar \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{m} \Delta u(x, y, z) + V(x, y, z)u(x, y, z), \quad (1)$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck,  $m$  é a massa da partícula,  $V(x, y, z)$  é real e chamada de função energia potencial. Gostaríamos de sublinhar que a complexidade do potencial  $V$  pode conduzir a grandes dificuldades no estudo do comportamento das soluções desta equação.

Embora a equação (1) seja a forma original da equação proposta por Schrödinger [51], vamos considerar agora a equação de Schrödinger na forma abstrata como se segue. Sejam  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert complexo separável e  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador autoadjunto limitado<sup>1</sup>, ou seja,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Considere a Equação de Schrödinger linear

$$\begin{cases} i\partial_t \psi(t) &= T\psi(t), \\ \psi(0) &= \psi \in \mathcal{H}. \end{cases} \quad (2)$$

A solução de tal equação é dada por:

$$\psi(t) = e^{-itT} \psi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notamos que, pelo Teorema Espectral (Theorem 8.3.3 em [27]),

$$\langle \psi, e^{-itT} \psi \rangle = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\mu_{\psi}^T(x)}_{(*)},$$

---

<sup>1</sup>Embora neste trabalho estejamos interessados apenas em operadores limitados, em geral, pode-se considerar  $T$  não limitado na equação (2).

onde  $\mu_\psi^T$  é a medida espectral de  $T$  com respeito a  $\psi \in \mathcal{H}$ . Observamos também que:

1. (\*) é a transformada de Fourier da medida espectral.
2. Quando  $\|\psi\| = 1$ , temos que  $\|e^{-itT}\psi\| = \|\psi\| = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; neste caso,

$$|\langle \psi, e^{-itT}\psi \rangle|$$

é o comprimento da projeção ortogonal da solução  $\psi(t) = e^{-itT}\psi$  sobre  $\psi$  e, então caso ocorra

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi, e^{-itT}\psi \rangle = 0,$$

pode se ter a seguinte interpretação: a solução  $\psi(t) = e^{-itT}\psi$  se afasta do dado inicial  $\psi$ .

Para clarear as observações acima e colocar nosso trabalho em perspectiva vamos apresentar o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.** Se  $\mu_\psi^T \ll \ell$  ( $\mu_\psi^T$  é absolutamente contínua com respeito à  $\ell$ ), onde  $\ell$  é a medida de Lebesgue, então pelo Teorema de Radon-Nikodym (ver pág. 85 em [13]), existe uma  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tal que

$$d\mu_\psi^T(x) = f(x)dx.$$

Neste caso, pelo Teorema Espectral (Theorem 8.3.3 em [27]),

$$\langle \psi, e^{-itT}\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\mu_\psi^T(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)dx.$$

Assim, pelo Lema de Riemann-Lebesgue (ver Lema 1.1 adiante),

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \psi, e^{-itT}\psi \rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)dx = 0.$$

Podemos então concluir neste caso que: “propriedade espectral implica em propriedade da solução.”

Nesta tese, no contexto deste exemplo acima, através de propriedades espectrais de operadores autoadjuntos, faremos um estudo sobre taxas de convergência (lei de potência) da *Probabilidade de Retorno Quântica*, isto é, da seguinte quantidade dinâmica

$$|\langle \psi, e^{-isT}\psi \rangle|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} d\mu_\psi^T(x) \right|^2.$$

Como se trata de uma integral oscilatória, naturalmente vamos considerar a seguinte média

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi, e^{-isT}\psi \rangle|^2 ds = \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} d\mu_\psi^T(x) \right|^2 ds.$$

Sendo mais específico, lembramos que pelo Lema de Wiener (ver Teorema 2.2 adiante),

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi, e^{-isT}\psi \rangle|^2 ds &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} d\mu_\psi^T(x) \right|^2 ds \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |\mu_\psi^T(\{\lambda\})|^2. \end{aligned}$$

Em particular, se  $\mu_\psi^T$  for contínua, isto é,

$$\mu_\psi^T(\{\lambda\}) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi, e^{-isT} \psi \rangle|^2 ds = 0.$$

Nesta tese, estudamos as seguintes questões clássicas em *Dinâmica Quântica* quando  $\mu_\psi^T$  é contínua:

- 1) *taxas de convergência* (lei de potência) de

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi, e^{-isT} \psi \rangle|^2 ds,$$

- 2) propriedades de *regularidade* de  $\mu_\psi^T$  com respeito a medida de Lebesgue,
- 3) relações entre 1) e 2) (neste contexto, um exemplo clássico bem conhecido é o *Teorema de Strichartz* [53] (ver também Teorema [2.3] adiante)).

## Sobre o principal resultado

Considere o Hamiltoniano,  $H_v : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ ,

$$(H_v w)_n = \underbrace{w_{n+1} + w_{n-1}}_{(\Delta w)_n} + v_n w_n,$$

$$w_0 = 0 \text{ (condição de bordo),}$$

onde  $v = (v_n)$  é uma sequência real limitada dada. Estamos interessados na seguinte questão:

- Encontrar  $H_v$  e estados iniciais  $\psi \in \ell^2(\mathbb{N})$  tais que  $\mu_\psi^{H_v} \ll \ell$  tem uma singularidade ordem lei de potência  $x^{-\beta}$ ,  $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ , ou seja, denotando  $f = \frac{d\mu_\psi^{H_v}}{dx}$ ,

$$f(x) \gtrsim \frac{1}{x^\beta}, \quad 0 < x < 1,$$

E, além disso,

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi, e^{-isH_v} \psi \rangle|^2 ds \lesssim \frac{1}{t^{g(\beta)}}, \quad t > 0,$$

onde  $g$  é uma função a valores reais contínua fixada. Acima,  $Z \gtrsim Y$  denota  $Z \geq CY$  e  $Z \lesssim Y$  denota  $Z \leq DY$ , onde  $C$  e  $D$  são constantes positivas.

Em palavras, a questão é obter estados iniciais (para a equação de Schrödinger) para os quais as respectivas medidas espectrais tenham uma singularidade lei de potência, e para os quais o comportamento assintótico das respectivas probabilidades de retorno quântica (na média do tempo) dependam continuamente de tais singularidades. Nesta direção, nós obtemos um resultado para perturbações de posto finito do laplaciano, sendo um dos principais resultados dessa tese, o qual descrevemos a seguir.

Seja  $\delta_j = (\delta_{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , a base canônica de  $\ell^2(\mathbb{N})$ . Considere a perturbação de posto finito

$$\begin{cases} H_0 \psi = \Delta \psi, \\ H_N \psi = \Delta \psi + \sum_{j=1}^N v_j \langle \psi, \delta_j \rangle \delta_j, \quad N \geq 1, \end{cases}$$

com condição de bordo  $\psi(0) = 0$ , onde  $(v_j)$  é uma sequência real limitada dada. Para cada  $0 \leq \beta < 1$  e cada  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , seja

$$k_{\beta, f} := \{(|\cdot|^{-\beta} \chi_{(0,1]}) * f\}.$$

Para cada  $0 \leq f \in L^1(\mathbb{R})$ , defina

$$\psi_{\beta, f} := \sqrt{k_{\beta, f}}(H_N) \delta_1, \quad (3)$$

onde  $\sqrt{k_{\beta, f}}(H_N)$  é dado pelo Cálculo Funcional Espectral (ver pág. 208 em [27]).

Seja  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Nesta tese, vamos mostrar que

i) Se  $0 \leq \beta < 1/2$ , então para cada  $t > 0$

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta, f}, e^{-isH_N} \psi_{\beta, f} \rangle|^2 ds \lesssim t^{-1}.$$

ii) Se  $1/2 < \beta < 1$ , então para cada  $t > 0$

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta, f}, e^{-isH_N} \psi_{\beta, f} \rangle|^2 ds \lesssim t^{-2(1-\beta)}.$$

iii) Se  $\beta = \frac{1}{2}$  então, para cada  $t > 0$

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta, f}, e^{-isH_N} \psi_{\beta, f} \rangle|^2 ds \lesssim \frac{\log(t)}{t}.$$

Para mais detalhes de que  $\psi_{\beta, f} \in \ell^2(\mathbb{N})$ , veja a Seção 2.3.2 adiante. Vale mencionar que nossa principal inspiração para esses estados iniciais vem do Exemplo 3.1 em [41].

O enunciado preciso e a demonstração desse resultado (Teorema 2.5) se encontra no Capítulo 2. Na realidade, a contextualização da construção desse resultado, assim como sua demonstração, é assunto do Capítulo 2. Um ponto importante é que através do mesmo podemos obter exemplos de estados iniciais (para a equação de Schrödinger linear) para os quais as respectivas medidas espectrais tenham uma singularidade com uma taxa de crescimento lei de potência, e para os quais o comportamento assintótico das respectivas probabilidades de retorno quânticas (na média temporal) dependam continuamente de tais singularidades (ver o Exemplo 2.2). Embora natural para especialistas, não conhecemos uma discussão detalhada na literatura nessa direção. Outro ponto é, para demonstrar tal resultado, nessa situação específica, nós refinamos um argumento devido a Strichartz [53].

## Dinâmica Unitária: breve contextualização

Sejam  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert separável,  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador unitário e  $P^U$  sua resolução da identidade (ver Definição [1.12](#) adiante). Para cada  $\psi \in \mathcal{H}$ , defina

$$\psi^* := P^U(\{1\})\psi.$$

$P^U(\{1\})$  é a projeção ortogonal sobre o subespaço fechado  $I(U) := \{\varphi \in \mathcal{H} : U\varphi = \varphi\}$ . O Teorema ergódico de von Neumann (ver Teorema [3.3](#) adiante) diz que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi = \psi^*. \quad (4)$$

O estudo de taxas de convergência para teoremas ergódicos é um assunto clássico e ainda bastante atual em sistemas dinâmicos e teoria espectral. Particularmente, para o Teorema ergódico de von Neumann muitos autores têm estudado taxas de convergência (lei de potência) para [\(4\)](#) na ausência de um gap espectral, isto é, quando  $z = 1$  não é um ponto de acumulação do espectro (ver [\[14, 21, 35, 36, 37, 38, 39, 47, 54\]](#) e referências lá citadas). De fato, na presença de um gap espectral, sabe-se que essas taxas são uniformes em  $\psi$  e pelo menos da ordem de  $1/K$  (para detalhes ver seção 1.3.3).

Pode-se verificar que o Teorema ergódico de von Neumann é consequência da seguinte identidade devida a von Neumann [\[54\]](#) (para detalhes ver também seção 1.3.3, ver também equação (1.1) em [\[14\]](#)).

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 = \frac{1}{K^2} \int_{\partial\mathbb{D}} \left| \frac{z^K - 1}{z - 1} \right|^2 d\mu_{\psi - \psi^*}^U(z). \quad (5)$$

Na identidade acima  $\partial\mathbb{D} := \{z \mid |z| = 1\}$ .

Levando em conta a identidade acima, nessa tese nós

- exibimos explicitamente os expoentes de decaimento lei de potência no Teorema ergódico de von Neumann (Teorema [3.2](#));
- demonstramos que para operadores que possuem espectro puramente absolutamente contínuo em  $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ , na ausência de um gap espectral, as taxas de convergência lei de potência no Teorema ergódico de von Neumann têm um comportamento oscilando entre um decaimento rápido lei de potência e um decaimento lento lei de potência (Teorema [3.3](#)).

## Sobre os principais resultados

A seguir dizemos algo sobre dois dos nossos principais resultados (mencionados acima). A contextualização detalhada destes, assim como suas demonstrações, são assuntos do Capítulo 3.

Para cada  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ , defina

$$S_\epsilon = \left\{ e^{2\pi i\theta} : -\epsilon < \theta < \epsilon \right\}.$$

Seja  $\mu$  uma medida de Borel finita (positiva) em  $\partial\mathbb{D}$ . Lembramos que os *expoentes pontuais* inferior e superior de  $\mu$  em 1 são definidos, respectivamente, por

$$d_\mu^-(1) := \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\ln \mu(S_\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad \text{e} \quad d_\mu^+(1) := \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\ln \mu(S_\epsilon)}{\ln \epsilon}, \quad (6)$$

se  $\mu(S_\epsilon) > 0$ , para todos os  $\epsilon > 0$ ;  $d_\mu^\mp(1) := \infty$ , caso  $\mu(S_\epsilon) = 0$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeno.

Nesta tese vamos mostrar (sob algumas hipóteses) que

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{\log \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2}{\log(K)} = -d_{\mu_{\psi-\psi^*}}^-(1),$$

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{\log \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2}{\log(K)} = -d_{\mu_{\psi-\psi^*}}^+(1),$$

isto é, as taxas de decaimento do Teorema ergódico de von Neumann são governadas por dimensões locais de medidas espectrais. Vamos mostrar também que para operadores com espectro puramente absolutamente contínuo em  $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ , se 1 for um ponto de acumulação do espectro de  $U$ , então para  $\psi \in \mathcal{H}$  genérico (Baire) e para cada  $0 < \epsilon < 2$

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 = \infty$$

e

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} K^{2-\epsilon} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 = 0,$$

isto é, nesta situação, as taxas de convergência no Teorema ergódico de von Neumann têm um comportamento oscilando entre um decaimento (lei de potência) rápido e um decaimento (lei de potência) lento. Confira a imagem a seguir.

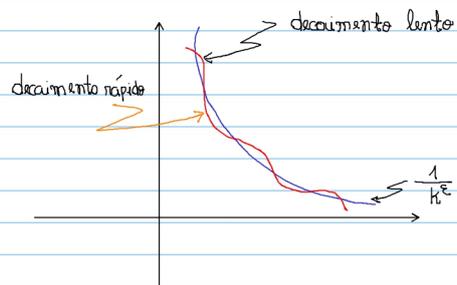


Gráfico: Interpretação de fenômeno caso  $d_{\bar{u}} < d_u^+$ .

## Organização do texto

Descrevemos a seguir brevemente como os capítulos da tese se organizam.

No Capítulo 1, tratamos alguns conceitos preliminares que consideramos essenciais para esta tese, os quais são usados ao longo dos demais capítulos, englobando tópicos de Análise de Fourier, Teoria Espectral e fundamentos de Teoria Ergódica.

No Capítulo 2, primeiramente contextualizamos o tópico a ser abordado, a saber, o comportamento assintótico da transformada de Fourier de medidas fractais (espectrais) e relações desta com o módulo de continuidade da distribuição de tais medidas; nosso principal foco é para possíveis aplicações aos operadores de Schrödinger. A respeito dos principais resultados desse capítulo, nós provamos uma desigualdade do tipo Strichartz [53], exploramos um resultado celebrado devido a Last e Simon [42] sobre a derivada de Radon-Nikodym de medidas espectrais, para então obter um resultado que descreve a dinâmica quântica do laplaciano livre sob perturbações de posto finito com respeito a dados iniciais, cujas medidas espectrais podem ter singularidades lei de potência.

No Capítulo 3, nossa discussão é sobre taxas de convergência (lei de potência) a respeito do Teorema Ergódico de von Neumann, na ausência de um gap espectral em  $z = 1$  (ou seja, caso  $z = 1$  não seja um ponto isolado do espectro do gerador). Os resultados são construídos a partir de técnicas recentes relacionadas à teoria espectral de operadores unitários desenvolvidas por Damanik, Fillman e Vance [24]. Aplicações para operadores de Koopman também são discutidas.

Finalmente, no Capítulo 4 mencionamos possíveis trabalhos futuros.

# Notação selecionada

$\mathcal{H}$  Espaço de Hilbert complexo separável

$T$  Operador autoadjunto em  $\mathcal{H}$

$\rho(T)$  Conjunto resolvente de  $T$

$R(\lambda, T)$  Resolvente de  $T$  em  $\lambda \in \rho(T) \subset \mathbb{C}$

$\sigma(T)$  Espectro de  $T$

$P^T$  Resolução da identidade de  $T$

$\mu$  Medida de Borel finita positiva em  $\mathbb{R}$

$\mu_\xi^T$  Medida espectral de  $T$  com respeito a  $\xi \in \mathcal{H}$

$\frac{d\mu_\xi^T}{dx}$  Derivada de Radon-Nikodym de  $\mu_\xi^T$  com respeito a medida de Lebesgue

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados básicos que serão usados ao longo do texto. O material apresentado aqui é baseado em [16, 17, 18, 27, 43, 46, 50, 52].

### 1.1 Análise de Fourier: teoria básica

Algumas notações usadas ao longo desta seção:

- i) O produto interno  $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ ,  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ .
- ii) A translação  $(\tau_y f)(x) = f(x - y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .
- iii) O multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ ;  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ .
- iv) Polinômios  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- v) Derivadas parciais  $\partial^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ .

#### 1.1.1 Convolução

**Definição 1.1.** Sejam  $f$  e  $g$  funções mensuráveis em  $\mathbb{R}^n$ . A convolução de  $f$  e  $g$  é a função  $f * g$  definida por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Note que se quisermos garantir a finitude de  $f * g$ , pelo menos q.t.p, devemos ter algum decaimento em  $f$  e/ou  $g$  como veremos a seguir. Diretamente da definição podemos obter as seguintes propriedades básicas:

**Proposição 1.1.** *Assumindo que as integrais em questão existam, temos:*

- i) O operador de Convolução é bilinear e simétrico.
- ii)  $(f * g) * h = f * (g * h)$ .
- iii) Para cada  $w \in \mathbb{R}^n$ , temos  $\tau_w(f * g) = (\tau_w f) * g = f * (\tau_w g)$ .

**Observação 1.1.** Um fato interessante deste operador é o seu caráter regularizante, por exemplo, se  $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ , então  $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$  e satisfaz

$$\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g,$$

para todo multi-índice  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq k$ ; isto é, a convolução de duas funções tem pelo menos a regularidade da função mais regular.

**Definição 1.2.** Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tende a zero no infinito se dado  $\epsilon > 0$ , existe um compacto  $K$  tal que  $|f(x)| < \epsilon$  para todo  $x \in K^c$ .

**Notação:**  $C_\infty(\mathbb{R}^n) \equiv \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é contínua e tende a zero no infinito}\}$ .

**Proposição 1.2** (Proposição 2 em [16]). Sejam  $1 \leq p, q \leq +\infty$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Se  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , então  $f * g$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f * g$  é limitada e uniformemente contínua. Caso  $1 < p, q < +\infty$ , temos que  $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ .

A seguir apresentamos a *Desigualdade de Young* (para convoluções), batizada em homenagem ao matemático inglês William Henry Young (1863 - 1942), finalizando assim esta breve introdução ao operador de convolução.

**Teorema 1.1** (Desigualdade de Young, Teorema 2.2 em [43]). *Sejam  $1 \leq p, q, r \leq +\infty$  tais que*

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

*Se  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , então  $f * g$  existe q.t.p. e vale*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

## 1.1.2 Séries de Fourier

A ideia de decompor funções periódicas em séries trigonométricas surgiu, pelo menos explicitamente, em 1811 quando Joseph Fourier propôs uma nova técnica para resolver a equação do calor em "Théorie mathématique de la chaleur", então dando origem a área chamada análise de Fourier, que inclui as séries de Fourier. A seguir, discutiremos a noção de séries de Fourier e apresentaremos o Teorema de Plancherel neste contexto.

### Propriedades elementares

**Definição 1.3.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dizemos que  $f$  é  $T$ -periódica se existir  $T > 0$  tal que

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nesta seção, trataremos só de funções 1-periódicas. Note que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  1-periódica é totalmente determinada por sua restrição ao conjunto  $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \simeq [0, 1) \subset \mathbb{R}$ .

Suponhamos, então, que existam constantes  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{C}$  tais que

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi k i x}, \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Seja  $n \in \mathbb{Z}$ . Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por  $e^{-2\pi n i x}$  e integrando, temos

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi n i x} dx = \int_{\mathbb{T}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi k i x} e^{-2\pi n i x} \right) dx = \int_{\mathbb{T}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi(k-n) i x} \right) dx.$$

Se for válida a integração membro a membro, chegamos a

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi n i x} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} a_k e^{2\pi(k-n) i x} dx = a_n,$$

o que motiva as seguintes definições.

**Definição 1.4.** Seja  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . O  $k$ -ésimo coeficiente da série de Fourier,  $k \in \mathbb{Z}$ , é definido por

$$\widehat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi k i x} dx.$$

**Definição 1.5.** Sejam  $f \in L^1(\mathbb{T})$  e  $x \in \mathbb{T}$ . A série de Fourier de  $f$  em  $x$ ,  $S[f](x)$ , é definida por

$$S[f](x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi k i x}.$$

Não sabemos se a série acima converge em algum sentido. Os próximos resultados clarificam essa questão.

Recorde que o espaço das sequências limitadas é definido como

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}) := \{a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \sup_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < +\infty\},$$

$$\|a\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|.$$

**Proposição 1.3** (Proposição 1 em [18]). *Sejam  $f, g$  funções periódicas e  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*i)  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$ ,  $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ , é um operador linear limitado satisfazendo*

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

*ii) Se  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , então  $\widehat{\tau_y f}(k) = e^{-2\pi i k y} \widehat{f}(k)$ .*

*iii) (Teorema de Convolução)  $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k) \widehat{g}(k)$ .*

*iv) Se  $f \in C^j(\mathbb{T})$ , então*

$$\widehat{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f}(k) = (2\pi i k)^\alpha \widehat{f}(k),$$

*onde  $\alpha \in \mathbb{N}$ , com  $\alpha \leq j$ .*

*v) (Lema de Riemann-Lebesgue) Se  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , então*

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

## Teorema de Plancherel

Abaixo enunciamos o bem conhecido Teorema de Plancherel.

**Teorema 1.2** (Teorema de Plancherel, Teorema 3 em [18]). *Seja  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Então,  $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  e*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

*O operador linear  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  definido por  $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$  é uma isometria sobrejetiva.*

### 1.1.3 Transformada de Fourier

A seguir recordaremos alguns resultados conhecidos a respeito da transformada de Fourier em  $L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

#### Propriedades elementares e exemplos

**Definição 1.6.** Para uma  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , sua transformada de Fourier é definida como sendo a função

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Proposição 1.4** (Proposição 1 em [17]). *Sejam  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Então:*

i)  $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ .

ii)  $(\widehat{\tau_y f})(\xi) = e^{-2\pi i \xi \cdot y} \widehat{f}(\xi)$ .

iii) (Teorema de Convolação)  $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$ .

iv) Se  $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  para  $|\alpha| \leq k$ , então  $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$  e  $\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = [(-2\pi i x)^\alpha f]^\wedge(\xi)$ .

v) Se  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ,  $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  para  $|\alpha| \leq k$  e  $\partial^\alpha f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$  para  $|\alpha| \leq k - 1$ , então  $(\widehat{\partial^\alpha f})(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$ .

O resultado a seguir dá uma caracterização (parcial) importante do conjunto imagem da transformada de Fourier em  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Lema 1.1** (Lema de Riemann-Lebesgue, Lema 2 em [17]). *Para cada  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , tem-se  $\widehat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ .*

Apresentamos agora alguns exemplos clássicos (ver Exemplos 1 e 2 em [17]).

**Exemplo 1.1** (Gaussiana). Se  $g_\lambda(x) = e^{-\pi\lambda|x|^2}$ , onde  $\lambda > 0$ , então  $\widehat{g}_\lambda(\xi) = \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\lambda}}$ .

Note que a transformada de Fourier de uma Gaussiana continua sendo uma Gaussiana. De fato, tomando-se  $\lambda = 1$ , temos

$$\widehat{g}_1(\xi) = 1^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{1}} = g_1(\xi).$$

Assim, na realidade,  $g_1(\xi)$  é um ponto fixo para a transformada de Fourier.

**Exemplo 1.2** (Exponencial). Se  $f_\lambda(x) = e^{-2\pi\lambda|x|}$ , onde  $\lambda > 0$ , então  $\widehat{f}_\lambda$  é dada por

$$\widehat{f}_\lambda(\xi) = C_n \frac{\lambda}{(\lambda^2 + |\xi|^2)^{(n+1)/2}},$$

onde  $C_n = \Gamma[(n+1)/2] / \pi^{(n+1)/2}$ . Aqui  $\Gamma$  é a notação padrão para a Função Gama.

### Teorema de Plancherel

Muito embora a integral que define a transformada de Fourier não faz sentido em geral para uma função qualquer  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , existe uma maneira elementar e elegante de estendermos a teoria para o contexto  $L^2$ . O ponto crucial para essa extensão é o resultado abaixo.

**Teorema 1.3** (Teorema 6 em [17]). *Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ , então  $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ .*

Tendo em vista que  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  é denso  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , existe uma única extensão limitada, denotada por  $\mathcal{F}$ , da transformada de Fourier para o espaço  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Usando a notação  $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$  quando  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , podemos enunciar o bem conhecido Teorema de Plancherel:

**Teorema 1.4** (Teorema de Plancherel, Teorema 7 em [17]). *O operador*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

*é unitário, isto é, linear, isométrico e sobrejetivo. Além disso, sua inversa  $\mathcal{F}^{-1}$  pode ser obtida por  $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \mathcal{F}g(-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , para qualquer  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .*

## 1.2 Teoria espectral para operadores limitados

Nesta seção, nós recordamos alguns conceitos e resultados clássicos a respeito da teoria espectral para operadores limitados, incluindo a noção de operador autoadjunto, grupo de evolução unitário e medidas espectrais.

### 1.2.1 Adjunto de Hilbert

A seguir nós introduzimos o conceito de adjunto de Hilbert (para operadores lineares limitados) e também discutimos alguns exemplos.

Pelo Teorema de Representação de Riesz [27], para cada operador linear limitado  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  corresponde um único operador linear limitado  $T^*$  chamado adjunto de Hilbert. De fato, para cada  $\xi \in \mathcal{H}$ , seja o funcional linear

$$f(\psi) = \langle T\psi, \xi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

que, por Cauchy-Schwarz, é limitado. Então, pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único  $\eta \in \mathcal{H}$  tal que  $\langle T\psi, \xi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle$ , para todo  $\psi \in \mathcal{H}$ . Assim, o adjunto de Hilbert de  $T$ ,  $T^*$ , fica bem definido:  $T^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $T^*\xi = \eta$ , que satisfaz

$$\langle T\psi, \xi \rangle = \langle \psi, T^*\xi \rangle, \quad \psi, \xi \in \mathcal{H}.$$

Não é difícil ver que  $T^*$  é um operador linear fechado e, portanto, pelo Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 1.2.21 em [27]),  $T^*$  também é limitado.

**Definição 1.7.** Seja  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador linear limitado.  $T$  é autoadjunto se  $T^* = T$ .

**Exemplo 1.3** (Operador de multiplicação). Considere  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  uma função de Borel limitada. O respectivo operador de multiplicação por  $\varphi$  é o operador linear limitado  $M_\varphi : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$(M_\varphi\psi)(x) := \varphi(x)\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Notamos que, para cada  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \|M_\varphi\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)\psi(x)|^2 dx \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^2 dx = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^2 \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2; \end{aligned}$$

isso mostra que  $M_\varphi$  está bem definido e  $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ .

Agora encontramos o adjunto de  $M_\varphi$ : para todo  $\psi, \eta \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \langle M_\varphi\psi, \eta \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (M_\varphi\psi)(x) \overline{\eta(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x) \overline{\eta(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \overline{\varphi(x)\eta(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \overline{(M_{\overline{\varphi}}\eta)(x)} dx = \langle \psi, M_{\overline{\varphi}}\eta \rangle. \end{aligned}$$

Assim,  $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$ ; note que se  $\varphi$  for uma função a valores reais, então  $M_\varphi^* = M_\varphi$ , isto é,  $M_\varphi$  é um operador autoadjunto.

**Exemplo 1.4.** Seja  $v = (v_n)$  uma sequência em  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ . Vamos usar o Teorema de Plancherel para mostrar que o Operador de Schrödinger definido, para cada  $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , por

$$(Hu)_n = (\Delta u)_n + v_n u_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

onde  $(\Delta u)_n = u_{n+1} + u_{n-1}$ , é um operador autoadjunto. Com efeito, pelo Teorema de Plancherel, para cada  $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , existe  $g \in L^2(\mathbb{T})$  tal que  $\mathcal{F}g = u$ . Neste caso, usando a fórmula de Euler, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{F}g)_n &= \int_{\mathbb{T}} g(x)(e^{-2\pi i(n+1)x} + e^{-2\pi i(n-1)x}) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} g(x)e^{-2\pi inx}(e^{-2\pi ix} + e^{2\pi ix}) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi inx} 2 \cos(2\pi x) g(x) dx \\ &= (\mathcal{F}M_\psi g)_n, \end{aligned}$$

onde  $(M_\psi g)(x) := \psi(x)g(x)$  com  $\psi(x) = 2 \cos(2\pi x)$ . Em particular,

$$\mathcal{F}^{-1}\Delta\mathcal{F} = M_\psi.$$

Consequentemente

$$(Hu)_n = (\mathcal{F}M_\psi\mathcal{F}^{-1}u)_n + v_n u_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

e, portanto,  $H$  é limitado e autoadjunto uma vez que  $M_\psi$  é limitado e autoadjunto, e  $\mathcal{F}$  é um operador unitário sobrejetivo.

## 1.2.2 Grupos de evolução unitários

A seguir vamos apresentar um resultado básico sobre grupos de evolução unitários. Adiante usaremos tal resultado para discutir, através do Teorema Espectral, a existência e unicidade de soluções para a equação de Schrödinger linear (ver equação [\(ES\)](#) adiante).

**Definição 1.8** (Operador unitário). Dizemos que um operador  $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é unitário se  $U$  é invertível e  $U^* = U^{-1}$ .

**Definição 1.9** (Grupo de evolução unitário). Uma aplicação  $G: \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$  é dita ser um grupo de evolução unitário se, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G(t)$  é unitário e

$$G(t + s) = G(t)G(s), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Definição 1.10** (Gerador infinitesimal). Se  $G: \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$  é um grupo de evolução unitário, o operador  $T$  definido por

$$\begin{aligned} \text{dom } T &:= \left\{ \xi \in \mathcal{H}; \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (G(h) - I)\xi \right\}, \\ T\xi &:= i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (G(h) - I)\xi \end{aligned}$$

é denominado *gerador infinitesimal* de  $G$ .

**Proposição 1.5** (Proposição 5.1.3. em [\[27\]](#)). *Seja  $G: \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$  um grupo de evolução unitário. Então, para cada  $\xi \in \text{dom } T$ , a curva  $\xi(t) := G(t)\xi \in \mathcal{H}$  é a única solução de*

$$i \frac{d\xi}{dt}(t) = T\xi(t), \quad \xi(0) = \xi.$$

## 1.2.3 Teorema Espectral

Nesta seção, nós apresentaremos o Teorema Espectral e o Cálculo Funcional para operadores autoadjuntos limitados. Sublinhamos que uma construção similar a respeito da bem conhecida resolução da identidade (ver definição abaixo) pode ser feita de modo análogo para operadores unitários, levando em consideração que o suporte topológico da medida espectral (ver definição adiante) no caso unitário se encontra no círculo unitário no plano complexo. Neste trabalho nós usaremos também a versão unitária da resolução da identidade, embora não a discutiremos em detalhes a seguir.

**Definição 1.11.** Sejam  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  espaços normados e  $T, T_n: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$  operadores em  $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ . Dizemos que a sequência  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortemente para  $T$  (e denotamos por  $T_n \xrightarrow{s} T$  ou  $T = s - \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ ) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n \xi - T\xi\|_{\mathcal{N}_2} = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}_1.$$

Seja  $\text{Proj}(\mathcal{H})$  o conjunto dos operadores  $P_0 \in B(\mathcal{H})$  autoadjuntos e tais que  $P_0^2 = P_0$ . Denotemos por  $\mathcal{A}$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $\mathbb{R}$  e por  $\sum_j \Lambda_j$  a união de conjuntos  $\Lambda_j \in \mathcal{A}$  disjuntos dois a dois.

**Definição 1.12.** Uma resolução da identidade em  $\mathcal{H}$  é uma aplicação  $P: \mathcal{A} \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{H})$  tal que

1.  $P(\mathbb{R}) = I$ .
2. Se  $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j$ , então

$$P(\Lambda) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n P(\Lambda_j).$$

Dada uma resolução da identidade  $P$ , para cada  $\xi \in \mathcal{H}$ , associa-se uma medida de Borel positiva finita  $\mu_\xi: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$  definida por

$$\mu_\xi(\Lambda) := \langle \xi, P(\Lambda)\xi \rangle.$$

Agora note que  $\mu_\xi(\Lambda) = \langle \xi, P(\Lambda)\xi \rangle = \langle \xi, P(\Lambda)P(\Lambda)\xi \rangle = \langle P(\Lambda)\xi, P(\Lambda)\xi \rangle = \|P(\Lambda)\xi\|^2$ , qualquer que seja  $\Lambda \in \mathcal{A}$ . Segue-se daí que  $\mu_\xi(\mathbb{R}) = \|\xi\|^2$ .

Para cada par  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  associa-se a medida de Borel complexa  $\mu_{\xi, \eta}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\mu_{\xi, \eta}(\Lambda) = \langle \xi, P(\Lambda)\eta \rangle$$

e por polarização

$$\mu_{\xi, \eta}(\Lambda) = \frac{1}{4} [\mu_{\xi+\eta}(\Lambda) - \mu_{\xi-\eta}(\Lambda) + i(\mu_{\xi-i\eta}(\Lambda) - \mu_{\xi+i\eta}(\Lambda))].$$

Veja também que  $\mu_\xi = \mu_{\xi, \xi}$  e  $|\mu_{\xi, \eta}(\Lambda)| \leq \|\xi\| \|\eta\|$ .

**Definição 1.13.** As medidas  $\mu_\xi, \mu_{\xi, \eta}$  definidas acima são chamadas de medidas espectrais da resolução da identidade  $P$  associadas a  $\xi$  e ao par  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ , respectivamente.

Pode-se integrar funções e definir a integral em relação à resolução da identidade  $P$  do seguinte modo: dada uma função mensurável simples  $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{\Lambda_j}$ , onde  $\Lambda_j$  são mensuráveis disjuntos dois a dois, define-se:

$$\int f dP := \sum_{j=1}^n a_j P(\Lambda_j).$$

As notações  $P(f), \int_{\mathbb{R}} f(t) dP(t)$  também são usadas para denotar  $\int f dP$ . Observe que  $\int \chi_\Lambda dP = P(\Lambda)$ , se  $\Lambda$  é um conjunto mensurável. Também convém notar que a aplicação  $f \rightarrow P(f)$  definida no conjunto das funções simples é linear e satisfaz

$$\langle \xi, P(f)\xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_\xi(t),$$

e como

$$\|P(f)\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 d\mu_\xi(t) = \|f\|_{L^2_{\mu_\xi}}^2 \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2 \mu_\xi(\mathbb{R}) = \left( \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \right)^2 \|\xi\|^2,$$

segue-se que a aplicação linear  $P: \{\text{funções simples}\} \rightarrow B(\mathcal{H})$  é contínua (o espaço das funções simples com a norma do sup).

Seja  $B^\infty(\mathbb{R})$  o espaço vetorial das funções de Borel mensuráveis limitadas com a norma  $\|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ . Como as funções simples constituem um conjunto denso em  $B^\infty(\mathbb{R})$ ,

existe uma única extensão de  $P$  a um operador linear limitado (e usando a mesma notação)  $P: B^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ , tal que para toda  $f \in B^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\langle \xi, P(f)\eta \rangle = \int f(t) d\mu_{\xi, \eta}(t)$$

e

$$\|P(f)\xi\|^2 = \int |f(t)|^2 d\mu_\xi(t) \leq \left( \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2 \right) \|\xi\|^2.$$

Apresentamos a seguir o Teorema Espectral e o Cálculo Funcional para operadores autoadjuntos limitados; naturalmente alguma preparação é necessária.

**Definição 1.14** (Espectro e Resolvente). Seja  $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador linear. O resolvente  $\rho(A)$  é o conjunto de escalares  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que o operador

$$(A - \lambda I)^{-1}: \mathcal{H} \rightarrow \text{dom } A$$

existe e é limitado. O espectro de  $A$  é o conjunto  $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

**Definição 1.15** (Operador resolvente). Seja  $A: \text{dom } A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador linear e seja  $\lambda \in \rho(A)$ . Definimos o operador resolvente  $R_\lambda(A)$  por  $R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1}$ .

**Teorema 1.5** (Teorema Espectral, Teorema 8.3.8 em [27]). *A cada operador autoadjunto limitado  $T$  corresponde uma única resolução da identidade  $P^T$  em  $\mathcal{H}$  tal que  $T = \int t P^T(t)$ .*

**Teorema 1.6** (Cálculo Funcional, Corolário 8.3.19 em [27]). *Seja  $T$  um operador autoadjunto limitado. Então, a aplicação  $\Phi: B^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $\Phi(f) \equiv f(T) := P^T(f)$ , é a única que satisfaz:*

a)  $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g) = \Phi(g)\Phi(f)$ ,  $\Phi(\lambda g) = \lambda\Phi(g)$ ,  $\Phi(1) = I$  e  $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$ .

b)  $\Phi$  é contínua, ou seja,  $\|\Phi(f)\|_{B(\mathcal{H})} \leq C \|f\|_\infty$ .

c) Se  $f(x) = x$ , então  $\Phi(f) = T$ .

d) Se  $z \in \rho(T)$ , então

$$\langle \xi, R_z(T)\xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z} d\mu_\xi^T(x).$$

onde  $\mu_\xi^T$  representa a medida espectral de  $P^T$  com respeito a  $\xi$ .

e) Se  $T\psi = \lambda\psi$ , então  $\Phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$ .

f)  $\sigma[\Phi(f)] = \overline{\{f(\lambda); \lambda \in \sigma(T)\}}$ .

**Observação 1.2.** Pode-se mostrar que o espectro é o suporte topológico da medida espectral.

## Existência e unicidade de solução para a equação de Schrödinger

Seja  $T$  um operador autoadjunto limitado e recorde que a equação de Schrödinger linear é dada por

$$\begin{cases} \partial_t \xi(t) = -iT\xi, & t \in \mathbb{R}, \\ \xi(0) = \xi, & \xi \in \mathcal{H}. \end{cases} \quad (\text{ES})$$

Provaremos agora existência e unicidade de soluções para (ES). Com efeito, seja  $e^{-iTt} := f_t(T)$ , onde  $f_t(x) = e^{-ixt}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Pelo Cálculo Funcional,  $(e^{-iTt})_{t \in \mathbb{R}}$  é um grupo de evolução unitário.

$T$  é o gerador infinitesimal de  $(e^{-iTt})_{t \in \mathbb{R}}$ : denote por  $A$  o gerador infinitesimal de  $(e^{-iTt})_{t \in \mathbb{R}}$ . Vamos mostrar que  $A = T$ . Por convergência dominada, uma vez que, para cada  $\xi \in \mathcal{H}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^2 d\mu_{\xi}^T(x) = \int_{\sigma(T)} |x|^2 d\mu_{\xi}^T(x) < +\infty$$

(recorde que  $T$  limitado implica em  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$  compacto),

$$\left\| T\xi - \lim_{h \rightarrow 0} i \frac{1}{h} (e^{-iTh} - I)\xi \right\|^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| x - \frac{i}{h} (e^{-ixh} - 1) \right|^2 d\mu_{\xi}^T(x) = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Assim,  $\xi \in \mathcal{H}$  implica em  $\xi \in \text{dom } A$  e  $A\xi = T\xi$ , ou seja,  $T = A$ .

Finalmente, como  $T$  é o gerador infinitesimal de  $(e^{-iTt})_{t \in \mathbb{R}}$ , pela Proposição 1.5, a curva  $(e^{-iTt}\xi)_{t \in \mathbb{R}}$  é a única solução de (ES).

## 1.3 Fundamentos de teoria ergódica

Um dos principais objetivos dessa tese é obter resultados sobre taxas de convergência (lei de potência) para o Teorema Ergódico de von Neumann (TEvN) (Teorema 1.7) na ausência de um gap espectral, um resultado considerado um pilar da matemática moderna. Nós gostaríamos de mencionar que boa parte da teoria relacionada a esse resultado é motivada por aplicações aos operadores de Koopman; então, levando isto em consideração, nesta seção nós recordamos alguns aspectos de teoria ergódica, mais especificamente, a definição desses operadores e o enunciado do TEvN.

### 1.3.1 Medidas Invariantes

Seja  $(M, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida e  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável. Dizemos que  $\mu$  é invariante pela transformação  $f$  (ou que  $f$  preserva a medida  $\mu$ ) se

$$\mu(\Lambda) = \mu(f^{-1}(\Lambda))$$

para todo conjunto mensurável  $\Lambda \subset M$ .

**Exemplo 1.5** (Deslocamentos de Bernoulli, Seção 4.2.3 em [46]). Esses são sistemas que modelam sequências de experimentos aleatórios em que o resultado de cada experimento é independente dos demais. Supõe-se que em cada experimento há um número finito de resultados possíveis, designados por  $1, 2, \dots, d$ , com probabilidades  $p(1), p(2), \dots, p(d)$  de ocorrerem, sendo

$$p(1) + p(2) + \dots + p(d) = 1.$$

O conjunto  $M$  das sequências  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  com cada  $\alpha_n \in \{1, 2, \dots, d\}$  contém os possíveis resultados da sequência de experimentos. Chamam-se cilindros os subconjuntos da forma

$$[k, l; a_k, \dots, a_l] = \{\alpha \in M : \alpha_k = a_k, \dots, \alpha_l = a_l\},$$

onde  $k, l \in \mathbb{Z}$ , com  $k \leq l$ , e cada  $a_j \in \{1, 2, \dots, d\}$ . Definimos

$$\mu([k, l; a_k, \dots, a_l]) = p(a_k) \cdots p(a_l).$$

Consideramos em  $M$  a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  gerada pelos cilindros. A família  $\mathcal{B}_0$  das uniões disjuntas finitas dos cilindros é uma álgebra (por convenção,  $M$  é um cilindro e  $\mu(M) = 1$ ). Estendemos  $\mu$  de modo a que seja finitamente aditiva: se  $E \in \mathcal{B}_0$  é a união disjunta de cilindros  $C_1, \dots, C_N$ , definimos

$$\mu(E) = \mu(C_1) + \cdots + \mu(C_N).$$

Verifica-se que esta função  $\mu$  é, de fato,  $\sigma$ -aditiva em  $\mathcal{B}_0$ . Portanto, existe uma única probabilidade na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  gerada por  $\mathcal{B}_0$  que é uma extensão de  $\mu$ , isto é, que coincide com ela restrita a  $\mathcal{B}_0$ . Chamamos essa probabilidade de medida de Bernoulli definida por  $p(1), p(2), \dots, p(d)$  e, para não complicar a notação, a representamos também por  $\mu$ .

No espaço  $M$  consideramos a transformação deslocamento (“shift”) à esquerda

$$f : M \rightarrow M$$

dada por  $f((\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}) = (\alpha_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ . A medida de Bernoulli é invariante por  $f$ .

### 1.3.2 Operadores de Koopman

Apresentamos abaixo a definição de operador de Koopman em  $L^2_\mu(M)$ ; esses operadores são de grande utilidade em Teoria Ergódica pois permitem fazer uso de ferramentas de Teoria Espectral no estudo das propriedades de medidas invariantes.

**Definição 1.16.** Se  $f : M \rightarrow M$  preserva uma medida  $\mu$  então, definimos o seu operador de Koopman como a isometria  $U_f : L^2_\mu(M) \rightarrow L^2_\mu(M)$ ,  $U_f(\psi)(x) = (\psi \circ f)(x) = \psi(f(x))$ ,  $x \in M$ .

Note que é direta a verificação que  $U_f$  é sempre uma isometria. Com efeito,

$$\begin{aligned} \|U_f(\psi)\|_{L^2_\mu(M)}^2 &= \int_M |U_f(\psi)(x)|^2 d\mu(x) \\ &= \int_M |\psi(f(x))|^2 d\mu(x) \\ &= \int_M |\psi|^2 \circ f(x) d\mu(x) \\ &= \int_M |\psi(x)|^2 d\mu(x) \\ &= \|\psi\|_{L^2_\mu(M)}^2 \end{aligned}$$

Assim,  $\|U_f(\psi)\|_{L^2_\mu(M)} = \|\psi\|_{L^2_\mu(M)}$ , donde  $U_f$  é uma isometria.

### 1.3.3 Teorema ergódico de von Neumann

Seja  $U$  um operador unitário em um espaço de Hilbert complexo separável  $\mathcal{H}$  e seja  $P^U$  a sua resolução da identidade. Para cada  $\psi \in \mathcal{H}$ , defina

$$\psi^* := P^U(\{1\})\psi.$$

$P^U(\{1\})$  é a projeção ortogonal sobre o subespaço fechado  $I(U) := \{\varphi \mid U\varphi = \varphi\}$ .

Agora, apresentamos o seguinte resultado clássico.

**Teorema 1.7** (Teorema Ergódico de von Neumann, Teorema 3.1.5 em [46]). *Seja  $U$  um operador unitário em  $\mathcal{H}$ . Então, para cada  $\psi \in \mathcal{H}$ ,*

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi = \psi^*. \quad (1.1)$$

O estudo de taxas de convergência para teoremas ergódicos é um assunto estabelecido em teoria espectral e sistemas dinâmicos (ver [14, 21, 35, 36, 37, 38, 39, 47, 54] e as referências contidas nestes trabalhos). No caso particular do Teorema Ergódico de von Neumann (TEvN), alguns autores têm obtidos taxas de convergência (lei de potência) para a média do tempo em relação (1.1) na ausência de um gap espectral em  $z = 1$  (ou seja, caso  $z = 1$  não seja um ponto isolado do espectro de  $U$ ); a maioria desses trabalhos são motivados por possíveis aplicações para operadores de Koopman (ver [35, 36, 37, 38, 39] e referências neles; ver também [14] para uma discussão envolvendo sistemas dinâmicos contínuos).

Por outro lado, se existe um gap espectral em  $z = 1$ , é bem conhecido que as taxas de convergência para a média temporal em relação (1.1) são uniformes em  $\psi$  e pelo menos da ordem  $K^{-1}$ .

**Teorema 1.8** (Teorema Ergódico de von Neumann com um gap espectral em  $z = 1$ ). *Seja  $U$  um operador unitário em  $\mathcal{H}$ . Se existe  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$  tal que  $\sigma(U) \subset \{1\} \cup \{e^{2i\pi\theta} \mid \theta \in (\gamma, 1 - \gamma)\}$ , então para cada  $K \in \mathbb{N}$ ,*

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j - P^U(\{1\}) \right\| \leq \frac{2}{\gamma\pi K}.$$

A demonstração do Teorema [1.8] é uma consequência do Teorema Espectral; para encerrar esta seção e colocar nosso trabalho em perspectiva lembraremos alguns detalhes dessa demonstração.

Lembre-se que, pelo Teorema Espectral, para todo  $\varphi \in \mathcal{H}$  existe uma medida de Borel finita positiva  $\mu_\varphi^U$  suportada no círculo  $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  tal que para qualquer função mensurável de Borel limitada  $f$  em  $\partial\mathbb{D}$ , tem-se

$$\|f(U)\varphi\|^2 = \left\| \int_{\partial\mathbb{D}} f(z) dP^U(z)\varphi \right\|^2 = \int_{\partial\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\mu_\varphi^U(z);$$

aqui,  $\mu_\varphi^U$  é a medida espectral de  $U$  em relação a  $\varphi$ .

Agora nós adicionamos outro ingrediente necessário na demonstração do Teorema [1.8].

**Lema 1.2** (Lema de von Neumann). *Seja  $U$  um operador unitário em  $\mathcal{H}$ . Então, para cada  $\psi \in \mathcal{H}$  e cada  $K \in \mathbb{N}$ ,*

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 = \frac{1}{K^2} \int_{\partial \mathbb{D}} \left| \frac{z^K - 1}{z - 1} \right|^2 d\mu_{\psi - \psi^*}^U(z). \quad (1.2)$$

**Observação 1.3.** A relação (1.2) indica que as taxas de convergência da média temporal em (1.1) dependem apenas das propriedades de escala local de  $\mu_{\psi - \psi^*}^U$  em  $z = 1$ . Neste contexto, esta relação surge de um argumento devido a von Neumann, apresentado em [54] em estudo da teoria ergódica; esta relação também foi utilizado mais recentemente por Kachurovskii e Sedalishchev [36] para relacionar as propriedades de escala local de  $\mu_{\psi - \psi^*}^U$  em  $z = 1$  com as taxas de convergência (lei de potência) em (1.1) (ver Teorema 3.1 adiante).

*Demonstração* (Lema 1.2). Para cada  $K \in \mathbb{N}$  e cada  $z \in \partial \mathbb{D} \setminus \{1\}$ , recorde que

$$\sum_{j=0}^{K-1} z^j = \frac{z^K - 1}{z - 1}.$$

Note que, para cada  $\psi \in \mathcal{H}$ ,  $\mu_{\psi - \psi^*}^U(\{1\}) = 0$ . Assim, pelo Teorema Espectral, segue-se que para cada  $\psi \in \mathcal{H}$  e cada  $K \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 &= \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j (\psi - \psi^*) \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \int_{\partial \mathbb{D}} z^j dP^U(z) (\psi - \psi^*) \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{1}{K} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{z^K - 1}{z - 1} dP^U(z) (\psi - \psi^*) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{K^2} \int_{\partial \mathbb{D}} \left| \frac{z^K - 1}{z - 1} \right|^2 d\mu_{\psi - \psi^*}^U(z). \end{aligned}$$

□

*Demonstração* (Teorema 1.8). Como, para cada  $\psi \in \mathcal{H}$ ,  $\text{supp}(\mu_{\psi - \psi^*}^U) \subset \sigma(U) \subset \{1\} \cup \{e^{2i\pi\theta} \mid \theta \in (\gamma, 1 - \gamma)\}$  e  $\mu_{\psi - \psi^*}^U(\{1\}) = 0$ , segue-se do Lema 1.2 que para cada  $\psi \in \mathcal{H}$  e

cada  $K \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 &= \frac{1}{K^2} \int_{\partial \mathbb{D}} \left| \frac{z^K - 1}{z - 1} \right|^2 d\mu_{\psi - \psi^*}^U(z) \\
&\leq \frac{1}{K^2} \left( \sup_{z \in \{e^{2i\pi\theta} \mid \theta \in (\gamma, 1-\gamma)\}} \left| \frac{z^K - 1}{z - 1} \right|^2 \right) \mu_{\psi - \psi^*}^U(\partial \mathbb{D}) \\
&= \frac{1}{K^2} \left( \sup_{z \in \{e^{2i\pi\theta} \mid \theta \in (\gamma, 1-\gamma)\}} \left| \frac{e^{Ki\pi\theta}(e^{Ki\pi\theta} - e^{-Ki\pi\theta})}{e^{i\pi\theta}(e^{i\pi\theta} - e^{-i\pi\theta})} \right|^2 \right) \mu_{\psi - \psi^*}^U(\partial \mathbb{D}) \\
&= \frac{1}{K^2} \left( \sup_{\theta \in (\gamma, 1-\gamma)} \left| \frac{\text{sen}(K\pi\theta)}{\text{sen}(\pi\theta)} \right|^2 \right) \|\psi - \psi^*\|^2 \\
&\leq \frac{1}{(K \text{sen}(\pi\gamma))^2} \|(I - P^U(\{1\}))\psi\|^2 \\
&\leq \frac{4}{\gamma^2 \pi^2 K^2} \|\psi\|^2,
\end{aligned}$$

onde nós temos usado que  $\gamma\pi/2 \leq \text{sen}(\pi\gamma)$  para cada  $0 < \gamma < 1/2$ . Consequentemente, para cada  $K \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j - P^U(\{1\}) \right\| \leq \frac{2}{\gamma\pi K}.$$

□

# Capítulo 2

## Transformada de Fourier de medidas espectrais com singularidades

Como já mencionamos, nosso principal objetivo aqui é obter estados iniciais (para a equação de Schrödinger linear) para os quais as respectivas medidas espectrais tenham singularidade lei de potência, e para os quais o comportamento assintótico das respectivas probabilidades de retorno quântica (na média do tempo) dependam continuamente de tais singularidades (ver Teorema 2.5 e Exemplo 2.2 adiante).

Nossa principal contribuição nesta tese referente a este capítulo é o Teorema 2.5. Enfatizamos que os estados iniciais (ver (2.10) adiante) estudados aqui foram escolhidos principalmente levando em consideração o Exemplo 3.1 em [41]. Finalmente, para o melhor do nosso conhecimento, não conhecemos nada na literatura detalhado na direção dos resultados apresentados aqui, embora os mesmos após enunciados sejam bastante naturais para especialistas.

### 2.1 Contextualização

O estudo do comportamento assintótico da transformada de Fourier de medidas fractais (espectrais) e do módulo de continuidade da distribuição de tais medidas desempenha um papel importante na teoria espectral e na dinâmica quântica (tal comportamento está relacionado a boas propriedades de transporte); nota-se que a maioria dos resultados a esse respeito são motivados por possíveis aplicações aos operadores de Schrödinger (ver [6, 41, 53, 55, 56] e referências neles) e, neste contexto, pode-se destacar dois resultados clássicos sobre medidas de Borel (positivas) finitas em  $\mathbb{R}$ : o Lema de Riemann-Lebesgue (por volta de 1900) e o Lema de Wiener (por volta de 1935), enunciados precisamente a seguir [27].

**Teorema 2.1** (Lema de Riemann-Lebesgue, Teorema 13.3.7 em [27]). *Se  $\mu$  é uma medida de Borel finita em  $\mathbb{R}$  absolutamente contínua, então sua transformada de Fourier satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x t} d\mu(x) = 0.$$

**Teorema 2.2** (Lema de Wiener, Lema 13.3.5 em [27]). *Seja  $\mu$  uma medida de Borel finita em  $\mathbb{R}$ ; então,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i s x} d\mu(x) \right|^2 ds = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |\mu(\{\lambda\})|^2.$$

Pode-se destacar também o Teorema de Strichartz [53] (ver também Teorema 2.3 abaixo), de 1990 (ver Teorema 2.3 (i) abaixo), que estabelece taxas de convergência (lei de potência) do Lema de Wiener para medidas uniformemente  $\alpha$ -Hölder contínuas. Alguns detalhes serão discutidos a seguir nessa direção agora.

Seja  $\mu$  uma medida de Borel finita em  $\mathbb{R}$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . Dizemos que  $\mu$  é uniformemente  $\alpha$ -Hölder contínua (denotamos  $U\alpha H$ ) se existir uma constante  $C > 0$  tal que

$$\mu(I) \leq C \ell(I)^\alpha$$

para cada intervalo  $I$  com  $\ell(I) < 1$ , onde  $\ell(\cdot)$  denota a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$ . Tem-se o seguinte resultado.

**Teorema 2.3** (Teoremas 2.5 e 3.1 em [41]). *Seja  $\mu$  uma medida de Borel finita em  $\mathbb{R}$  e  $\alpha \in [0, 1]$ .*

*i) Se  $\mu$  for  $U\alpha H$ , então existe uma constante  $C_\mu > 0$ , dependendo apenas de  $\mu$ , tal que para cada  $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$  e cada  $t > 0$ ,*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i s x} f(x) d\mu(x) \right|^2 ds < C_\mu \|f\|_{L^2(\mathbb{R}, d\mu)}^2 t^{-\alpha}.$$

*ii) Se existir  $C_\mu > 0$  tal que para cada  $t > 0$ ,*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i s x} d\mu(x) \right|^2 ds < C_\mu t^{-\alpha},$$

*então  $\mu$  é  $U\frac{\alpha}{2}H$ .*

**Observação 2.1.** Note que o Teorema 2.3-i) é, de fato, um caso particular do Teorema de Strichartz [53], que vale para medidas  $\sigma$ -finitas.

Neste capítulo, usamos análise de Fourier para provar algumas estimativas (precisas) sobre o comportamento assintótico (em média no tempo) do valor absoluto do quadrado da transformada de Fourier de algumas medidas absolutamente contínuas que podem ter singularidades lei de potência.

Na próxima observação, discutimos o fato de que o Teorema 2.3-i), em geral, não é suficiente para obter estimativas precisas para tais transformadas de Fourier de medidas absolutamente contínuas com singularidades lei de potência.

**Observação 2.2.** Para algumas classes importantes de medidas em teoria espectral e dinâmica quântica, tais como medidas espectrais de operadores de Schrödinger definidos dinamicamente, 1/2-Hölder continuidade é tipicamente ótimo (normalmente devido ao fato de existirem singularidades do tipo raiz quadrada associadas ao bordo do espectro, ver [6, 25, 55, 56] para comentários adicionais); pelo Teorema 2.3-i), o comportamento (em média no tempo) do quadrado do valor absoluto da transformada de Fourier de tais medidas decaem com pelo menos  $1/\sqrt{t}$ . Esta taxa, em geral, está longe de ser ótima como, por exemplo, é o caso do laplaciano discreto: seja  $\ell^2(\mathbb{Z})$  e  $\delta_j = (\delta_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , sua base canônica, e recorde o laplaciano que estamos sempre considerando aqui, agindo em  $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , por

$$(\Delta\psi)_k = \psi_{k+1} + \psi_{k-1};$$

então, embora a medida espectral  $\mu_{\delta_0}^\Delta$  do par  $(\Delta, \delta_0)$  seja exatamente 1/2-Hölder contínua, tem-se

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i s x} d\mu_{\delta_0}^\Delta(x) \right|^2 ds = O(\log(t)/t); \quad (2.1)$$

ver o caso  $\beta = \frac{1}{2}$  no Exemplo 2.1 e, por exemplo, seção 12.3 em [27] para detalhes da derivada de Radon-Nikodym de tal medida espectral (aqui,  $h(t) = O(r(t))$  indica que existe  $C > 0$  tal que, para cada  $t > 0$ ,  $h(t) \leq Cr(t)$ ).

Como  $\mu_{\delta_0}^\Delta$  é 1/2-Hölder contínua, pelo Teorema 2.3-i), pode-se concluir que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i s x} d\mu_{\delta_0}^\Delta(x) \right|^2 ds = O(1/\sqrt{t}),$$

o que dá um limitante pior do que o dado por (2.1). Além disso, como  $\mu_{\delta_0}^\Delta$  é no máximo 1/2-Hölder contínua, pelo Teorema 2.3-ii), a taxa em (2.1) é (lei de potência) ótima. De fato, suponha que existe  $\varepsilon > 0$  tal que se possa trocar  $t^{-1}$  por  $t^{-1-\varepsilon}$  em (2.1); então, pelo Teorema 2.3-ii),  $\mu_{\delta_0}^\Delta$  é pelo menos  $(1/2 + \varepsilon/4)$ -Hölder contínua (note que o termo “ $\varepsilon/4$ ” aparece pois temos que “descontar” o log em (2.1) antes de aplicarmos o Teorema 2.3-ii)).

A fim de colocar o nossos resultados em perspectiva, apresentamos o seguinte exemplo. Para cada  $0 < \beta < 1$ , denote por

$$M_\beta := \max_{\eta > 0} \left| \int_0^\eta e^{-iu} u^{-\beta} du \right|^2; \quad (2.2)$$

para  $0 < \beta < 1$ ,  $\left| \int_0^\infty e^{-iu} u^{-\beta} du \right| = \Gamma(1 - \beta)$ ; assim,  $M_\beta < \infty$ . Nós lembramos que  $\Gamma$  denota a Função Gama.

**Exemplo 2.1.** Defina, para cada  $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$  e cada  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,

$$K_{\beta,f} := \{(|\cdot|^{-\beta} \chi_{(0,1]}) * f\}, \quad (2.3)$$

então  $K_{\beta,f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Pelo Teorema de Convolução, segue-se que para cada  $s > 0$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{K_{\beta,f}}(s) &= \left\{ \int_0^1 e^{-2\pi i x s} x^{-\beta} dx \right\} \hat{f}(s) = \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{1-\beta} s^{1-\beta}} \int_0^1 e^{-2\pi i x s} (2\pi x s)^{-\beta} (2\pi s) dx \right\} \hat{f}(s) \\ &= \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{1-\beta} s^{1-\beta}} \int_0^{2\pi s} e^{-iu} u^{-\beta} du \right\} \hat{f}(s), \end{aligned}$$

e então, para cada  $t > 0$  e  $\frac{1}{2} < \beta < 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i s x} d\mu_{\beta,f}(x) \right|^2 ds &\leq M_\beta \frac{1}{t} \int_0^t s^{2(\beta-1)} |\hat{f}(s)|^2 ds \\ &\leq M_\beta \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{t} \int_0^t s^{2(\beta-1)} ds = \frac{M_\beta}{2\beta-1} \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{t^{2(1-\beta)}}, \quad (2.4) \end{aligned}$$

onde  $d\mu_{\beta,f}(x) = K_{\beta,f}(x) dx$ . Para  $\beta = \frac{1}{2}$  e para cada  $t > 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} d\mu_{\beta,f}(x) \right|^2 ds &= \frac{1}{t} \int_0^1 \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} d\mu_{\beta,f}(x) \right|^2 ds \\ &+ \frac{1}{t} \int_1^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} d\mu_{\beta,f}(x) \right|^2 ds \\ &\leq \frac{\|K_{\beta,f}\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{t} + \frac{M_{\beta}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{t} \int_1^t \frac{1}{s} ds \\ &= \frac{\|K_{\beta,f}\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{t} + \frac{M_{\beta}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \log(t)}{t}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Argumentamos que as estimativas superiores (lei de potência) acima não podem ser melhoradas; suponhamos, pelo contrário, que exista  $0 < \varepsilon < 1 - \beta$  tal que se pode trocar  $2(1 - \beta)$  por  $2(1 - \beta) + \varepsilon$  na estimativa (2.4) ou (2.5) (recorde que em (2.5)  $\beta = 1/2$ ). Então, pelo Teorema 2.3-ii), para cada  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\mu_{\beta,f}$  é pelo menos  $U(1 - \beta + \varepsilon/4)H$ .

Agora, escolha, para cada  $0 < \delta < 1 - \beta$  e cada  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$$f_{\delta}(x) = \frac{1}{x^{1-\delta}} \chi_{(0,1]}(x),$$

e  $f_{\delta} \in L^1(\mathbb{R})$ . Note que para  $0 < x \leq 1$ ,

$$K_{\beta,f_{\delta}}(x) = \int_0^1 \frac{1}{y^{\beta}|x-y|^{1-\delta}} dy \geq \int_0^x \frac{1}{y^{\beta}|x-y|^{1-\delta}} dy \geq \frac{1}{x^{\beta}} \int_0^x \frac{1}{|x-y|^{1-\delta}} dy \geq x^{-\beta+\delta}.$$

Assim, para  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$\int_0^{\varepsilon} K_{\beta,f_{\delta}}(x) dx \geq \int_0^{\varepsilon} x^{-\beta+\delta} dx = \frac{\varepsilon^{(1-\beta+\delta)}}{(1-\beta+\delta)},$$

e portanto,  $\mu_{\beta,f_{\delta}}$  é no máximo  $U(1 - \beta + \delta)H$ .

Finalmente, seja  $0 < \delta < \varepsilon/4$ ; então, como  $\mu_{\beta,f_{\delta}}$  é no máximo  $U(1 - \beta + \delta)H$ , chega-se a uma contradição com o fato de que  $\mu_{\beta,f_{\delta}}$  é também  $U(1 - \beta + \varepsilon/4)H$ .

Ressaltamos que aplicando o Teorema 2.3-i), pode-se obter no máximo que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} d\mu_{\beta,f}(x) \right|^2 ds = O(t^{-(1-\beta)+\delta}),$$

que dá um limitante pior do que o dado por (2.4) (respectivamente (2.5) para  $\beta = \frac{1}{2}$ ) para  $0 < \delta < 1 - \beta$ .

Notamos também que o que torna este exemplo interessante é o fato de que a medida tem uma singularidade lei de potência, no sentido de que sua derivada Radon-Nikodym diverge com uma ordem lei de potência.

Neste capítulo usamos análise de Fourier para estender as estimativas em (2.4)-(2.5) para as medidas da forma

$$d\mu_{\beta,f,g}(x) = K_{\beta,f}(x)g(x) dx,$$

com  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e  $g \in L^{\infty}[0, 1]$  (ver Teorema 2.4 adiante), e então discutimos uma aplicação deste resultado para medidas espectrais de perturbações de posto finito do laplaciano. A

saber, justamente levando em consideração o Exemplo 3.1 em [41], usamos esta classe de medidas para obter estados iniciais (para a equação de Schrödinger) para os quais as respectivas medidas espectrais têm singularidades lei de potência, e para os quais o comportamento assintótico das respectivas probabilidades de retorno quântico (em média no tempo) dependa continuamente de tais singularidades (ver Teorema [3.2] e Exemplo [2.2]).

Na subseção [2.2] discutimos uma desigualdade do tipo Strichartz (Teorema [2.4]). Na seção [2.3] usamos alguns resultados bem conhecidos sobre a derivada de Radon-Nikodym de medidas espectrais [30, 42] para apresentar uma aplicação para perturbações de posto finito do laplaciano, o principal resultado deste capítulo. A demonstração do Teorema [2.4] é deixada para a seção [2.4].

## 2.2 Uma desigualdade do tipo Strichartz

Seja  $K_{\beta,f}$  como no Exemplo [2.1],  $g \in L^\infty[0, 1]$  e considere

$$d\mu_{\beta,f,g}(x) = K_{\beta,f}(x)g(x) dx. \quad (2.6)$$

Por simplicidade, suponha que  $f, g$  são funções não-negativas a valores reais. Então, por argumentos padrões em Análise Harmônica [41, 53] (ver [2.19] adiante), é possível mostrar que para cada  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} d\mu_{\beta,f,g}(x) \right|^2 ds &= \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} K_{\beta,f}(x)g(x) dx \right|^2 ds \\ &\leq \frac{e^{2\pi}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K_{\beta,f}(x)g(x) \\ &\quad \times K_{\beta,f}(y)g(y)e^{-\frac{t^2|x-y|^2}{4}} dx dy. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Além disso, para cada  $x \in \mathbb{R}$  e cada  $0 < \epsilon < 1$ , tem-se

$$\mu_{\beta,f}(B(x, \epsilon)) \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \epsilon^{1-\beta},$$

onde  $d\mu_{\beta,f}(x) = K_{\beta,f}(x)dx$ . Então, usando [2.7] e um argumento do tipo Strichartz (como em [41, 53]), segue-se que para cada  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} d\mu_{\beta,f,g}(x) \right|^2 ds &\leq \frac{e^{2\pi} \|g\|_{L^\infty[0,1]}^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K_{\beta,f}(x)K_{\beta,f}(y)e^{-\frac{t^2|x-y|^2}{4}} dx dy \\ &= \frac{e^{2\pi} \|g\|_{L^\infty[0,1]}^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2|x-y|^2}{4}} d\mu_{\beta,f}(y)d\mu_{\beta,f}(x) \\ &= \frac{e^{2\pi} \|g\|_{L^\infty[0,1]}^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{n}{t} \leq |x-y| < \frac{n+1}{t}} e^{-\frac{t^2|x-y|^2}{4}} d\mu_{\beta,f}(y)d\mu_{\beta,f}(x) \\ &\leq \frac{e^{2\pi} \|g\|_{L^\infty[0,1]}^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2/4} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{\beta-1} d\mu_{\beta,f}(x) \\ &= \frac{e^{2\pi} \|g\|_{L^\infty[0,1]}^2}{\sqrt{\pi}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2/4} \right) \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\quad \times \|K_{\beta,f}\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-(1-\beta)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Assim, pela Desigualdade de Young (Teorema 1.1), tem-se, para cada  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} d\mu_{\beta,f,g}(x) \right|^2 ds &\leq \frac{e^{2\pi} \|g\|_{L^\infty[0,1]}^2}{\sqrt{\pi}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2/4} \right) \\ &\times \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \|(|\cdot|^{-\beta} \chi_{(0,1]})\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-(1-\beta)} \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2/4} \right) \frac{e^{2\pi} \|g\|_{L^\infty[0,1]}^2 \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{\sqrt{\pi}(1-\beta)} t^{-(1-\beta)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Notamos que a estimativa uniforme sob  $x$  na discussão acima torna o decaimento em (2.9) longe de ser ótimo (ver a demonstração do Teorema 2.4 e compare (2.9) com (2.14) e (2.15)). Usando Análise de Fourier, iremos explorar esse ponto do argumento para obter o seguinte resultado.

**Teorema 2.4.** *Para  $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ , sejam  $K_{\beta,f}$  e  $M_\beta$  como anteriormente. Para todo  $g \in L^\infty[0,1]$ , considere  $d\mu_{\beta,f,g}(x) = K_{\beta,f}(x)g(x)dx$ . Então:*

i) se  $\frac{1}{2} < \beta < 1$ , para cada  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} d\mu_{\beta,f,g}(x) \right|^2 ds \leq 2^{18} e^{4\pi^2} M_\beta \Gamma(\beta - 1/2) \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \|g\|_{L^\infty[0,1]}^2 t^{-2(1-\beta)};$$

ii) se  $\beta = \frac{1}{2}$ , para cada  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} d\mu_{\beta,f,g}(x) \right|^2 ds \leq e^{4\pi^2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \|g\|_{L^\infty[0,1]}^2 \left[ \left( \frac{1}{t} + M_{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(0, 4\pi^2/t^2)}{t} \right) \right],$$

em particular, para  $t$  suficientemente grande,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} d\mu_{\beta,f,g}(x) \right|^2 ds \leq e^{4\pi^2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \|g\|_{L^\infty[0,1]}^2 \left[ \left( \frac{1}{t} + 3M_{\frac{1}{2}} \frac{\log(t)}{t} \right) \right],$$

uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(0, 4\pi^2/t^2)}{\log(t)} = 2,$$

onde  $\Gamma(\cdot, \cdot)$  denota a função Gama Incompleta.

### Observação 2.3.

i) Como mencionado no Exemplo 2.1, em geral, não se pode obter uma estimativa (lei de potência) melhor que a estimativa  $O(t^{-2(1-\beta)})$  para toda  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

ii) Se  $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ , então, pela Desigualdade de Young (Teorema 1.1),  $K_{\beta,f} \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$ . Assim, aplicando o Teorema 2.3-i) à  $K_{\beta,f} \cdot g$  e à  $\chi_{[0,1]} dx$  (que é U1H), obtemos

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} d\mu_{\beta,f,g}(x) \right|^2 ds = \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} K_{\beta,f}(x) g(x) dx \right|^2 ds = O(t^{-1}),$$

e  $\beta = 1/2$  é um ponto de transição, então justificando o comportamento peculiar no Teorema 2.4-ii).

iii) Para um  $h \in L^1(\mathbb{R})$  arbitrário, é bem conhecido que  $\hat{h}(s)$  pode decair de forma arbitrariamente lenta (ver, por exemplo, [45]). Neste contexto, para  $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ , é particularmente interessante que o comportamento lei de potência de

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i s x} K_{\beta, f}(x) g(x) dx \right|^2 ds$$

é herdado do comportamento da transformada de Fourier de  $|\cdot|^{-\beta}$ , que depende continuamente de  $\beta$ .

## 2.3 Perturbações de posto finito do laplaciano

Seja  $\delta_j = (\delta_{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , a base canônica de  $\ell^2(\mathbb{N})$ . Sejam também as perturbações de posto finito do laplaciano com condição de Dirichlet, agindo em  $\ell^2(\mathbb{N})$  por

$$\begin{cases} H_0 \psi = \Delta \psi, \\ H_N \psi = \Delta \psi + \sum_{j=1}^N v_j \langle \psi, \delta_j \rangle \delta_j, \end{cases} \quad N \geq 1,$$

com  $\psi(0) = 0$ , onde  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência real.

O estudo das propriedades espectrais e dinâmicas desses operadores é um assunto clássico na teoria espectral por pelo menos dois motivos: é um modelo relativamente simples, e portanto pode ser usado para discutir resultados em dinâmica quântica evitando complicações técnicas; eles podem ser usados como aproximações para alguns operadores de Schrödinger (veja, por exemplo, Seção 3 em [30]). Neste contexto, nosso principal objetivo aqui é estudar a dinâmica quântica desses operadores para alguns estados iniciais cujas medidas espectrais podem ter singularidades lei de potência.

### 2.3.1 Matrizes de transferência e derivada de medidas espectrais

A seguir  $\mu_\psi^N$  denota a medida espectral associada ao par  $(H_N, \psi)$  e  $\frac{d\mu_\psi^N}{dx}$  a derivada de Radon-Nikodym de  $\mu_\psi^N$  com respeito a medida de Lebesgue; seja  $R_N(z) = (H_N - z)^{-1}$  o correspondente operador resolvente. Sabe-se que para cada  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $H_N$  tem espectro puramente absolutamente contínuo (para detalhes, ver [42]). Assim, neste caso,  $\frac{d\mu_\psi^N}{dx} \in L^1(\mathbb{R})$ .

Recorde que para cada  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , a matriz de transferência  $T_N(E, n, n-1)$  entre os sítios  $n-1$  e  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é dada por

$$T_N(E, n, n-1) = \begin{pmatrix} E - v_n \chi_{[1, N]}(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso, se  $u_\theta(E, n)$ , com  $\theta \in [0, \pi]$ , é a solução da equação de autovalor  $H_N u = E u$ , com  $E \in \mathbb{R}$ , que satisfaz

$$u_\theta(E, m) = \sin(\theta), \quad u_\theta(E, m+1) = \cos(\theta),$$

então

$$\begin{pmatrix} u_\theta(E, n+1) \\ u_\theta(E, n) \end{pmatrix} = T_N(E, n, m) \begin{pmatrix} u_\theta(E, m+1) \\ u_\theta(E, m) \end{pmatrix},$$

com  $T_N(E, n, m) = T_N(E, n, n-1) \cdots T_N(E, m+1, m)$ .

**Lema 2.1.** *Seja  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Então, existem constantes  $C_{1,N}, C_{2,N} > 0$  tal que, para cada  $E \in [0, 1]$ ,*

$$C_{1,N} \leq \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx}(E) \leq C_{2,N};$$

em particular,  $\frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx} \in L^\infty[0, 1]$ .

**Observação 2.4.** O resultado no lema acima é esperado, uma vez que como o bordo do intervalo  $[0, 1]$  está longe de  $\pm 2$ , que são os únicos pontos em que  $\frac{d\mu_{\delta_1}^{H_0}}{dx}$  diverge; ver [27] para detalhes da medida espectral  $\mu_{\delta_1}^{H_0}$ .

Para provar o lema acima usaremos alguns resultados técnicos conhecidos, enunciados abaixo.

**Lema 2.2** (Lema 3.1 em [30]). *Seja  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Então, existe  $C > 0$  tal que para cada  $E \in [-1, 1]$ ,*

$$\frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx}(E) \geq \frac{D}{\|T_N(E, N, 0)\|^2}.$$

**Proposição 2.1** (Proposição 3.9 em [30]). *Para cada  $E \in [0, 1]$  e cada  $L \in \mathbb{N}$ ,*

$$\Im \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E + i/L - z} d\mu_{\delta_1}^N(z) \right) \leq (5 + \sqrt{24}) \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L+1} \|T_N(E, n, 0)\|^2.$$

*Demonstração* (Lema [2.1]). *Seja  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Segue-se do Lema [2.2] que existe  $D > 0$  tal que para cada  $E \in [0, 1]$ ,*

$$\frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx}(E) \geq \frac{D}{\|T_N(E, N, 0)\|^2}.$$

Note que existe  $F_N > 0$  tal que para cada  $E \in [0, 1]$ ,  $\|T_N(E, N, 0)\| < F_N$  (como  $T_N(E, N, 0)$  é o produto de  $N$  matrizes cujas normas são limitadas); assim,

$$0 < C_{1,N} := \frac{D}{F_N^2} \leq \inf_{E \in [0,1]} \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx}(E).$$

Agora, se  $n \geq N$ , então  $T_N(E, n+1, n) = T_0(E, n+1, n) = A(E)$ , onde

$$A(E) = \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um cálculo mostra que para  $E \in [0, 1]$ ,  $A(E)$  é similar a uma matriz de rotação. Assim, existe  $C_N > 0$  tal que para cada  $E \in [0, 1]$  e cada  $n \geq N$ ,  $\|T_N(E, n, 0)\|^2 \leq C_N$ . De fato,

$$\|T_N(E, n, 0)\| = \|T_N(E, n, N) \cdots T_N(E, N, 0)\| \leq \|A(E)^{n-N}\| \cdot \|T_N(E, N, 0)\|;$$

como  $A(E)^{n-N}$  é similar a uma rotação e como para cada  $E \in [0, 1]$ ,  $\|T_N(E, N, 0)\|$  é limitado, o resultado segue.

Agora, pela Proposição [2.1], tem-se que para cada  $E \in [0, 1]$  e cada  $L \in \mathbb{N}$ ,

$$\Im \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E + i/L - z} d\mu_{\delta_1}^N(z) \right) \leq (5 + \sqrt{24}) \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L+1} \|T_N(E, n, 0)\|^2.$$

Assim, para cada  $E \in [0, 1]$  e cada  $L \geq N$ ,

$$\begin{aligned} \Im \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E + i/L - z} d\mu_{\delta_1}^N(z) \right) &\leq (5 + \sqrt{24}) \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L+1} \|T_N(E, n, 0)\|^2 \\ &= (5 + \sqrt{24}) \left( \frac{1}{L} \sum_{n=0}^N \|T_N(E, n, 0)\|^2 + \frac{1}{L} \sum_{n=N+1}^{L+1} \|T_N(E, n, 0)\|^2 \right) \\ &\leq (5 + \sqrt{24}) \left( \frac{1}{L} \sum_{n=0}^N \|T_N(E, n, 0)\|^2 + \frac{L-N}{L} C_N \right). \end{aligned}$$

Pela Fórmula de Stone (ver pág. 244 em [27]), segue-se que para cada  $E \in [0, 1]$

$$\frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx}(E) = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \Im \left\langle \delta_1, R^N \left( E + i \frac{1}{L} \right) \delta_1 \right\rangle = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \Im \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E + i/L - z} d\mu_{\delta_1}^N(z) \right).$$

como  $\sum_{n=0}^N \|T_N(E, n, 0)\|^2$  não depende de  $L$ , obtém-se

$$C_{2,N} := \frac{C_N}{\pi} (5 + \sqrt{24}) \geq \sup_{E \in [0,1]} \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx}(E).$$

□

### 2.3.2 Singularidades lei de potência e dinâmica quântica

Recorde que, para cada  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-itH_N}$  é um grupo unitário de evolução e, para cada  $\psi \in \ell^2(\mathbb{N})$ ,  $(e^{-itH_N}\psi)_{t \in \mathbb{R}}$  é a única solução da equação de Schrödinger

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t) = -iH_N \psi(t), & t \in \mathbb{R}, \\ \psi(0) = \psi \in \ell^2(\mathbb{N}). \end{cases}$$

A seguir, recordamos uma quantidade dinâmica, usualmente considerada para sondar o comportamento a longo tempo de  $e^{-itH_N}\psi$ , a então chamada *probabilidade média de retorno quântica*, que dá a probabilidade de encontrar a partícula em  $t > 0$  em seu estado inicial  $\psi$ :

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi, e^{-isH_N} \psi \rangle|^2 ds.$$

Para  $0 \leq \beta < 1$  e cada  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , seja

$$K_{\beta,f} = \{(| \cdot |^{-\beta} \chi_{(0,1]}) * f\}.$$

Suponha que  $f \geq 0$  e defina

$$\psi_{\beta,f} := \sqrt{K_{\beta,f}}(H_N) \delta_1, \quad (2.10)$$

onde cada  $\sqrt{K_{\beta,f}}(H_N) : \text{dom}(\sqrt{K_{\beta,f}}(H_N)) \subset \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$  é definido através do cálculo funcional: para cada  $\psi \in \text{dom}(\sqrt{K_{\beta,f}}(H_N))$ , tem-se

$$\langle \psi, \sqrt{K_{\beta,f}}(H_N) \psi \rangle = \int \sqrt{K_{\beta,f}(x)} d\mu_{\psi}^{H_N}(x).$$

Note que  $\delta_1 \in \text{dom}(\sqrt{K_{\beta,f}}(H_N))$ , uma vez que  $\sqrt{K_{\beta,f}} \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\delta_1}^{H_N})$ ; note também que se  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ , então para cada  $x \in (0, 1)$ ,  $\lim_{\beta \downarrow 0} \sqrt{K_{\beta,f}}(x) = 1$ , por convergência dominada. Assim,

$$\lim_{\beta \downarrow 0} \psi_{\beta,f} = \delta_1.$$

Nosso próximo resultado descreve o comportamento da *probabilidade de retorno quântica* dos estados iniciais  $\psi_{\beta,f}$ .

**Teorema 2.5.** *Seja  $\psi_{\beta,f}$  como antes, com  $0 \leq f \in L^1(\mathbb{R})$ . Então:*

i) se  $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ , para cada  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta,f}, e^{-isH_N} \psi_{\beta,f} \rangle|^2 ds \leq \frac{20\pi \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{(1-2\beta)} \left\| \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx} \right\|_{L^\infty[0,1]}^2 t^{-1};$$

ii) se  $\frac{1}{2} < \beta < 1$ , para cada  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta,f}, e^{-isH_N} \psi_{\beta,f} \rangle|^2 ds \leq \frac{\Gamma(\beta - 1/2) 2^{18} e^{4\pi^2} M_\beta \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \left\| \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx} \right\|_{L^\infty[0,1]}^2}{(2\pi)^{2(\beta-1)}} t^{-2(1-\beta)};$$

iii) se  $\beta = \frac{1}{2}$ , para cada  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta,f}, e^{-isH_N} \psi_{\beta,f} \rangle|^2 ds \leq 4\pi^2 e^{4\pi^2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \left\| \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx} \right\|_{L^\infty[0,1]}^2 \left[ \frac{1}{t} + M_{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(0, 16\pi^4/t^2)}{t} \right],$$

em particular, para  $t$  suficientemente grande

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta,f}, e^{-isH_N} \psi_{\beta,f} \rangle|^2 ds \leq 4\pi^2 e^{4\pi^2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \left\| \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx} \right\|_{L^\infty[0,1]}^2 \left[ \frac{1}{t} + 3M_{\frac{1}{2}} \frac{\log(t)}{t} \right].$$

**Observação 2.5.** Aplicando o Teorema [2.4](#), em geral, pode-se estender o resultado acima para famílias de operadores de Schrödinger cujas derivadas de Radon-Nikodym de cada medida espectral (em relação à medida de Lebesgue) são limitadas (veja a demonstração do Teorema [2.5](#)).

**Exemplo 2.2.** Seja  $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$  e  $0 < \delta < 1 - \beta$ . Seja  $f_\delta \in L^1(\mathbb{R})$  com  $\int_0^1 f_\delta(x) dx = 1$  e suponha que existe  $C > 0$  de modo que, para cada  $w \in (0, 1]$ ,

$$f_\delta(w) \geq \frac{C}{w^{1-\delta}}.$$

Consequentemente, para cada  $0 < w \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} K_{\beta,f_\delta}(w) &\geq C \int_0^1 \frac{1}{y^\beta |w-y|^{1-\delta}} dy \geq C \int_0^w \frac{1}{y^\beta |w-y|^{1-\delta}} dy \\ &\geq \frac{C}{w^\beta} \int_0^w \frac{1}{|w-y|^{1-\delta}} dy \geq C w^{-\beta+\delta}. \end{aligned}$$

Assim, para cada  $0 < \epsilon < 1$ ,

$$\begin{aligned}\mu_{\psi_{\beta,f,\delta}}((0, \epsilon)) &= \int_0^\epsilon K_{\beta,f,\delta}(w) \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx}(w) dw \\ &\geq CC_{1,N} \int_0^\epsilon w^{-\beta+\delta} dw = CC_{1,N} \frac{\epsilon^{(1-\beta+\delta)}}{(1-\beta+\delta)},\end{aligned}$$

com  $C_{1,N}$  dado pelo Lema 2.1. Portanto, neste caso,

$$d\mu_{\psi_{\beta,f,\delta}} = K_{\beta,f,\delta} \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx} dx$$

é no máximo  $U(1-\beta+\delta)H$ , e então, pelo Teorema 2.3-i), pode-se dizer no máximo que

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta,f,\delta}, e^{-isH_N} \psi_{\beta,f,\delta} \rangle|^2 ds = O(t^{-(1-\beta)-\delta}).$$

Ademais, segue do Teorema 2.5 que, para cada  $\frac{1}{2} < \beta < 1$ ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta,f,\delta}, e^{-isH_N} \psi_{\beta,f,\delta} \rangle|^2 ds = O(t^{-2(1-\beta)}) \quad (2.11)$$

e para  $\beta = \frac{1}{2}$ ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{1/2,f,\delta}, e^{-isH_N} \psi_{1/2,f,\delta} \rangle|^2 ds = O(\log(t)/t). \quad (2.12)$$

Notamos que as taxas acima são ótimas (lei de potência). De fato, se existe  $\varepsilon > 0$  tal que se pode trocar  $t^{-2(1-\beta)}$  por  $t^{-2(1-\beta)+\varepsilon}$  em (2.11) ou (2.12), então pelo Teorema 2.3-ii),  $\mu_{\psi_{\beta,f,\delta}}$  será pelo menos uniformemente  $(1-\beta+\varepsilon/4)$ -Hölder; para  $0 < \delta < \varepsilon/4$ , uma contradição.

**Observação 2.6.** Para cada  $0 < \delta < 1-\beta$ , o Exemplo 2.2 apresenta uma família de estados iniciais,  $\psi_{\beta,f,\delta}$ , com  $\lim_{\beta \downarrow 0} \psi_{\beta,f,\delta} = \delta_1$  e para os quais as taxas lei de potência das probabilidades de retorno quânticas dependem continuamente das taxas de crescimento das singularidades das respectivas medidas espectrais.

*Demonstração* (Teorema 2.5). i) Segue-se do Teorema Espectral que para cada  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta}, e^{-isH_N} \psi_{\beta} \rangle|^2 ds &= \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-isy} K_{\beta,f}(y) d\mu_{\delta_1}^N(y) \right|^2 ds \\ &= \frac{2\pi}{t} \int_0^{\frac{t}{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isy} K_{\beta,f}(y) \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx}(y) dy \right|^2 ds.\end{aligned}$$

Como  $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ , pela desigualdade de Young (Teorema 1.1) e pelo Lema 2.1,  $K_{\beta,f} \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx} \in L^2(\mathbb{R})$ . Assim, pelo Teorema 2.3-i) aplicado para  $d\mu = \chi_{[0,1]} dy$  e para a função  $K_{\beta,f}(y) \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx}(y)$ , obtém-se, para cada  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta,f}, e^{-itH_N} \psi_{\beta,f} \rangle|^2 ds &= \frac{2\pi}{t} \int_0^{\frac{t}{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isy} K_{\beta,f}(y) \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx}(y) dy \right|^2 ds \\ &\leq 10 \|K_{\beta,f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \left\| \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx} \right\|_{L^\infty[0,1]}^2 2\pi t^{-1} \\ &\leq \frac{20\pi \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{(1-2\beta)} \left\| \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx} \right\|_{L^\infty[0,1]}^2 t^{-1}.\end{aligned}$$

Observamos que se  $d\mu = \chi_{[0,1]}dx$ , então pode-se tomar  $C_\mu = 10$  no Teorema [2.3](#)-i); para detalhes, ver página 416 em [41](#).

ii) e iii) Seja  $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ ; como para cada  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_{\beta,f}, e^{-isH_N} \psi_{\beta,f} \rangle|^2 ds = \frac{2\pi}{t} \int_0^{\frac{t}{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isy} d\mu_{\beta,f,g}(y) \right|^2 ds,$$

onde  $g = \frac{d\mu_{\delta_1}^N}{dx}$ , ii) e iii) são consequências diretas do Lema [2.1](#) e do Teorema [2.4](#).  $\square$

## 2.4 Demonstração da desigualdade do tipo Strichartz

**Lema 2.3.** *Seja  $K_{\beta,f}$  como em [2.3](#).*

i) Se  $\frac{1}{2} < \beta < 1$ , então, para cada  $t > 0$ , tem-se

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2 |x-y|^2} K_{\beta,f}(x) \overline{K_{\beta,f}(y)} dx dy \right| \leq M_\beta \Gamma(\beta - 1/2) \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 t^{-2(1-\beta)}.$$

ii) If  $\beta = \frac{1}{2}$ , então, para cada  $t > 0$ , tem-se

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2 |x-y|^2} K_{\beta,f}(x) \overline{K_{\beta,f}(y)} dx dy \right| \leq \frac{\pi \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{t} + M_{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \frac{\Gamma(0, \pi/t^2)}{t},$$

e recorde que  $M_\beta$  é dado por [2.2](#).

*Demonstração.* Sejam  $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$  e  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n - K_{\beta,f}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

Então, pelo Teorema 4.9 em [15](#), existe uma subsequência  $(K_{n_k})$  e uma função  $h \in L^1(\mathbb{R})$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} K_{n_k}(x) = K_{\beta,f}(x)$  para quase todo  $x \in \mathbb{R}$ , e para cada  $k \geq 1$ ,  $|K_{n_k}(x)| \leq h(x)$  para quase todo  $x \in \mathbb{R}$ . Note que para cada  $t > 0$ , cada  $k \geq 1$  e cada  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} |\widehat{K_{n_k}}(\xi)| \leq e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} \|K_{n_k}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

e para cada  $t > 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} d\xi = t.$$

Isto mostra que, para cada  $t > 0$ , a sequência  $e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} |\widehat{K_{n_k}}(\xi)|$  é dominada por uma função integrável.

Escolha, para cada  $t > 0$  e cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi_t(x) := e^{-\pi t|x|^2}$ . Então, para cada  $t > 0$ ,

$$\widehat{\Phi}_t(\xi) = \frac{1}{t} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Segue-se da identidade em (2.13), algumas propriedades básicas da transformada de Fourier, convergência dominada e Teorema de Plancherel que para cada  $y \in \mathbb{R}$  e cada  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2|x-y|^2} K_{\beta,f}(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2|x-y|^2} K_{n_k}(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{(\tau_y \Phi_t)(x)} K_{n_k}(x) dx \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{(\tau_y \Phi_t)(\xi)} \widehat{K_{n_k}}(\xi) d\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i y \xi} \widehat{\Phi_t}(\xi) \widehat{K_{n_k}}(\xi) d\xi \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i y \xi} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} \widehat{K_{n_k}}(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i y \xi} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} \widehat{K_{\beta,f}}(\xi) d\xi. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Fubini (Teorema 10.10 em [13]), obtém-se para cada  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2|x-y|^2} K_{\beta,f}(x) \overline{K_{\beta,f}}(y) dx dy &= \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i y \xi} \overline{K_{\beta,f}}(y) dy e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} \widehat{K_{\beta,f}}(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} |\widehat{K_{\beta,f}}(\xi)|^2 d\xi. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema de Convolução, segue-se que para cada  $\xi > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\widehat{K_{\beta,f}}(\xi) &= \left\{ \int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} x^{-\beta} dx \right\} \hat{f}(\xi) = \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{1-\beta} \xi^{1-\beta}} \int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} (2\pi x \xi)^{-\beta} (2\pi \xi) dx \right\} \hat{f}(\xi) \\
&= \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{1-\beta} \xi^{1-\beta}} \int_0^{2\pi \xi} e^{-i u} u^{-\beta} du \right\} \hat{f}(\xi). \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Tem-se também, para cada  $\xi < 0$ , que

$$\widehat{K_{\beta,f}}(\xi) = \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{1-\beta} (-\xi)^{1-\beta}} \int_0^{-2\pi \xi} e^{-i u} u^{-\beta} du \right\} \overline{\hat{f}(\xi)}.$$

Assim, para  $\xi \neq 0$ ,

$$|\widehat{K_{\beta,f}}(\xi)|^2 \leq M_{\beta} \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{|\xi|^{2(1-\beta)}}. \tag{2.17}$$

Agora um argumento separado é necessário para cada item. *i)*  $1/2 < \beta < 1$ . Como pelo Teorema de Resíduos de Cauchy (Teorema 10.29 em [49]), para todo  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}}}{|\xi|^{2(1-\beta)}} d\xi &= \pi^{1/2-\beta} \Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right) t^{2\beta-1} \\
&\leq \Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right) t^{2\beta-1}, \tag{2.18}
\end{aligned}$$

tem-se de (2.15) e (2.17) que para cada  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2|x-y|^2} K_{\beta,f}(x) \overline{K_{\beta,f}}(y) dx dy &= \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} |\widehat{K_{\beta,f}}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \frac{M_{\beta} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{t} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}}}{|\xi|^{2(1-\beta)}} d\xi \\
&\leq \Gamma(\beta - 1/2) M_{\beta} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 t^{-2(1-\beta)}.
\end{aligned}$$

ii)  $\beta = 1/2$ . Por (2.16), para cada  $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} |\widehat{K_{\beta,f}}(\xi)|^2 d\xi &\leq 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \int_0^1 e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} \frac{1}{\xi} \left( \int_0^{2\pi\xi} \frac{1}{\sqrt{u}} du \right)^2 d\xi \\ &= \pi\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \int_0^1 e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} d\xi \leq \pi\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Como, pelo Teorema de Resíduos de Cauchy (Teorema 10.29 em [49]), para cada  $t > 0$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}}}{\xi} d\xi = \frac{\Gamma(0, \pi/t^2)}{2},$$

obtêm-se de (2.15) e (2.17) que para cada  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2|x-y|^2} K_{\beta,f}(x) \overline{K_{\beta,f}}(y) dx dy &= \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} |\widehat{K_{\beta,f}}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{t} \int_{-1}^1 e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} |\widehat{K_{\beta,f}}(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_{|\xi|>1} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} |\widehat{K_{\beta,f}}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{t} \int_{-1}^1 e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}} |\widehat{K_{\beta,f}}(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \frac{2M_{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{t} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}}}{\xi} d\xi \\ &\leq \frac{\pi\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{t} + M_{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \frac{\Gamma(0, \pi/t^2)}{t}. \end{aligned}$$

□

**Observação 2.7.** Como a integral  $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t^2}}}{|\xi|} d\xi$  não converge, um argumento separado é necessário para o caso  $\beta = \frac{1}{2}$ .

*Demonstração* (Teorema 2.4). A demonstração do Teorema 2.4 é uma consequência do Lema 2.3 e do Teorema de Fubini (Teorema 10.10 em [13]). Apresentamos detalhes da prova do item i): pela linearidade do produto de convolução, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 1$  e  $\|g\|_{L^\infty[0,1]} \leq 1$ . Nós dividimos a demonstração em dois casos.

**Caso 1:**  $f, g$  são funções de valores reais não-negativas. Pelo Teorema de Fubini (Teorema 10.10 em [13]), tem-se, para cada  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} K_{\beta,f}(x) g(x) dx \right|^2 ds &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} K_{\beta,f}(x) g(x) dx \right|^2 e^{4\pi^2 - (2\pi s)^2/t^2} ds \\
&\leq \frac{e^{4\pi^2}}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} K_{\beta,f}(x) g(x) dx \right|^2 e^{-(2\pi s)^2/t^2} ds \\
&= \frac{e^{4\pi^2}}{t} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K_{\beta,f}(x) g(x) \overline{K_{\beta,f}(y) g(y)} \\
&\quad \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-((2\pi s)^2/t^2) - 2\pi is(x-y)} ds \right\} dx dy \\
&= \frac{e^{4\pi^2} \sqrt{\pi}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K_{\beta,f}(x) g(x) K_{\beta,f}(y) g(y) e^{-\frac{t^2|x-y|^2}{4}} dx dy \\
&\leq \frac{e^{4\pi^2} \sqrt{\pi}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K_{\beta,f}(x) K_{\beta,f}(y) e^{-\frac{t^2|x-y|^2}{4}} dx dy \\
&= \frac{e^{4\pi^2} \sqrt{\pi}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K_{\beta,f}(x) \\
&\quad \times K_{\beta,f}(y) e^{-\pi(t/2\sqrt{\pi})^2|x-y|^2} dx dy. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Segue-se então de (2.19) combinado ao Lema 2.3 i) que, para cada  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} K_{\beta,f}(x) g(x) dx \right|^2 ds \leq \frac{\Gamma(\beta - 1/2) e^{4\pi^2} M_{\beta} \sqrt{\pi}}{2^{2\beta-1} \pi^{\beta}} t^{-2(1-\beta)}.$$

**Caso 2:**  $f, g$  são a valores complexos. Este caso é uma consequência direta do **Caso 1**. De fato, pela linearidade do produto de convolução, pela desigualdade  $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ ,  $a, b > 0$ , e pela identidade

$$\begin{aligned}
K_{\beta,f} \cdot g &= \left\{ K_{\beta, \Re(f)^+} - K_{\beta, \Re(f)^-} + i \left( K_{\beta, \Im(f)^+} - K_{\beta, \Im(f)^-} \right) \right\} \\
&\quad \times \left\{ \Re(g)^+ - \Re(g)^- + i \left( \Im(g)^+ - \Im(g)^- \right) \right\},
\end{aligned}$$

se segue que, para cada  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi isx} K_{\beta,f}(x) g(x) dx \right|^2 ds \leq \frac{\Gamma(\beta - 1/2) 2^{16} e^{4\pi^2} M_{\beta} \sqrt{\pi}}{2^{2\beta-1} \pi^{\beta}} t^{-2(1-\beta)}.$$

□

# Capítulo 3

## Taxas de convergência para o Teorema Ergódico de von Neumann

Como mencionado na introdução, nosso principal objetivo aqui é

- exibir os expoentes de decaimento lei de potência no Teorema ergódico de von Neumann (Teorema [3.2](#));
- demonstrar que para operadores que possuem espectro puramente absolutamente contínuo em  $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ , na ausência de um gap espectral, as taxas de convergência lei de potência no Teorema ergódico de von Neumann têm um comportamento oscilando entre um decaimento rápido lei de potência e um decaimento lento lei de potência (Teorema [3.3](#)).

Os resultados apresentados neste capítulo são análogos aos obtidos em [\[4\]](#) sobre as taxas de convergência de semigrupos normais (ver também [\[1, 2, 3, 5, 19, 21\]](#)). A diferença técnica é que, para semigrupos normais, basta analisar a parte real (auto-adjunta) do gerador para avaliar as taxas de convergência (lei de potência), enquanto aqui é preciso analisar as propriedades espectrais dos operadores unitários.

Notamos que uma adaptação dos argumentos em [\[4\]](#) poderia ser feita para estudar as taxas de convergência em TEvN para sistemas dinâmicos contínuos, pois este caso leva naturalmente a geradores autoadjuntos.

### 3.1 Contextualização

Como mencionado anteriormente, o estudo de taxas de convergência para teoremas ergódicos é um assunto estabelecido em teoria espectral e sistemas dinâmicos (ver [\[14, 21, 35, 36, 37, 38, 39, 47, 54\]](#) e referências lá citadas). Neste capítulo, obteremos alguns resultados de taxas de convergência (lei de potência) a respeito do TEvN na ausência de um gap espectral em  $z = 1$  (ou seja, caso  $z = 1$  não seja um ponto isolado do espectro de  $U$ ).

#### 3.1.1 Expoentes de decaimento e comportamento genérico

A seguir, lembramos o resultado devido a Kachurovskii e Sedalishchev [\[36\]](#), mencionado na Observação [1.3](#), que relaciona as taxas de convergência (lei de potência) em TEvN com as propriedades de escala local de  $\mu_{\psi-\psi^*}^U$  em  $z = 1$ , caso não haja gap espectral.

Recorde que, para cada  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ ,

$$S_\epsilon = \{e^{2\pi i\theta} \mid -\epsilon < \theta < \epsilon\}.$$

**Teorema 3.1** (Teorema 1 em [36]). *Seja  $U$  um operador unitário em  $\mathcal{H}$ ,  $\psi \in \mathcal{H}$  e  $0 < \alpha < 2$ .*

*i) Se existir  $C_\psi > 0$  de forma que, para cada  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ ,  $\mu_{\psi-\psi^*}^U(S_\epsilon) \leq C_\psi \epsilon^\alpha$ , então existe  $\tilde{C}_\psi > 0$  tal que, para cada  $K \in \mathbb{N}$*

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 \leq \frac{\tilde{C}_\psi}{K^\alpha}.$$

*ii) Reciprocamente, se existir  $C_\psi > 0$  de modo que, para cada  $K \in \mathbb{N}$ ,*

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 \leq \frac{C_\psi}{K^\alpha},$$

*então existe  $\tilde{C}_\psi > 0$  tal que para cada  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ ,  $\mu_{\psi-\psi^*}^U(S_\epsilon) \leq \tilde{C}_\psi \epsilon^\alpha$ .*

**Observação 3.1.** Embora o Teorema [3.1] tenha sido originalmente estabelecido para operadores de Koopman, sua demonstração vale para qualquer operador unitário.

A partir do Lema [1.2] e do Teorema [3.1] fica claro que, neste cenário, o comportamento das taxas de convergência (lei de potência) em TEvN depende apenas das propriedades de escala local de  $\mu_{\psi-\psi^*}^U$  em  $z = 1$ . Levando isso em consideração, nós mostramos através do próximo resultado que essas taxas de convergência são de fato governadas pelos *expoentes pontuais* inferior e superior de  $\mu_{\psi-\psi^*}^U$  em  $z = 1$ . Recorde a definição de *expoentes pontuais* em [6].

**Teorema 3.2.** *Considere  $U$  um operador unitário em  $\mathcal{H}$ ,  $0 \neq \psi \in \mathcal{H}$  e suponha que  $0 \leq d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^+(1) \leq 2$ . Então,*

$$-\liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2}{\ln K} = d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^+(1), \quad (3.1)$$

$$-\limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2}{\ln K} = d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^-(1). \quad (3.2)$$

**Observação 3.2.** É bem conhecido que para operadores de Koopman, para cada  $\psi \in \mathcal{H}$  tal que  $\psi - \psi^* \neq 0$ , a respectiva média de tempo apresentada em TEvN não converge para  $\psi^*$  mais rápido que  $K^{-2}$  (veja, por exemplo, Corolário 5 em [29]). Nesse sentido, como a maioria das aplicações possíveis do Teorema [3.2] estão relacionadas aos operadores de Koopman, e para estes operadores  $0 \leq d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^+(1) \leq 2$ , a hipótese de que  $0 \leq d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^+(1) \leq 2$  é bastante razoável.

**Observação 3.3.** O problema de obter os expoentes de decaimentos de quantidades dinâmicas em termos de propriedades dimensionais de medidas em sistemas dinâmicos e dinâmica quântica é bastante natural e recorrente na literatura; ver, por exemplo, [4, 9, 12, 11, 21, 34]. Neste contexto, o Teorema 3.2 acrescenta algo ao corpo do conhecimento sobre taxas de convergência (lei de potência) em TEvN; de fato, o mesmo estabelece uma relação explícita entre as taxas de convergência (lei de potência) de tal média temporal e as propriedades espectrais de escala local do operador unitário  $U$  em  $z = 1$ .

Pelo Teorema 3.2, se para algum  $\psi \in \mathcal{H}$  tem-se

$$0 \leq d_{\mu_{\psi-\psi^*}}^- (1) < d_{\mu_{\psi-\psi^*}}^+ (1) \leq 2, \quad (3.3)$$

então as taxas de convergência da lei de potência (relacionadas a  $\psi$ ) no TEvN realmente dependem de sequências de tempo indo para o infinito.

Escreva  $L := UP^U(\partial\mathbb{D} \setminus \{1\})$ ; aqui, também demonstramos que a condição (3.3) é satisfeita para um operador unitário  $U$  e para um conjunto denso de vetores  $G_\delta$  em  $\mathcal{H}$ , se  $L^j$  convergir para zero na topologia fraca de operadores (isto é, para cada par  $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ ,  $\langle L^j \psi, \varphi \rangle \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ ) e se 1 for um ponto de acumulação de  $\sigma(U)$ .

**Teorema 3.3.** *Seja  $U$  um operador unitário em  $\mathcal{H}$  tal que 1 seja um ponto de acumulação de seu espectro  $\sigma(U)$ . Se  $L^j$  (lembre-se que  $L = UP^U(\partial\mathbb{D} \setminus \{1\})$ ) converge para zero na topologia fraca de operadores, então o conjunto de  $\psi \in \mathcal{H}$  tal que, para todo  $\epsilon > 0$ ,*

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 = \infty$$

e

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} K^{2-\epsilon} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 = 0,$$

é conjunto  $G_\delta$  denso em  $\mathcal{H}$ .

Na seção 3.2, ilustramos nossos resultados gerais apresentando uma aplicação explícita do Teorema 3.3 aos operadores de Koopman. As demonstrações dos Teoremas 3.2 e 3.3 são deixadas para a seção 3.3.

## 3.2 Aplicação para operadores de Koopman

Seja  $(X, \mathcal{A}, m)$  um espaço de Lebesgue com medida contínua  $m$  (isto é, um espaço de probabilidade não atômico obtido pela completção de uma medida de Borel em um espaço métrico separável completo); para cada automorfismo  $T$  em  $X$ , o operador de Koopman está definido (ver também seção 1.3.2) pela lei,

$$U_T : L_m^2(X) \rightarrow L_m^2(X), \quad (U_T f)(x) := f(Tx), \quad x \in X.$$

Aqui, dizemos que  $\sigma(U_T)$  é puramente absolutamente contínuo em  $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$  se  $U_T$  é puramente absolutamente contínuo em

$$\{f \in L_m^2(X) \mid \int_X f(x) dm(x) = 0\};$$

observe que 1 é sempre um autovalor do operador Koopman, uma vez que  $U_T \varphi = \varphi$  para cada função constante  $\varphi$ .

**Teorema 3.4.** *Seja  $T$  um automorfismo em  $X$  com espectro absolutamente contínuo em  $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$  sendo que  $1$  é um ponto de acumulação de  $\sigma(U_T)$ . Então, o conjunto de vetores  $\psi \in L_m^2(X)$  tal que, para todo  $\epsilon > 0$ ,*

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U_T^j \psi - \psi^* \right\|^2 = \infty$$

e

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} K^{2-\epsilon} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U_T^j \psi - \psi^* \right\|^2 = 0,$$

é um conjunto  $G_\delta$  denso em  $L_m^2(X)$ .

**Observação 3.4.**

- i) O Teorema 3.4 aplica-se a  $K$ -automorfismos, em particular aos deslocamentos de Bernoulli 48].
- ii) Note que sob as hipóteses do Teorema 3.4, segue do Teorema 3.2 e Observação 3.2 que para um típico  $\psi \in L_m^2(X)$ ,  $d_{\mu_{\psi-\psi^*}}^-(1) = 0$  e  $d_{\mu_{\psi-\psi^*}}^+(1) = 2$ .

A demonstração do Teorema 3.4 é uma consequência direta do Teorema 3.3 e do próximo resultado.

**Proposição 3.1.** *Considere  $U$  um operador unitário em  $\mathcal{H}$  com espectro absolutamente contínuo em  $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$  e  $L = UP^U(\partial\mathbb{D} \setminus \{1\})$ . Então,  $L^j$  converge fracamente para zero para  $j \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* Para cada  $\phi \in \mathcal{H}$ , seja

$$\mathcal{H}_\phi := \{P^U(g)\phi \mid g \in L_{\mu_\phi}^2(\partial\mathbb{D})\}$$

o subespaço cíclico gerado por  $\phi$ ,  $P_\phi$  a correspondente projeção ortogonal sobre  $\mathcal{H}_\phi$  e  $F : \mathcal{H}_\phi \rightarrow L_{\mu_\phi}^2(\partial\mathbb{D})$  o operador unitário dado por  $F(P^U(g)\phi) = g$  (observe que neste caso  $L = P^U(g\chi_{\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}})$ , com  $g(z) = z$ ).

Fixe  $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$  e seja  $h \in L_{\mu_\psi}^2(\partial\mathbb{D})$  tal que  $P_\psi\varphi = P^U(h)\psi$ . Seja também  $\{g_n\}$  uma sequência no espaço das funções Borel limitadas em  $\partial\mathbb{D}$ , que é denso em  $L_{\mu_\psi}^2(\partial\mathbb{D})$ , com  $\|g_n - h\|_{L_{\mu_\psi}^2(\partial\mathbb{D})} \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ .

Agora, como  $\mu_\psi^U(\cdot \cap \partial\mathbb{D} \setminus \{1\})$  é absolutamente contínua, segue-se do Teorema de Radon-Nikodym que existe  $f \in L^1(\partial\mathbb{D} \setminus \{1\})$  tal que  $d\mu_\psi^U(z) = f(z)dz$ . Então,  $g_n f \in L^1(\partial\mathbb{D} \setminus \{1\})$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , e então, segue-se do Lema de Riemann-Lebesgue que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \langle L^j \psi, P^U(g_n)\psi \rangle &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}} z^j g_n(z) d\mu_\psi^U(z) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}} z^j g_n(z) f(z) dz \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{2i\pi\theta j} g_n(e^{2i\pi\theta}) f(e^{2i\pi\theta}) d\theta = 0; \end{aligned} \quad (3.4)$$

acima usamos o fato de que a medida de Lebesgue sobre  $\partial\mathbb{D}$  é o pushforward, em relação a  $h : [0, 1) \rightarrow \partial\mathbb{D}$ ,  $h(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ , da medida de Lebesgue sobre  $[0, 1)$ . Por outro lado, para cada  $j \geq 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} |\langle L^j \psi, \varphi \rangle - \langle L^j \psi, P^U(g_n) \psi \rangle| &= |\langle P_\psi L^j \psi, \varphi \rangle - \langle L^j \psi, P^U(g_n) \psi \rangle| \\ &= |\langle L^j \psi, P_\psi \varphi \rangle - \langle L^j \psi, P^U(g_n) \psi \rangle| \\ &= |\langle L^j \psi, P^U(h) \psi - P^U(g_n) \psi \rangle| \\ &\leq \|\psi\| \|P^U(h) \psi - P^U(g_n) \psi\| \\ &= \|\psi\| \|h - g_n\|_{L^2_{\mu_\psi^U}(\partial\mathbb{D})}, \end{aligned}$$

e então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle L^j \psi, \varphi \rangle - \langle L^j \psi, P^U(g_n) \psi \rangle| = 0.$$

Note que esta convergência é uniforme em  $j$ . Portanto, combinando este resultado com a relação (3.4) e o Teorema de Moore-Osgood [44], obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \langle L^j \psi, \varphi \rangle &= \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle L^j \psi, P^U(g_n) \psi \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \langle L^j \psi, P^U(g_n) \psi \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

## 3.3 Demonstração dos principais resultados

### 3.3.1 Cálculo dos expoentes de decaimento

Um ingrediente importante na demonstração do Teorema 3.2 é o Lema 3.1, que pode ser obtido usando um argumento idêntico ao apresentados na demonstração do Lema 3.2 em [24]. Portanto, omitimos a prova desse resultado.

**Lema 3.1.** *Seja  $U$  um operador unitário em  $\mathcal{H}$  e  $0 \neq \psi \in \mathcal{H}$ . Seja também  $(K_l)$  uma sequência de inteiros positivos satisfazendo  $K_l \rightarrow \infty$  quando  $l \rightarrow \infty$ . Se para algum  $0 < \alpha < 2$ , existe  $C_\psi > 0$  de modo que, para todo  $K_l$ ,  $\mu_{\psi - \psi^*}(S_{1/K_l}) \leq C_\psi K_l^{-\alpha}$ , então existe  $\tilde{C}_\psi > 0$  tal que para cada  $K_l$*

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \left| \frac{z^{K_l} - 1}{z - 1} \right|^2 d\mu_{\psi - \psi^*}^U(z) \leq \tilde{C}_\psi K_l^{2-\alpha}. \quad (3.5)$$

Vamos proceder agora com a prova do Teorema 3.2. Seja  $f : [0, 1) \rightarrow \partial\mathbb{D}$  dada por  $f(\theta) = e^{2\pi i\theta}$  e represente por  $f^* \mu$  o pull-back, com respeito a  $f$ , de uma medida positiva de Borel  $\mu$  em  $\partial\mathbb{D}$ . Segue-se do Lema 1.2 que para cada  $K \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 &= \frac{1}{K^2} \int_{\partial\mathbb{D}} \left| \frac{z^K - 1}{z - 1} \right|^2 d\mu_{\psi - \psi^*}^U(z) \\ &= \frac{1}{K^2} \int_0^1 \left| \frac{e^{2i\pi\theta K} - 1}{e^{2i\pi\theta} - 1} \right|^2 d(f^* \mu_{\psi - \psi^*}^U)(\theta) \\ &= \frac{1}{K^2} \int_0^1 \left| \frac{\text{sen}(\pi\theta K)}{\text{sen}(\pi\theta)} \right|^2 d(f^* \mu_{\psi - \psi^*}^U)(\theta). \end{aligned}$$

Dado que para cada  $0 < \epsilon < 1$ ,

$$\int_{1-\epsilon}^1 \left| \frac{\text{sen}(\pi\theta K)}{\text{sen}(\pi\theta)} \right|^2 d(f^* \mu_{\psi-\psi^*}^U)(\theta) = \int_{-\epsilon}^0 \left| \frac{\text{sen}(\pi\theta K)}{\text{sen}(\pi\theta)} \right|^2 d(f^* \mu_{\psi-\psi^*}^U)(\theta),$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 &= \frac{1}{K^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left| \frac{\text{sen}(\pi\theta K)}{\text{sen}(\pi\theta)} \right|^2 d(f^* \mu_{\psi-\psi^*}^U)(\theta) \\ &+ \frac{1}{K^2} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \left| \frac{\text{sen}(\pi\theta K)}{\text{sen}(\pi\theta)} \right|^2 d(f^* \mu_{\psi-\psi^*}^U)(\theta) \\ &\geq \frac{1}{K^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left| \frac{\text{sen}(\pi\theta K)}{\text{sen}(\pi\theta)} \right|^2 d(f^* \mu_{\psi-\psi^*}^U)(\theta). \end{aligned}$$

Como para cada  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $\frac{|\theta|}{2} \leq |\text{sen}(\theta)| \leq 2|\theta|$ , segue-se que para cada  $K \geq 2$  e cada  $0 < \epsilon < 1/K$ ,

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 \geq \frac{(f^* \mu_{\psi-\psi^*}^U)(-\epsilon, \epsilon)}{16} = \frac{\mu_{\psi-\psi^*}^U(S_\epsilon)}{16}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} -\liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2}{\ln K} &\leq d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^+ (1), \\ -\limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2}{\ln K} &\leq d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^- (1). \end{aligned}$$

Recorde a definição de *expoentes pontuais* em (6).

Agora, se  $d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^+ (1) = 0$ , então a desigualdade complementar em (3.1) é imediata; caso contrário, para cada  $0 < \epsilon < d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^+ (1) \leq 2$ , existe uma sequência de inteiros positivos  $(K_l)$  com  $\lim_{l \rightarrow \infty} K_l = \infty$  de forma que para cada  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$\mu_{\psi-\psi^*}^U(S_{1/K_l}) \leq K_l^{\epsilon - d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^+ (1)}.$$

Então, pelos Lemas 1.2 e 3.1, segue que existe  $C_{\psi, \epsilon} > 0$  tal que

$$\left\| \frac{1}{K_l} \sum_{j=0}^{K_l-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 \leq C_{\psi, \epsilon} K_l^{\epsilon - d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^+ (1)}.$$

Assim,

$$-\liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2}{\ln K} \geq d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^+ (1) - \epsilon.$$

Dado que  $0 < \epsilon < d_{\mu_{\psi-\psi^*}^U}^+ (1)$  é arbitrário, a desigualdade complementar em (3.1) segue.

A demonstração da desigualdade complementar em (3.2) é análoga e, portanto, é omitida.  $\square$

### 3.3.2 Obtenção dos conjuntos genéricos

Começamos com alguma preparação.

**Teorema 3.5** (Teorema 1 em [7]). *Seja  $L$  um operador linear limitado em  $\mathcal{H}$  tal que  $L^j$  converge fracamente para zero. Suponha que  $1 \in \sigma(L)$ . Então, para cada sequência  $(a_j)_{j \geq 0}$  de números positivos satisfazendo  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$  e para cada  $\delta > 0$ , existe  $\eta \in \mathcal{H}$  tal que  $\|\eta\| < \sup_j \{a_j\} + \delta$  e*

$$\operatorname{Re} \langle L^j \eta, \eta \rangle > a_j, \quad \forall j \geq 0.$$

**Lema 3.2.** *Seja  $U$  um operador unitário em  $\mathcal{H}$ ,  $L = UP^U(\partial\mathbb{D} \setminus \{1\})$ , e suponha que  $L^j$  converge fracamente a zero. Se 1 for um ponto de acumulação de  $\sigma(U)$ , então para cada  $0 < \epsilon < 1$ , existe  $\eta \in \mathcal{H}$  com  $\|\eta\| \leq 1$  e*

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \eta - \eta^* \right\|^2 = \infty.$$

*Demonstração.* Observe que:

- i)  $1 \in \sigma(L)$ , pois 1 é um ponto de acumulação de  $\sigma(U)$ .
- ii)  $L^j$  converge fracamente para zero.
- iii) Pelo cálculo funcional espectral,  $UP^U(\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}) = P^U(\partial\mathbb{D} \setminus \{1\})U$ , e assim, para  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} L^j &= U^j(1 - P^U(\{1\})) \\ &= U^j - U^j P^U(\{1\}) = U^j - P^U(\{1\}). \end{aligned}$$

Seja  $0 < \epsilon' < 1$  tal que  $0 < 2\epsilon' < \epsilon < 1$ . Pelo Teorema 3.5, existe  $\eta \in \mathcal{H}$  com  $\|\eta\| \leq 1$  tal que, para cada  $j \geq 0$ ,

$$\operatorname{Re} \langle L^j \eta, \eta \rangle > \frac{1}{(j+2)^{\epsilon'}}.$$

Assim, para cada  $K > K_0 := 2^{(2-\epsilon')/(1-\epsilon')}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\langle \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} L^j \eta, \eta \right\rangle &> \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{1}{(j+2)^{\epsilon'}} \\ &\geq \frac{1}{K} \int_0^{K-1} \frac{1}{(x+2)^{\epsilon'}} dx \\ &> \frac{K^{1-\epsilon'} - 2^{1-\epsilon'}}{K(1-\epsilon')} > \frac{C}{K^{\epsilon'}}, \end{aligned}$$

com  $C = 1/(2(1-\epsilon'))$ . Por iii) acima, para  $K > K_0$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\langle \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \eta - \eta^*, \eta \right\rangle &= \operatorname{Re} \left( \left\langle \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K-1} L^j \eta, \eta \right\rangle + \left\langle \frac{1}{K} (\eta - \eta^*), \eta \right\rangle \right) \\ &> \frac{C}{K^{\epsilon'}} - \operatorname{Re} \left\langle \frac{\eta^*}{K}, \eta \right\rangle. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, para  $K > K_0$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \eta - \eta^* \right\| > \frac{C}{K^{\epsilon'}} - \frac{1}{K} \\ \Rightarrow & \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \eta - \eta^* \right\|^2 > \frac{C^2}{K^{2\epsilon'}} - \frac{2C}{K^{1+\epsilon'}} + \frac{1}{K^2}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \eta - \eta^* \right\|^2 = \infty,$$

como queríamos. □

Passemos à demonstração do Teorema [3.3](#). Seja  $\epsilon > 0$ ; como para cada  $K \in \mathbb{N}$ , a função

$$\mathcal{H} \ni \psi \mapsto K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|$$

é contínua, segue que

$$\begin{aligned} G^+(\epsilon) & := \left\{ \psi \mid \limsup_{K \rightarrow \infty} K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\| = \infty \right\} \\ & = \bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{l \geq 1} \bigcup_{K \geq l} \left\{ \psi \mid K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\| > n \right\} \end{aligned}$$

é um conjunto  $G_\delta$  em  $\mathcal{H}$ . A demonstração de que

$$G^-(\epsilon) := \left\{ \psi \mid \liminf_{K \rightarrow \infty} K^{2-\epsilon} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\| = 0 \right\}$$

também é um conjunto  $G_\delta$  em  $\mathcal{H}$  é completamente análogo e, portanto, a omitimos.

**Afirmção:** Para cada  $\epsilon > 0$ ,  $G^+(\epsilon)$  e  $G^-(\epsilon)$  são conjuntos densos em  $\mathcal{H}$ .

Segue-se da **Afirmção** e do Teorema de Baire que

$$\mathcal{G} := \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)} \left( G^+(\epsilon) \cap G^-(\epsilon) \right)$$

é um conjunto  $G_\delta$  denso em  $\mathcal{H}$ . Como para cada  $\psi \in \mathcal{G}$  e cada  $\epsilon > 0$ ,

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 = \infty$$

e

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} K^{2-\epsilon} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 = 0,$$

isto conclui a demonstração. Portanto, basta apenas provarmos a **Afirmção**.

**Demonstração da Afirmção.** Fixe  $\epsilon > 0$ .

•  $G^+(\epsilon)$  é denso em  $\mathcal{H}$ . Seja  $0 \neq \psi \in \mathcal{H}$ . Suponha agora que exista  $C_\psi > 0$  tal que para  $K$  suficientemente grande,

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\| \leq \frac{C_\psi}{K^{\epsilon/2}} \quad (3.6)$$

(caso contrário,  $\psi \in G^+(\epsilon)$ ). Do Lema [3.2](#), sabemos que existe  $\eta \in \mathcal{H}$ , com  $\|\eta\| \leq 1$ , tal que

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} K^{\epsilon/3} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \eta - \eta^* \right\|^2 = \infty. \quad (3.7)$$

Finalmente, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , defina  $\psi_m := \psi + \frac{\eta}{m}$ ; naturalmente,  $\psi_m \rightarrow \psi$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Além disso, por [\(3.6\)](#) e [\(3.7\)](#), tem-se para cada  $m \in \mathbb{N}$  e cada  $K$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi_m - \psi_m^* \right\|^2 &= K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\|^2 \\ &+ \frac{2K^\epsilon}{m} \operatorname{Re} \left\langle \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^*, \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \eta - \eta^* \right\rangle \\ &+ \frac{K^\epsilon}{m^2} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \eta - \eta^* \right\|^2 \\ &\geq \frac{2K^\epsilon}{m} \operatorname{Re} \left\langle \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^*, \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \eta - \eta^* \right\rangle \\ &+ \frac{K^\epsilon}{m^2} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \eta - \eta^* \right\|^2 \\ &\geq -\frac{2K^\epsilon}{m} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi - \psi^* \right\| \\ &+ \frac{K^\epsilon}{m^2} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \eta - \eta^* \right\|^2 \\ &\geq -\frac{2K^\epsilon}{m} \cdot \frac{C_\psi}{K^{\epsilon/2}} + \frac{K^\epsilon}{m^2} \cdot \frac{1}{K^{\epsilon/3}}. \end{aligned}$$

Assim, para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} K^\epsilon \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi_m - \psi_m^* \right\|^2 = \infty,$$

da qual se segue que  $G^+(\epsilon)$  é denso em  $\mathcal{H}$ . □

- $G^-(\epsilon)$  é denso em  $\mathcal{H}$ . Seja  $\psi \in \mathcal{H}$  e defina, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A_n := \{1\} \cup \left\{ e^{2\pi i\theta} : \theta \in \left[ \frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n} \right) \right\}$$

e

$$\psi_n := P^U(A_n)(\psi - \psi^*) + \psi^*.$$

Note que  $\psi_n^* = \psi^*$  e  $\psi_n \rightarrow \psi$  quando  $n \rightarrow \infty$  uma vez que  $P^U(A_n)$  converge fortemente para a identidade quando  $n \rightarrow \infty$ . Além disso,

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} K^{2-\epsilon} \left\| \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} U^j \psi_n - \psi_n^* \right\|^2 \leq \liminf_{K \rightarrow \infty} K^{2-\epsilon} \frac{16n^2 \|\psi_n\|^2}{\pi^2 K^2} = 0,$$

da qual se segue que  $G^-(\epsilon)$  é denso em  $\mathcal{H}$ .

# Capítulo 4

## Trabalho futuro

Listamos abaixo possibilidades para trabalhos futuros sobre temas relacionados a essa tese.

1. Obter estimativas sobre a transformada de Fourier de medidas espectrais levando em consideração singularidades de medidas espectrais, para outros modelos, como, por exemplo, o almost Mathieu.
2. Obter resultados semelhantes aos apresentados no Capítulo 2 para outros módulos de continuidade que não sejam lei de potência, por exemplo, logaritmo.
3. Discutir resultados semelhantes aos apresentados no Capítulo 3 para o Teorema ergódico de von Neumann só que para sistemas contínuos.
4. Estudar o papel de outras dimensões tais como as bem conhecidas dimensões fractais generalizadas na dinâmica unitária.

# Bibliografia

- [1] M. Aloisio, A note on spectrum and quantum dynamics. *J. Math. Anal. Appl.* **478** (2019), 595-603. [39](#)
- [2] M. Aloisio, S. L. Carvalho and C. R. de Oliveira, Category theorems for Schrödinger semigroups. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* **39** (2020), 421-431. [39](#)
- [3] M. Aloisio, S. L. Carvalho and C. R. de Oliveira, Quantum quasiballistic dynamics and thick point spectrum. *Lett. Math. Phys.* **109** (2019), 1891-1906. [39](#)
- [4] M. Aloisio, S. L. Carvalho and C. R. de Oliveira, Refined scales of decaying rates of operator semigroups on Hilbert spaces: typical behavior. *Proc. Amer. Math. Soc.* **148** (2020), 2509–2523. [39](#), [41](#)
- [5] M. Aloisio, S. L. Carvalho and C. R. de Oliveira, Some generic fractal properties of bounded self-adjoint operators. *Lett. Math. Phys.* **111** (2021), Article number: 114. [39](#)
- [6] A. Avila and S. Jitomirskaya, Hölder continuity of absolutely continuous spectral measures for one-frequency Schrödinger operators. *Commun. Math. Phys.* **301** (2011), 563–581. [24](#), [25](#)
- [7] C. Badea and V. Muller, On weak orbits of operators, *Topology Appl.* **156** (2009), 1381–1385. [45](#)
- [8] J.-M. Barbaroux, J.-M. Combes, and R. Montcho, Remarks on the relation between quantum dynamics and fractal spectra. *J. Math. Anal. Appl.* **213** (1997), 698-722.
- [9] J.-M. Barbaroux, F. Germinet, and S. Tcheremchantsev, Fractal dimensions and the phenomenon of intermittency in quantum dynamics. *Duke Math. J.* **110** (2001), 161–194. [41](#)
- [10] J.-M. Barbaroux, F. Germinet, and S. Tcheremchantsev, Generalized fractal dimensions: equivalence and basic properties. *J. Math. Pure et Appl.* **80** (1997), 977–1012.
- [11] V. Barros, L. Liao and J. Rousseau. On the shortest distance between orbits and the longest common substring problem. *Adv. in Math.* **344** (2019), 311-339. [41](#)
- [12] V. Barros and J. Rousseau. Shortest Distance Between Multiple Orbits and Generalized Fractal Dimensions. *Ann. Henri. Poincaré.* **22** (2021), 1853–1885. [41](#)
- [13] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley (1995). [2](#), [36](#), [37](#)

- [14] J. Ben-Artzi and B. Morisse, Uniform convergence in von Neumann’s ergodic theorem in the absence of a spectral gap. *Ergod. The. and Dyn. Syst.* **41** (2021), 1601-1611. [5](#), [21](#), [39](#)
- [15] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and PDE*. Springer, (2011). [35](#)
- [16] E. Carneiro. *Aproximações da identidade*. Notas de aula, IMPA-Rio de Janeiro, (2015). [10](#), [11](#)
- [17] E. Carneiro. *A transformada de Fourier*. Notas de aula, IMPA-Rio de Janeiro, (2015). [10](#), [13](#), [14](#)
- [18] E. Carneiro. *Teoria básica das séries de Fourier*. Notas de aula, IMPA-Rio de Janeiro, (2015). [10](#), [12](#), [13](#)
- [19] S. L. Carvalho and C. R. de Oliveira, Correlation Wonderland Theorems. *J. of Math. Phys.* **57** (2016), 063501. [39](#)
- [20] S. L. Carvalho and C. R. de Oliveira, Generic quasilocalized and quasiballistic discrete Schrödinger operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), 129–141.
- [21] S. L. Carvalho and C. R. de Oliveira, Refined scales of weak-mixing dynamical systems: typical behaviour. *Ergod. The. and Dyn. Syst.* **40** (2021), 3296-3309. [5](#), [21](#), [39](#), [41](#)
- [22] S. L. Carvalho, C. R. de Oliveira, and R. A. Prado, Dynamical localization for discrete Anderson Dirac operators. *J. Stat. Phys.* **167** (2017), 260–296.
- [23] D. Damanik, Schrödinger operators with dynamically defined potentials. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **37** (2017), 1681–1764.
- [24] D. Damanik, J. Fillman and R. Vance, Dynamics of unitary operators. *J. Fractal Geom.* **1** (2014), 391–425. [8](#), [43](#)
- [25] D. Damanik and J. Fillman, Limit-periodic Schrödinger operators with Lipschitz continuous IDS. *Proc. Am. Math. Soc.* **147** (2019), 1531–1539. [25](#)
- [26] R. Del Rio, S. Jitomirskaya, Y. Last, and B. Simon B, Operators with singular continuous spectrum, IV: Hausdorff dimensions, rank one perturbations and localization. *J. Anal. Math.* **69** (1996), 153–200.
- [27] C. R. de Oliveira, *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Progress in Math. Phys. Basel, Birkhäuser, (2009). [1](#), [2](#), [4](#), [10](#), [14](#), [16](#), [18](#), [24](#), [26](#), [31](#), [32](#)
- [28] Gerald Folland, *Real Analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley and Sons, (1999).
- [29] V. F. Gaposkin, Convergence of series connected with stationary sequences. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **39** (1975), 1366–1392. English transl. in *Math. USSR-Izv.* (1975), 1297–1321. [40](#)
- [30] F. Germinet, A. Kiselev and S. Tcheremchantsev, Transfer matrices and transport for Schrödinger operators. *Ann. Inst. Fourier.* **54** (2004), 787–830. [28](#), [30](#), [31](#)

- [31] F. Germinet and A. Taarabt, Spectral properties of dynamical localization for Schrödinger operators. *Rev. Math. Phys.* **124** (2013), 1350016.
- [32] I. Guarneri, Spectral properties of quantum diffusion on discrete lattices. *Europhys. Lett.* **10** (1989), 95–100.
- [33] I. Guarneri and H. Schulz-Baldes, Lower bounds on wave-packet propagation by packing dimensions of spectral measures. *Math. Phys. Elect. J.* **5** (1999), 1–16.
- [34] M. Holschneider, Fractal wavelet dimensions and localization. *Commun. Math. Phys.* **160** (1994), 457–473. [41](#)
- [35] A. G. Kachurovskii, The rate of convergence in ergodic theorems. *Uspekhi Mat. Nauk* **51** (4) (1996), 73–124. English transl. in *Russian Math. Surveys* **51** (4) (1996), 653–703. [5](#), [21](#), [39](#)
- [36] A. G. Kachurovskii and I. V. Podvigin, Estimates of the rate of convergence in the von Neumann and Birkhoff ergodic theorems. *Trans. Moscow Math. Soc.* **77** (2016), 1–53. [5](#), [21](#), [22](#), [39](#), [40](#)
- [37] A. G. Kachurovskii and A. V. Reshetenko, On the rate of convergence in von Neumann’s ergodic theorem with continuous time. *Mat. Sb.* **201:4** (2010), 25–32; English transl. in *Sb. Math.* **201:4** (2010), 493–500. [5](#), [21](#), [39](#)
- [38] A. G. Kachurovskii and V. V. Sedalishchev, Constants in estimates for the rates of convergence in von Neumann’s and Birkhoff’s ergodic theorems. *Matematicheskii Sbornik* **202** (2011), 1105–1125. [5](#), [21](#), [39](#)
- [39] A. G. Kachurovskii and V. V. Sedalishchev, On the constants in the estimates of the rate of convergence in von Neumann’s ergodic theorem. *Mat. Zametki* **87:5** (2010), 756–763. English Transl. in *Math. Notes* **87:5-6** (2010), 720–727. [5](#), [21](#), [39](#)
- [40] S. Klein, X.-C. Liu, A. Melo, Uniform convergence rate for Birkhoff means of certain uniquely ergodic toral maps. *Ergod. Theory & Dyn. Syst.* **41** (2021), 3363–3388.
- [41] Y. Last, Quantum dynamics and decompositions of singular continuous spectra. *J. Funct. Anal.* **42** (1996), 406–445 [4](#), [24](#), [25](#), [28](#), [35](#)
- [42] Y. Last and B. Simon, Eigenfunctions, transfer matrices, and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators. *Invent. Math.* **135** (1999), 329–367. [8](#), [28](#), [30](#)
- [43] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Springer, New York, second edition, (2015). [10](#), [11](#)
- [44] T. Loring, "The Moore-Osgood Theorem on Exchanging Limits"(PDF). Retrieved (2022), 10-28. [43](#)
- [45] V. Müller and Y. Tomilov, “Large” weak orbits of  $C_0$ -semigroups. *Acta Sci. Math.* (Szeged) **79** (2013), 475–505. [30](#)
- [46] M. Viana and K. Oliveira, *Fundamentos da Teoria Ergódica*. SBM. 2<sup>a</sup> Ed. (2019). [10](#), [19](#), [21](#)

- [47] I. V. Podvigin, Exponent of Convergence of a Sequence of Ergodic Averages. *Mathematical Notes* **112** (2022), 271-280. [5](#), [21](#), [39](#)
- [48] V. Rohlin, Lectures on the entropy theory of transformations with invariant measure. *Russian Math. Surveys*. **22** (1967), 1–52. [42](#)
- [49] W. Rudin, Real and complex analysis. McGraw-Hill, (1970). [36](#), [37](#)
- [50] W. Rudin, Functional analysis. McGraw-Hill, (1991). [10](#)
- [51] E. Schrödinger, An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical Review*. **6** (1926), 1049-1070. [1](#)
- [52] E. M. Stein and G. Weiss. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton University Press, (1973). [10](#)
- [53] R. S. Strichartz, Fourier asymptotics of fractal measures. *J. Funct. Anal.* **89** (1990), 154–187. [3](#), [4](#), [8](#), [24](#), [25](#), [28](#)
- [54] J. von Neumann. Proof of the Quasi-Ergodic Hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. **18** (1932), 70-82. [5](#), [21](#), [22](#), [39](#)
- [55] X. Zhao, Hölder continuity of absolutely continuous spectral measure for multi-frequency Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.* **278** (2020), 108508. [24](#), [25](#)
- [56] X. Zhao, Hölder continuity of absolutely continuous spectral measure for the extended Harper’s model. *Nonlinearity*. **34** (2021), 3356. [24](#), [25](#)